PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

III

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

El presente libro es obra de un grupo de profesores de centros de enseñanza técnica superior, autores de trabajos ya publicados sobre diferentes temas de análisis matemático.

Es el resultado de largos años de enseñanza de la disciplina por parte de los autores en los centros de enseñanza mencionados.

La redacción general del libro ha sido hecha por el Profesor, Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas A. Efímov.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

Э. ВУКОЛОВ, А. ЕФИМОВ, Н. ЗЕМСКОВ,
Ю. ЗОЛОТАРЁВ, А. КАРАКУЛИН, А ПОСПЕЛОВ,
А. ТЕРЕЩЕНКО

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ КУРСЫ

Под редакцией А. В. Ефимова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

A. Efímov, A. Karakulin, P. Pospélov,
A. Teréschenko, E. Vukólov, V. Zemskov, Yu. Zolotarev

PROBLEMAS DE LAS MATEMÁTICAS SUPERIORES

PARA LOS CENTROS
DE ENSEÑANZA
TÉCNICA SUPERIOR

CURSOS ESPECIALES

REDACTOR A. EFÍMOV

EDITORIAL MIR
MOSCU

Traducido del ruso por
A. Samojválov

На испанском языке

Impreso en la URSS

© Издательство «Наука». 1984
© Traducción al español. Editorial Mir. 1986

INDICE

CAPÍTULO 14. TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES . . 8

§ 1. Sucesos aleatorios 8
1. Concepto de suceso aleatorio (8). 2. Operaciones algebraicas sobre los sucesos (13). 3. Definición axiomática de la probabilidad de un suceso (21). 4. Esquema probabilístico clásico, o sea, esquema de las urnas (24). 5. Método combinatorio para calcular probabilidades en el esquema clásico (26). 6. Probabilidades geométricas (39). 7. Probabilidades condicionales. Independencia de los sucesos (43). 8. Probabilidades de sucesos compuestos (52). 9. Fórmula de la probabilidad total (61). 10. Fórmula de Bayes (66).

§ 2. Variables aleatorias 71
1. Leyes de distribución y características numéricas de las variables aleatorias (71). 2. Ejemplos de distribuciones clásicas (82). 3. Distribuciones ligadas con pruebas independientes repetidas (87). 4. Distribución de Poisson (96). 5. Ley normal de distribución (98).

§ 3. Vectores aleatorios 100
1. Leyes de distribución y características numéricas de los vectores aleatorios (100). 2. Ley normal sobre un plano (113).

§ 4. Funciones de variables aleatorias 116
1. Características numéricas de las funciones de variables aleatorias (116). 2. Funciones características de variables aleatorias (123). 3. Leyes de distribución de las funciones de variables aleatorias (127). 4. Problemas de composición (134).

§ 5. Ley de los grandes números y teoremas límite de la teoría de las probabilidades 137
1. Ley de los grandes números (137). 2. Teoremas límite de la teoría de las probabilidades (141). 3. Método de pruebas estadísticas (146).

§ 6. Funciones aleatorias (teoría de correlación) 150
1. Leyes de distribución y características medias de funciones aleatorias (150). 2. Derivación e integración de funciones aleatorias (164). 3. Funciones aleatorias estacionarias (169). 4. Descomposición espectral de funciones

aleatorias estacionarias (178). 5. Transformación de funciones aleatorias estacionarias por medio de los sistemas lineales dinámicos de coeficientes constantes (184).
Respuestas 190

CAPÍTULO 15. ESTADÍSTICA MATEMÁTICA 227

§ 1. Métodos de descripción estadística de los resultados de observaciones 227
1. Muestra y procedimientos de su notación (227). 2. Representación gráfica de una muestra (230). 3. Estimaciones numéricas de los parámetros de distribución (335). 4. Descripción estadística y cálculo de características muestrales de una población madre bidimensional (249). 5. Tratamiento previo de los resultados de observaciones con utilización de un ordenador (262).
§ 2. Estimaciones estadísticas de los parámetros de distribución 265
1. Distribución de estadísticas y distribución de una muestra (265). 2. Propiedades principales de las estimaciones estadísticas de los parámetros de distribución (272). 3. Métodos de verosimilitud máxima (274). 4. Método de momentos (277).
§ 3. Estimaciones por intervalo 278
1. Intervalos confidenciales y probabilidad. Intervalos confidenciales para los parámetros de una población madre normalmente distribuida (278). 2. Intervalos confidenciales para el parámetro p de una distribución binomial (286). 3. Intervalos confidenciales para el parámetro de la distribución de Poisson (290). 4. Intervalos confidenciales para el coeficiente de correlación ρ (291).
§ 4. Verificación de hipótesis estadísticas 292
1. Conceptos principales (292). 2. Verificación de las hipótesis sobre los parámetros de una población madre normalmente distribuida (303). 3. Verificación de las hipótesis sobre el parámetro p de una distribución binomial (316). 4. Verificación de las hipótesis sobre el coeficiente de correlación (320). 5. Determinación del dominio crítico mejor para verificar hipótesis elementales (323).
§ 5. Análisis monofactorial de varianza 327
§ 6. Criterio χ^2 y su aplicación 335
1. Verificación de la hipótesis sobre la forma de distribución de una población madre (335). 2. Verificación de la hipótesis sobre la independencia de dos variables aleatorias (341). 3. Verificación de la hipótesis sobre la igualdad de los parámetros de dos distribuciones binomiales (346).
§ 7. Método de cuadrados mínimos y elementos del análisis de regresión lineal 348
1. Cálculo de estimaciones de los parámetros de un modelo lineal (348). 2. Análisis estadístico de estimaciones de un modelo lineal, calculadas con ayuda del método de cuadrados mínimos (353). 3. Aplicación de los sistemas ortogonales de funciones (366). 4. Verificación de la con-

cordancia del modelo con los resultados de observaciones (355). 5. Algunos problemas no lineales que se reducen a los modelos lineales (359). 6. Regresión lineal múltiple (Caso de dos variables independientes) (362). 7. Cálculo y análisis estadístico de estimaciones de los parámetros de un modelo lineal en caso de observaciones correlacionadas y de precisión desigual (367).

§ 8. Métodos no paramétricos de la estadística matemática 371
1. Conceptos principales. Criterio de signos (371). 2. Criterio de Wilkoxon, Mann y Whitney (375). 3. Criterio para verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las variancias de dos poblaciones madre (397). 4. Criterio de series (399). 5. Correlación de rango (402).

Respuestas 406

CAPÍTULO 16. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES 438

§ 1. Problemas fundamentales y ecuaciones de la física matemática 438
1. Deducción de ecuaciones y planteamiento de problemas de la física matemática (438). 2. Reducción de las ecuaciones a la forma canónica (442).

§ 2. Métodos analíticos de resolución de las ecuaciones de la física matemática 445
1. Método de D'Alembert (445). 2. Espacios de Hilbert. Sistemas ortogonales (445). 3. Series ortogonales (454). 4. Métodos de Fourier para resolver ecuaciones de la física matemática (457).

§ 3. Métodos aproximados para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales 472
1. Conceptos fundamentales del método de diferencias finitas (472). 2. Estabilidad numerable (482). 3. Método de recorrido (484). 4. Resolución numérica de los problemas de contorno (486).

Respuestas 488

CAPÍTULO 17. ECUACIONES INTEGRALES 528

§ 1. Ecuaciones integrales de Volterra 528
1. Ecuaciones de Volterra de segundo género: conceptos fundamentales, relación con ecuaciones diferenciales (528). 2. Método de aproximaciones sucesivas. Resolución con ayuda de la resolvente (534). 3. Ecuaciones de Volterra de segundo género, del tipo de convolución (540). 4. Ecuaciones de Volterra de primer género (544).

§ 2. Ecuaciones integrales de Fredholm 549
1. Conceptos fundamentales. Método de aproximaciones sucesivas y resolvente para las ecuaciones de Fredholm de segundo género (549). 2. Resoluciones de las ecuaciones de Fredholm de segundo género con núcleo degenerado (556). 3. Números características y funciones propias. Teoremas de Fredholm (560). 4. Ecuaciones de Fredholm de segundo género con núcleo simétrico (568).

Respuestas 575
Suplementos 582
Bibliografía principal 711

CAPÍTULO 14

TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

§ 1. Sucesos aleatorios

1. Concepto de suceso aleatorio. La teoría de las probabalilidades estudia modelos de los experimentos con casos aleatorios (experimentos aleatorios). Todo experimento (ensayo, prueba) aleatorio consiste en la realización de un complejo de condiciones determinado completamente y en la observación del resultado. Se examinan únicamente tales experimentos que pueden ser repetidos (reproducidos), quedando invariable el complejo de condiciones, un número arbitrario de veces (al menos teóricamente).

El objeto de observación en una u otra prueba aleatoria puede ser constituido por cierto proceso, fenómeno físico o por un sistema en funcionamiento. Para un experimento realmente reproducible el concepto de «resultado observable» significa que en principio existe la posibilidad de registrar el resultado dado de la prueba con ayuda de uno u otro aparato (en el caso más simple, por ejemplo, visualmente). Todo resultado observado se interpreta como caso aleatorio de la prueba (*suceso aleatorio*). El suceso puede producirse y puede no producirse como resultado del experimento.

Para la formalización matemática del modelo de un experimento aleatorio el punto de partida es el concepto de *conjunto de los casos elementales* (se designa con Ω), vinculado con este experimento. Por el concepto en cuestión se entiende un conjunto de los casos inconciliables de modo que como resultado del experimento sea realizado un solo caso y no más. Todo subconjunto del conjunto dado Ω se interpreta como suceso (puede ser que sea no observable). El conjunto de todos los sucesos observables constituye el *campo de sucesos* para el experimento dado.

Se dice que el suceso A *se ha producido* (*ha llegado*, *ha aparecido*, *se ha realizado*) si como resultado del experimento ha llegado a ser un caso elemental ω perteneciente a A ($\omega \in A$). El suceso que coincide con el conjunto vacío $\varnothing$ se llama *imposible* y el que coincide con todo el conjunto Ω, *suceso cierto*.

Dos sucesos A y B se llaman *compatibles* (*incompatibles*) si como resultado del experimento es posible (imposible) la realización conjunta de los mismos. Con otras palabras, los sucesos A y B son compatibles si los conjuntos respectivos A y B tienen elementos comunes y son incompatibles en el caso contrario.

Para el experimento dado el conjunto Ω puede ser *discreto o continuo*. Entre los primeros figuran conjuntos finitos o numerables de

los casos elementales; entre los segundos, los conjuntos tipo del continuo (todo intervalo finito o infinito que haya sobre una recta numérica sirve de ejemplo del conjunto tipo del continuo).

La formalización matemática del modelo de un experimento aleatorio comprende lo siguiente: 1) construcción del conjunto de los casos elementales Ω, 2) descripción del campo de sucesos para el experimento en cuestión, 3) representación de la distribución probabilística sobre el campo de sucesos.

Los conceptos relacionados con 2) y 3) se definen estrictamente en la teoría axiomática de las probabilidades la cual constituye la base de todos los cursos modernos de teoría de las probabilidades y de las aplicaciones de los mismos.

La construcción del conjunto Ω (si éste no está dado durante la descripción de un experimento) se lleva a cabo en la práctica partiendo del requisito consistente en que todos los resultados del experimento dado que nos interesan puedan ser descritos unívocamente, basándose en el conjunto Ω construido. En otros términos, si nos interesan los sucesos A, B, C, etc. que son observables en el experimento en cuestión, entonces el conjunto Ω debe estar constituido de sucesos tales que existan los subconjuntos del conjunto dado equivalentes a los sucesos A, B, C, etc.

Puesto que la noción de «caso elemental» no es definible rigurosamente, el problema indicado admite no una sola solución y depende de la colección de los sucesos que nos interesan. Si exigimos que la regla de descripción unívoca se cumpla para todo el campo de sucesos, en esta circunstancia el concepto de caso elemental llega a ser más determinado. Cabe indicar que precisamente en la colección de todos los subconjuntos del conjunto Ω que forman el campo de sucesos los casos elementales son subconjuntos compuestos por un solo elemento.

EJEMPLO 1. El experimento consiste en arrojar una vez un dado perfecto. Designemos con X el número de puntos salidos en la cara superior del dado. Describir el conjunto de los casos elementales Ω y señalar la composición de los subconjuntos que corresponden a los sucesos siguientes: $A = \{X \text{ es múltiplo de tres}\}$, $B = \{X \text{ es impar}\}$, $C = \{X > 3\}$, $D = \{X < 7\}$, $E = \{X \text{ es fraccionario}\}$, $F = \{0{,}5 < X < 1{,}5\}$. Hallar los pares de los sucesos compatibles.

◀[1]) Introduzcamos las designaciones para los siguientes sucesos que se observan en el experimento dado: $\omega_k = \{X = k\}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$; $\omega^{(1)} = \{X \text{ es un número impar}\}$, $\omega^{(2)} = \{X \text{ es un número par}\}$.

Basándonos en los casos dados, podemos construir dos sucesos ciertos $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$ y $\Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}$. ¿Cuál de ellos es más apropiado en calidad del conjunto de sucesos elementales? Es claro que conviene «desechar» Ω_2, puesto que, por ejemplo, los sucesos observables ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_6, A, B, D, E no son subconjuntos del conjunto Ω_2. Por otro lado, todos los sucesos citados pueden ser descritos como subconjuntos del conjunto Ω_1. En efecto, $A = \{\omega_3, \omega_6\}$, $B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, $D = \{\omega_1, \omega_2, \ldots$

---

[1])Con el signo ◀ se señala el comienzo de las resoluciones de los ejemplos examinados, con el signo ▶, el fin de la resolución; con el signo ●, el comienzo de las indicaciones para los problemas. (*Nota del T.*)

$\ldots, \omega_6\} = \Omega_1$, $E = \varnothing$, $F = \omega_1$. De las igualdades escritas vemos, en particular, que los casos $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(2)}$ son descomponibles en elementos que son como tales los casos del experimento en cuestión. Ahora bien, los casos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ son más «elementales» que los casos $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(2)}$.

Comparando por parejas los sucesos y comprobando la existencia de los elementos comunes, encontramos los pares de sucesos compatibles, A y B, A y C, A y D, B y C, B y D, B y F, C y D, D y F. ▶

EJEMPLO 2. El experimento consiste en descubrir un objetivo aéreo por medio de un radar. El resultado observable es la posición de la mancha luminosa (impulso reflejado por el objetivo) sobre la pantalla del indicador que tiene la forma del círculo de 10 cm de radio, en el sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen se halla en el centro de la pantalla. Describir el conjunto de los sucesos elementales y la composición de los subconjuntos que corresponden a los sucesos siguientes: A = {el objetivo se encuentra en el primer cuadrante}, B = {el objetivo se encuentra en el círculo de 5 cm de radio cuyo centro coincide con el de la pantalla}, C = {el objetivo se encuentra en el círculo de 2,5 cm de radio cuyo centro esta desplazado en 5 cm a lo largo del eje Ox en el sentido negativo}. ¿Son compatibles los pares de sucesos A y B, A y C, B y C?

◀Todos los sucesos observables que nos interesan en el experimento dado están ligados con el registro de la posición que ocupa la mancha luminosa en la pantalla del indicador. En esta circunstancia las coordenadas de un punto aleatorio sobre el plano correspondiente, por ejemplo, al centro de la mancha (se supone que la mancha no es más que un círculo de radio bastante pequeño) son una forma cómoda para la descripción matemática de un caso elemental. Aunque es evidente que no es posible observar físicamente, sobre la pantalla del indicador, un punto (como concepto matemático abstracto), no obstante, semejante procedimiento idealizado para describir un caso elemental simplifica la formalización matemática del modelo del experimento en cuestión.

Ahora bien, el conjunto Ω es continuo y puede ser escrito en la forma

$$\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100\}.$$

Los conjuntos equivalentes a los sucesos indicados tienen la forma

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100, \quad x > 0, \quad y > 0\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\},$$

$$C = \{(x, y) \mid (x + 5)^2 + y^2 \leqslant 6{,}25\}.$$

Según la definición, los sucesos son compatibles si los conjuntos que les corresponden tienen elementos comunes (se intersecan) y son incompatibles en el caso contrario. Por eso los sucesos A y B, B y C son compatibles, mientras que los sucesos A y C son incompatibles. ▶

EJEMPLO 3. Examinemos el experimento aleatorio siguiente: Entre los equipos «Dinamo» y «Spartak» se celebró una partida de fútbol en el campeonato del país. Los sucesos que nos interesan son los siguientes: A = {la partida fue ganada por el equipo «Dinamo»}, B = {el juego finalizó con la victoria de uno de los equipos}, C = = {la partida terminó con 3 a 1 en favor del «Spartak»}, D = {en

la partida fueron marcados tres goles, como mínimo}. Se necesita describir el conjunto de los casos elementales e indicar la composición de los subconjuntos que corresponden a los sucesos mencionados.

◀Es evidente que el experimento descrito no satisface el requisito de reproducibilidad para un invariable complejo de condiciones, puesto que las condiciones de celebración de una partida se cambian de un juego al otro. Por eso es imposible construir el modelo probabilístico de una partida de fútbol sin idealizar de cierta manera las condiciones reales. Supongamos que tal modelo exista. Sin embargo, ¿qué cosa es el resultado (caso elemental) del experimento en cuestión? La respuesta depende de qué círculo de sucesos deseamos observar (registrar) en este experimento. Los sucesos señalados en los datos del problema determinan la esfera de intereses de un «hincha» ordinario de uno u otro equipo. Para describir completa y unívocamente todos los sucesos indicados basta tomar como caso elemental el tanteo final en la partida.

Escribamos el conjunto Ω del modo siguiente:

$$\Omega = \{\omega = (x, y) \mid x \in \mathbb{Z}_0, \quad y \in \mathbb{Z}_0\},$$

donde x es la cantidad de goles marcados por el equipo «Dinamo»; y, la cantidad de goles marcados por el equipo «Spartak»; $\mathbb{Z}_0$, el conjunto de los números enteros no negativos.

Tenemos que considerar, al menos teóricamente, ilimitados los conjuntos de posibles valores de x e y, puesto que no hay ningunas razones para fijar el límite exacto explícito de un tanteo posible en el juego. Desde luego, en la práctica ningún juego puede tener un punteo infinitamente grande.

Los subconjuntos que nos interesan tienen la forma siguiente:

$$A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}_0, \ y \in \mathbb{Z}_0, \ x > y\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}_0, \ y \in \mathbb{Z}_0, \ x \neq y\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x = 1, \ y = 3\} = \{(1, 3)\},$$

$$D = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}_0, \ y \in \mathbb{Z}_0, \ x + y \geqslant 3\}.$$

Nótese que para un otro «experimentador», por ejemplo, para el entrenador del equipo «Dinamo», un objeto de observación más importante puede ser no el tanteo final de la partida, sino la cantidad de los jugadores traumatizados o castigados. Entonces nos vemos obligados a construir un otro conjunto de los casos elementales y, por consiguiente, un otro modelo probabilístico de la partida de fútbol.▶

Construir en los problemas 1.1—1.8 el conjunto de los casos elementales Ω según la descripción del experimento y los subconjuntos que corresponden a los sucesos indicados.

1.1. Un dado se lanza dos veces. El resultado observable consiste en un par de números que correspondan a la cantidad de puntos salidos la primera vez y la segunda vez. Los sucesos: A = {ambas veces sale un número de puntos que es múltiplo de tres}, B = {ninguna vez sale el número seis}, C = {ambas veces sale un número de puntos que es más de tres}, D = {ambas veces sale un número igual de puntos}.

1.2. Una moneda se arroja tres veces. El resultado observable es el siguiente: aparición del escudo (e) o de la cifra (c) en la cara superior de la moneda. Los sucesos: A = {el escudo sale exactamente una vez}, B = {ninguna vez sale la cifra}, C = {salen más escudos que cifras}, D = {el escudo sale dos veces seguidas, como mínimo}.

1.3. Una moneda se lanza hasta que aparezca por primera vez el escudo. El resultado observable consiste en el número total de lanzamientos. Los sucesos: A = {el escudo sale en el tercer lanzamiento} B = {el escudo sale no antes del tercer lanzamiento}.

1.4. Se efectúa un tiro contra un blanco rectangular plano: $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$. El resultado observable es el siguiente: las coordenadas del punto de impacto en el sistema de coordenadas cartesianas. De acuerdo con las condiciones del tiro la bala llega a parar, sin excepción alguna, en el rectángulo mencionado. Los sucesos son: A = {la abscisa del punto de impacto no es menor que la ordenada}, B = = {el producto de las coordenadas del punto no es negativo}, C = {la suma de los valores absolutos de las coordenadas del punto es más que la unidad}. Hallar los pares de los sucesos compatibles.

1.5. En el segmento $[a, b]$ se pone, al azar, un punto. Sea x la coordenada de este punto. Luego en el segmento $[a, x]$ se pone, también al azar, un punto más cuya coordenada es y. El resultado observable consiste en el par de los números (x, y). Los sucesos son: A = {el segundo punto está más próximo al extremo derecho del segmento $[a, b]$ que al extremo izquierdo}, B = {la distancia comprendida entre los dos puntos es menor que la mitad de la longitud del segmento}, C = {el primer punto está más próximo al extremo izquierdo del segmento $[a, b]$ que al extremo derecho}, D = {el primer punto está más próximo al segundo que al extremo derecho del segmento $[a, b]$}. Determinar los pares de los sucesos incompatibles.

1.6. Juan y Pedro convinieron en verse en un lugar determinado entre la hora once y doce. Cada uno llega a este lugar en un instante aleatorio del intervalo de tiempo indicado y espera la llegada del otro hasta expirar la hora, pero no más de 15 minutos, después de lo cual se va. El resultado observable consiste en un par de números (x, y), donde x es el instante de llegada de Pedro e y, el instante de llegada de Juan (el tiempo se calcula en minutos a partir de la hora

once). Los sucesos son: A = {Pedro llega después de las 11 h 45 min}, B = {Pedro llega después de Juan}, C = {Juan llega antes de las 11 h 45 min}, D = {el encuentro no ha tenido lugar}, E = {Pedro ha esperado a Juán todo el tiempo acordado, pero en vano}, F = {Pedro llega antes que Juan o ambos llegan simultáneamente y de este modo Juan no tiene que esperar a Pedro}, G = {el encuentro ha tenido lugar}, H = {el encuentro tiene lugar después de las 11 h 30 min}, I = {el primero en llegar viene antes de las 11 h 30 min}, J = {Juan llega tarde y el encuentro no tiene lugar}, K = {el encuentro ha tenido lugar cuando hasta expirar la hora quedan menos de cinco minutos}.

1.7. Una partícula elemental gira en un acelerador de partículas cargadas con una velocidad constante por una circunferencia de radio r. El blanco no es más que una faja de 2 h de ancho situada perpendicularmente al círculo de rotación a una distancia l a partir del centro ($l > r$). En un instante aleatorio la partícula se arranca de la circunferencia de rotación. El suceso A = {la partícula alcanza el blanco}.

1.8. Con ayuda de un aparato especial se registra el sentido de movimiento φ y la velocidad v del viento en el lugar dado de la Tierra. El aparato está diseñado de modo que permite determinar la velocidad del viento tan exactamente como se quiera, mientras que registrar el sentido de movimiento del viento es posible sólo con precisión hasta 2°. Determinar que son observables o no en el experimento dado los sucesos siguientes: $A = \{(v, \varphi) \mid v < 12$ km/h, $\varphi = 343°35'\}$, $B = \{(v, \varphi) \mid v = 15{,}5$ km/h, $340° \leqslant \varphi < 350°\}$; $C = \{(v, \varphi) \mid v \geqslant 3{,}25$ km/h, $48° \leqslant \varphi' \leqslant 51°\}$.

2. Operaciones algebraicas sobre los sucesos. Puesto que un suceso se identifica con un conjunto, sobre los sucesos pueden realizarse todas las operaciones que son posibles sobre los conjuntos. En particular, están definidas las operaciones siguientes y relaciones siguientes entre los sucesos:

$A \subset B$ (la relación de inclusión de los conjuntos: el conjunto A es un subconjunto del conjunto B), o sea, *el suceso A lleva tras de sí el suceso B*. En otros términos, el suceso B se produce cada vez que tiene lugar el suceso A.

$A = B$ (la relación de equivalencia de los conjuntos), o sea, *el suceso A es idéntico al suceso B*. Esto es posible si y sólo si $A \subset B$ y simultáneamente $B \subset A$.

$A + B$ (unión de los conjuntos), o sea, la *suma de los sucesos*. Esto es un suceso que consiste en que se produce al menos uno de los dos sucesos A o B (que no excluye «o» lógica).

AB (intersección de los conjuntos), o sea, *producto de los sucesos*. Este suceso consiste en la realización conjunta de los sucesos A y B («y» lógica). Así pues, los conjuntos A y B son incompatibles si $AB = \varnothing$.

$A - B$ (conjunto de los elementos que pertenecen a A, pero no pertenecen a B), o sea, la diferencia de los sucesos. Este suceso consiste en que A se produce y B no se produce.

$A = \Omega - A$ (complemento del conjunto A para obtener el Ω), o sea, el *suceso contrario*. Esto es un suceso que consiste en que A no se produce (negación lógica).

El sistema $\mathcal{F}$ de los subconjuntos del conjunto Ω, es tal que como resultado de la aplicación de una de las operaciones descritas a cualesquiera dos elementos del sistema se obtiene de nuevo un elemento del sistema dado, se llama *álgebra* (o *álgebra de Boole*, en honor del matemático inglés J. Boole (1815—1864)). Por *suceso observable* se entiende un tal subconjunto del conjunto Ω que pertenece también al álgebra de Boole $\mathcal{F}$. Así, la clase de los sucesos observables en el experimento dado es, en general, más estrecha que la de todos los subconjuntos del conjunto Ω. Si, por ejemplo, $R \subset \Omega$, pero $R \notin \mathcal{F}$, entonces el suceso R, según la definición, no es observable en el experimento en cuestión. Tal definición del suceso observable se concuerda con el concepto empírico de suceso aleatorio como resultado observable del experimento. Es evidente que si dos sucesos cualesquiera son observables en el experimento dado, entonces la suma y el producto de los mismos así como los sucesos contrarios, de acuerdo con el significado de los sucesos que se obtienen, también deben ser observables en este experimento. Con otras palabras, el campo de sucesos debe estar cerrado respecto a las operaciones algebraicas sobre los sucesos. A estas condiciones les satisface precisamente el sistema de conjuntos-sucesos que representa al álgebra.

Para los experimentos con un número finito de casos el conjunto de todos los subconjuntos Ω, del cual forma parte el conjunto vacío $\varnothing$, constituye el álgebra. Por eso, para semejantes experimentos, todo subconjunto del conjunto Ω puede interpretarse como suceso observable. En las ocasiones en que Ω es un suceso numerable o continuo es necesario exigir que el campo de sucesos integrado por un número infinito de sucesos observables quede cerrado respecto a las operaciones algebraicas sobre un número de conjuntos numerables. El sistema de subconjuntos del conjunto Ω que satisface esta condición se llama *σ-álgebra* y el campo de sucesos correspondiente, *campo boreliano de sucesos*.

EJEMPLO 4. Un dado se lanza una sola vez. El resultado observable es el número de puntos sobre la cara superior. Los sucesos A, B, C, D, E, F están descritos en el ejemplo 1. Describir la composición y explicar el sentido de los sucesos siguientes: $E_1 = \overline{B}$, $E_2 = \overline{C}$, $E_3 = AB$, $E_4 = A + B$, $E_5 = A - \overline{B}$, $E_6 = E + D$, $E_7 = EF$.

En las designaciones del ejemplo 1 describamos la composición de los sucesos indicados, utilizando la definición de la operación algebraica respectiva: $E_1 = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, o sea, sale un número par de puntos; $E_2 = \{\omega, \omega_2, \omega_3\}$, o sea, sale un número no más de tres; $E_3 = \{\omega_3\}$, o sea, el número salido de puntos es impar y múltiplo de tres; $E_4 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$, o sea, el número salido de puntos es o bien impar, o bien múltiplo de tres; $E_5 = A\overline{\overline{B}} = AB = E_3$; $E_6 = \varnothing + D = D = \Omega$. ▶

EJEMPLO 5. Volvamos a examinar el experimento aleatorio descrito en el ejemplo 2. Como ya hemos dicho, el conjunto de casos elementales idealizados $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 100\}$ es una forma cómoda para describir matemáticamente los sucesos observables relacionados con la posición de la mancha luminosa, o sea, del impulso reflejado a partir del objetivo sobre la pantalla del indicador. Supongamos que las observaciones del experimento en cuestión consisten en registrar el hecho de que la mancha luminosa pertenezca en el círculo a una zona arbitrariamente escogida que tiene un área. Por ejemplo, se comprueba el resultado: llega a parar o no el impulso reflejado por el objetivo en cierta parte del anillo, limitada por los radios r_1 y r_2 y por los ángulos polares φ_1 y φ_2. ¿Constituye o no un álgebra de sucesos el conjunto de todos los subconjuntos cuadrables del conjunto Ω?

◀Del curso de análisis matemático es noto que la unión, la intersección y el complemento de una cantidad finita o numerable de subconjuntos cuadrables de cierto conjunto cuadrable sobre un plano son conjuntos cuadrables. De aquí se deduce que el sistema $\mathcal{F}$ de subconjuntos cuadrables del conjunto Ω forma σ-álgebra para el experimento dado.▶

En los problemas que proponemos a continuación se necesita construir, basándose en la descripción del experimento, el conjunto de casos elementales y determinar la composición de los subconjuntos que corresponden a los sucesos indicados.

1.9. Sean A, B, C tres sucesos que se observan en el experimento dado. Expresar en el álgebra de sucesos los sucesos siguientes: $E_1 =$ {de tres sucesos A, B, C se producirá exactamente uno}, $E_2 =$ {de tres sucesos A, B, C se producirá al menos uno}, $E_3 =$ {de tres sucesos A, B, C se producirán exactamente dos}, $E_4 =$ {de tres sucesos A, B, C se producirán dos, como mínimo}, $E_5 =$ {de tres sucesos A, B, C no se producirá ninguno}, $E_6 =$ {de tres sucesos A, B, C se producirán al menos dos}, $E_7 =$ {de tres sucesos A, B, C no se producirá al menos uno}.

1.10. Se efectúan tres disparos de un cañón contra un blanco. El suceso $A_k =$ {se hace un impacto con el k-ésimo disparo} ($k = 1, 2, 3$).

a) Determinar la composición del conjunto Ω, expresando cada caso elemental ω_i por medio de los sucesos A_k.

b) Escribir en el álgebra de sucesos los sucesos siguientes: $A =$ {se hace un impacto exactamente}, $B =$ {se hace al menos un impacto}, $C =$ {se falla al menos una vez}, $D =$ $=$ {se hacen dos impactos, como mínimo}, $E =$ {se hace un impacto no antes que con el tercer disparo}.

Para demostrar algunas afirmaciones en el álgebra de sucesos resulta muy útil la ilustración geométrica de los sucesos que se interpretan como la llegada de un punto a la zona que corresponde a este suceso. Representando convencionalmente los sucesos en forma de diferentes zonas situadas sobre un plano, obtenemos los llamados *diagramas de Venn*.

EJEMPLO 6. Demostrar que las operaciones de adición y de multiplicación de los sucesos poseen las propiedades siguientes:

a) $A + B = B + A$, $AB = BA$ (*conmutatividad*);

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A(BC) = (AB)C$ (*asociatividad*);

c) $(A + B)C = AC + BC$ (*distributividad de la multiplicación respecto a la adición*).

◀Las propiedades de conmutatividad a) y de asociatividad b) se deducen de la definición de las operaciones de adición y de multiplicación, puesto que los sucesos consistentes en que «se produce al menos uno de...» y «se producen todos juntos...» no dependen del orden de los sucesos participantes. Demostremos que el suceso $(A + B)C$ es idéntico al suceso $AC + BC$. Sea $\omega \in (A + B)C$. Esto quiere decir que $\omega \in C$ y pertenece al menos a uno de los sucesos A y B. Pero entonces ω pertenece al menos a uno de los sucesos AC o BC, o sea, $\omega \in AC + BC$. Al contrario, sea $\omega \in AC + BC$. Entonces $\omega \in AC$ o $\omega \in BC$. Por consiguiente, $\omega \in C$ y, además, pertenece al menos a uno de los sucesos A o B, o sea, $\omega \in (A + B)C$. De este modo hemos demostrado la identidad de los miembros primero y segundo.

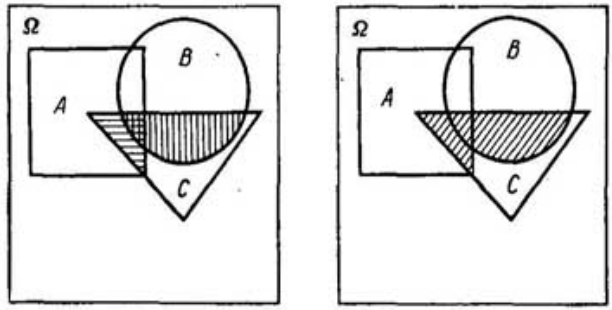


Fig. 118

Ilustremos la propiedad c) por los diagramas de Venn. Supongamos que ambos sucesos significan: A = {llegada al cuadrado}, B = {llegada al círculo}, C = {llegada al triángulo}. Las zonas respectivas están representadas en la fig. 118. Con rayas horizontales se muestra la zona que corresponde al suceso AC; con rayas verticales, la que corresponde al suceso BC y el rayado oblicuo corresponde al suceso $AC + BC$.▶

En los problemas 1.11—1.16 demostrar la validez de las identidades siguientes:

1.11. $A + A = A$, $AA = A$, $A + \varnothing = A$, $A\varnothing = \varnothing$, $A\Omega = A$, $A + \Omega = \Omega$.

1.12. $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$.

1.13. a) $\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$ (reglas de de Morgan). b) Generalizar las reglas de de Morgan para un número arbitrario n de sucesos.

1.14.** $AB + C = (A + C)(B + C)$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

1.15. $A - B = A\overline{B}$,

1.16*. $(A + B) - B = A - AB = A\overline{B} = A - B$.

Observación. Este ejemplo muestra que en el álgebra de sucesos no es admisible «reducir los términos semejantes».

1.17. Sean A, B y C los sucesos observables en el experimento con la particularidad de que A y B son incompatibles. Mostrar que los sucesos AC y BC también son incompatibles.

1.18. Mostrar que

a) si $A \subset B$, entonces se cumplen las relaciones

$$AB = A, \quad A + B = B; \tag{1}$$

b) de la validez de cualquiera de las relaciones (1) resulta

$$A \subset B.$$

1.19. Sean A y B los sucesos observables en el experimento. Mostrar que el suceso $A + B$ se puede descomponer en la suma de sucesos incompatibles valiéndose de los procedimientos siguientes: a) $A + B = A + (B - AB)$; b) $A + B = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$; c) $A + B = A + B\overline{A}$.

1.20*. Mostrar que si $A \subset B$, entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$.

Demostrar las identidades siguientes:

1.21. $(A + B)(A + \overline{B}) = A$.

1.22. $(A + B)(\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = AB$.

1.23. $(\overline{A} + BC)(\overline{B} + AC)(\overline{C} + AB) = ABC + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

1.24*. $AC - B = AC - BC$.

1.25*. $(A - B) + (A - C) = A - BC$.

La diferencia simétrica de dos sucesos $A \triangle B$ se determina por el modo siguiente:

$$A \triangle B = (A - B) + (B - A).$$

Demostrar las identidades siguientes:

1.26. $A \triangle B = (A + B) - AB$.

1.27. $\overline{A \triangle B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$.

1.28. $A \triangle B = (\overline{A\overline{B}}) \triangle \overline{(\overline{A}B)}$.

1.29. Hallar el suceso aleatorio X de la igualdad

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

1.30.** Demostrar que $A - B = \varnothing$ si y sólo si $A \subset B$.

1.31*. Un visitante entra en la sala de un museo donde ya hay $2n$ personas y comienza a buscar conocidos entre ellas. Los sucesos que nos interesan: A = {entre los presentes hay n conocidos del visitante}, B = {entre los presentes hay n desconocidos del visitante}. Demostrar que los sucesos $A + B$ y $\overline{A - B + \overline{B}}$ son ciertos.

1.32. La destrucción de un avión de combate puede producirse o como resultado de la destrucción de ambos motores (sucesos D_1 y D_2) o como resultado de haber recibido un impacto la cabina del piloto (suceso K). Se realiza un tiro prolongado de un cañón antiaéreo contra el avión. Cada impacto en el motor respectivo origina la destrucción del mismo. Supongamos que el suceso A = {destrucción del avión}.

a) Describir el conjunto de casos elementales.

b) Escribir A en el álgebra de sucesos tanto directamente con ayuda de los sucesos D_1, D_2 y K como por medio de los casos elementales.

c)** Obtener de la segunda notación la primera mediante las transformaciones algebraicas admisibles.

1.33. El experimento consiste en medir las dimensiones de la imagen representada en la pantalla de un nuevo televisor experimental recién llegado de la fábrica. El resultado observable es el par de números (x, y), donde x es la dimensión horizontal de la imagen; y, la dimensión vertical de la misma. Antes de realizar la prueba se sabe que la imagen en la pantalla del televisor debe tener una dimensión en diagonal entre 60 y 75 cm. Es noto también que la dimensión horizontal de la imagen es más que la vertical, pero no mayor que en 4/3 veces.

a) Describir el conjunto de casos elementales y la composición de los conjuntos correspondientes a los sucesos siguientes: A = {la dimensión horizontal es más de 50 cm}, B = {la dimensión en diagonal es más que $10 \cdot \sqrt{41}$ cm}, C = {la dimensión vertical es más de 40 cm}.

b) Describir los sucesos AB, $A\overline{B}$, $A + C$, $A \triangle C$.

c) Mostrar que $BC \subset A$.

1.34. Sobre el segmento $[a, b]$ se ponen al azar dos puntos. Sean x e y las coordenadas de estos puntos. Representar sobre el plano Oxy las zonas que corresponden a los sucesos Ω, A, B, AB, $A - B$, $A + B$, donde A = {el segundo punto es más proximo al extremo izquierdo del segmento que el primer punto al extremo derecho}, B = {la distancia entre los puntos es menor que la mitad de la longitud del segmento}.

Sean dados n conjuntos $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ que contienen, hablando en general, un número diferente de elementos. El conjunto de todos los elementos que tienen la forma

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2, \ldots, \omega_n \in \Omega_n\}$$

se llama *producto directo* de los conjuntos $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ y se designa

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n.$$

Supongamos que cada uno de los conjuntos Ω_i, $i = 1, 2, \ldots$, es un conjunto de casos elementales de cierto experimento E_i. Entonces el experimento compuesto consistente en realizar sucesivamente los experimentos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ y en observar el resultado total tiene el conjunto de casos elementales $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$ y se llama *sucesión de ensayos.*

1.35. De un cajón que contiene 10 piezas, entre las cuales tres son defectuosas, al azar se extrae sucesivamente una pieza, sin volver a meterla, hasta que aparezca una pieza defectuosa después de lo cual el ensayo cesa. Designemos el caso del i-ésimo ensayo ω_i = {una pieza defectuosa aparece en el i-ésimo ensayo}. Examinemos el suceso A = {tenemos que realizar la tercera extracción de la pieza según el número de orden}.

a) Construir los casos elementales de la prueba dada con ayuda de las operaciones algebraicas sobre los casos ω_i, $i = 1, 2, \ldots$.

b) Escribir el suceso A con ayuda de los casos elementales y simplificar la notación mediante transformaciones algebraicas.

1.36. Un circuito electrónico contiene tres transistores, cuatro condensadores y cinco resistores. Los sucesos son los siguientes: T_k = {falla el k-ésimo transistor} ($k = 1, 2, 3$), C_i = {falla el i-ésimo condensador} ($i = 1, 2, 3, 4$), R_j = {falla el j-ésimo resistor} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). El circuito electrónico se considera en buen estado si simultáneamente están en buen estado todos los transistores, dos condensadores, como mínimo, y al menos un resistor. Escribir en el

álgebra de sucesos el suceso A = {el circuito se halla en buen estado}.

1.37. Dos jugadores de baloncesto lanzan por turno un balón al cesto hasta la primera introducción del balón en el mismo. Gana el primero en introducir el balón en el cesto. Los sucesos son los siguientes: A_k = {el primer jugador tiene suerte en su k-ésimo lanzamiento} B_k = {el segundo jugador tiene suerte en el k-ésimo lanzamiento propio}; A = = {gana el primer jugador}, B = {gana el segundo}. El primer jugador es el primero en lanzar el balón. Determinar la composición del conjunto de sucesos elementales y escribir los sucesos A y B en el álgebra de sucesos.

El sistema de conjuntos $\{E_1, E_2, \ldots, E_l\}$ se llama *partición* del conjunto E si se cumplen las condiciones siguientes:

$$E_i \neq \varnothing, \quad i=1, 2, \ldots, l.$$
$$E_iE_j=\varnothing, \quad i \neq j,$$
$$E_1+E_2+\ldots+E_l=E.$$

Si se somete a la partición el conjunto de sucesos elementales Ω de cierto experimento, entonces se dice que el sistema de los subconjuntos (sucesos), que realizan la partición, constituye un *grupo completo de sucesos incompatibles.*

1.38. Mostrar que la colección de los sucesos elementales de cualquier experimento con un conjunto finito Ω forma la partición del conjunto Ω para el experimento dado.

1.39. Mostrar que el sistema de sucesos $\{D_1 + D_2, K\overline{D}_1\overline{D}_2, \overline{D_1+D_2+K}\}$, donde D_1, D_2 y K son los sucesos observables en el experimento descrito en el problema 1.32, forma la partición del conjunto Ω para el experimento dado.

1.40. El conjunto de casos elementales de cierto experimento se compone de cuatro casos. ¿Cuántas particiones diferentes pueden formarse para el conjunto en cuestión?

1.41. Sea A un suceso arbitrario observable en cierto experimento así que $A \neq \Omega$ y $A \neq \varnothing$. Mostrar que el sistema de conjuntos $\{A, \overline{A}\}$ forma la partición del conjunto Ω.

1.42. Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Mostrar que el sistema $\{S_1, S_2, S_3\}$, donde $S_1 = \{x|x = 3n;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$, $S_2 = \{x \mid x = 3n - 1;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ $S_3 = \{x|\ x = 3n - 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$, forma la partición del conjunto Ω.

1.43. Para cierto experimento el conjunto Ω contiene exactamente n casos elementales. Mostrar que el número

de todos los sucesos observables que se contienen en el campo de sucesos para el experimento dado es igual a 2^n.

3. Definición axiomática de la probabilidad de un suceso. Para describir cuantitativamente el grado de posibilidad objetiva de que se produzca uno u otro suceso observable en el experimento, se introduce la función numérica $\mathbf{P}(A)$ llamada probabilidad del suceso A.

Varios hechos empíricos relacionados con el comportamiento de las frecuencias relativas de aparición de unos u otros sucesos en ensayos repetidos, la generalización de estos hechos y la abstracción de las propiedades de frecuencias relativas, condujeron a la definición axiomática del concepto de probabilidad. La teoría axiomática de las probabilidades fue creada, en su forma moderna, por A. N. Kolmogórov en 1933.

Sea $\mathcal{F}$ el campo de sucesos para el experimento dado. Se llama *probabilidad* $\mathbf{P}(A)$ la función numérica que está determinada para todos los sucesos $A \in \mathcal{F}$ y satisface las tres condiciones (axiomas de las probabilidades):

1) $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$.

2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

3) Para toda sucesión finita o infinita de sucesos observables $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ tales que $A_i A_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$

$$\mathbf{P}\left(\sum_k A_k\right) = \sum_k \mathbf{P}(A_k).$$

Puesto que el suceso es un conjunto, la probabilidad es también función del conjunto. Los axiomas indicados destacan una clase especial de funciones numéricas que son probabilidades. En consonancia con el significado de estos axiomas la probabilidad es una función no negativa, normalizada y aditiva de los conjuntos que pertenecen a álgebra $\mathcal{F}$.

EJEMPLO 7. Demostrar que si para cierto experimento $A \subset B$, entonces $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.

◀Puesto que $A \subset B$, entonces $AB = A$ (véase el problema 1.18, a)), por eso $B = B(A + \overline{A}) = BA + B\overline{A} = A + B\overline{A}$ con la particularidad de que ambos sumandos son incompatibles. En virtud del axioma de aditividad $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\overline{A})$ y en virtud del axioma 1) $\mathbf{P}(B\overline{A}) \geqslant 0$. Por consiguiente, $\mathbf{P}(B) \geqslant \mathbf{P}(A)$.▶

Demostrar la validez de los corolarios siguientes que se deducen de la definición de la probabilidad de un suceso:

1.44*. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

1.45. $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

1.46*. $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$.

1.47)** $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ (fórmula de adición de las probabilidades).

1.48. $\mathbf{P}(A + B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

1.49. $\mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(A + B)$.

1.50. Demostrar que si $A = B$, entonces $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B)$.

1.51*. Sean A y B dos sucesos pertenecientes al campo de sucesos para el experimento dado. Mostrar que

$$\mathbf{P}(A\overline{B} + \overline{A}B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB).$$

1.52*. Sean A y B los sucesos observables en el experimento. Mostrar que

$$\mathbf{P}(A \triangle B) = 2\mathbf{P}(A + B) - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B).$$

1.53. Demostrar que si A y B son los sucesos observables en un experimento, es válida la igualdad siguiente:

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) - \mathbf{P}(\overline{A}B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B).$$

1.54. Supongamos que los sucesos observables A, B, C son tales que $C \supset AB$. Mostrar que

$$\mathbf{P}(AB + AC + BC) \leqslant \mathbf{P}(A + B).$$

1.55*. Mostrar que para tres sucesos A, B y C observables en un experimento es válida la siguiente fórmula de adición de las probabilidades:

$$\mathbf{P}(A + B + C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \\ - \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(ABC).$$

1.56.** Es sabido que para el experimento dado la aparición conjunta de los sucesos A y B trae tras de sí obligatoriamente la aparición del suceso C. Demostrar que

$$\mathbf{P}(C) \geqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 1.$$

Sea $H_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$, y supongamos que la colección $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ es la partición del conjunto Ω. Entonces, en virtud de los axiomas 2) y 3)

$$\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(H_2) + \ldots + \mathbf{P}(H_n) = 1.$$

Esto significa que la probabilidad unitaria de un suceso cierto se distribuye en el conjunto de los sucesos incompatibles que forman un grupo completo. En el caso general, la correspondencia entre los sucesos de cierto campo de sucesos y las probabilidades de los mismos se llama *distribución de probabilidades*. Ahora bien, la probabilidad $\mathbf{P}(A)$ como función del conjunto $A \in \mathcal{F}$ define la distribución de probabilidades en $\mathcal{F}$.

La terna $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, donde $\mathcal{F}$ es el álgebra de los subconjuntos del conjunto Ω y $\mathbf{P}$, la función numérica que satisface los axiomas 1)—3) se llama *espacio probabilístico* de un experimento aleatorio.

La construcción del espacio probabilístico es la etapa fundamental de la formalización matemática de uno u otro experimento aleatorio.

Hablando en general, el mismo problema de simular los experimentos físicos reales sale fuera del marco de la teoría de las probabilidades. La parte más difícil de este problema consiste en representar correctamente la distribución probabilística en el campo de sucesos para el experimento dado. Los axiomas 1)—3) no contienen las indicaciones sobre los valores numéricos que tienen las probabilidades de los sucesos que nos interesan, sino determinan sólo las propiedades generales que debe poseer una probabilidad como función numérica (sistema de axiomas no es completo). Por eso, quedando en el marco de la teoría axiomática, no se puede resolver unívocamente el problema indicado.

La cuestión consistente en qué valor de probabilidad conviene asignar a unos u otros sucesos en los experimentos reales se resuelve por los métodos de la estadística matemática (véanse, por ejemplo, el capítulo 15, § 2, p. 2 y el problema 2.19).

Supongamos que la prueba E se repite n veces y en este caso se produce m veces el suceso A. La relación m/n se denomina frecuencia relativa $\mathbf{P}^*(A)$ de aparición del suceso. Antes de realizar una serie de pruebas la frecuencia $\mathbf{P}^*(A)$ es un número aleatorio que no se puede predecir exactamente para un número finito cualquiera de ensayos n. Sin embargo, las leyes inherentes a los fenómenos aleatorios son tales que en la práctica, a medida que aumenta el número de ensayos repetidos, la frecuencia aleatoria tiene la tendencia a ser cada vez menos aleatoria y estabilizarse cerca de cierto valor constante (y no aleatorio) de $\mathbf{P}(A)$ para el suceso dado A en el experimento E.

Esta propiedad de las frecuencias relativas se llama *propiedad de estabilidad* al aumentar el número de ensayos repetidos. A su vez, la propiedad de estabilidad de las frecuencias encuentra la fundamentación teórica en el marco de la teoría de las probabilidades, siendo la forma de manifestación de la ley de los grandes números que se examina en el § 5. Merced a la propiedad de estabilidad la frecuencia relativa puede servir de estimación aproximada de la probabilidad de un suceso, de estimación tanto más exacta cuanto mayor es el número de ensayos realizados.

Por otro lado, la probabilidad conocida de aparición del suceso A que nos interesa permite predecir, con cierta exactitud, la frecuencia relativa de llegada del suceso dado al realizar un número bastante grande de ensayos reales. Un problema semejante de pronosticación científica llega a ser sobre todo importante en los casos en que para evaluar la probabilidad, basándose en la frecuencia, deben ser realizados los experimentos costosos o fatigados. Los problemas que se resuelven en la teoría de las probabilidades consisten precisamente en que según las probabilidades dadas de algunos sucesos elementales, conocidos de la experiencia, es necesario determinar las probabilidades de los sucesos complejos que nos interesan.

Conviene subrayar que la definición axiomática de la probabilidad se concuerda con la interpretación estadística de frecuencia únicamente para los experimentos que son, en principio, reproducibles cualquier número de veces en condiciones invariables. Precisamente tales experimentos se examinan en la teoría de las probabilidades.

En muchos problemas que proponemos a continuación se describen los experimentos relacionados con la vida cotidiana o la producción y, hablando en general, no satisfacen el requisito de reproducibilidad que debe llenar un experimento aleatorio. En estas circunstancias siempre se supone la posibilidad de construir un modelo idealizado

que refleja aproximadamente, con uno u otro grado de exactitud, la situación real. Si, por ejemplo, se trata de las piezas tipo fabricadas por cierto taller y se señala que la fabricación en cuestión se caracteriza por un porcentaje determinado de piezas defectuosas (por ejemplo, el 1%), esto quiere decir que en un experimento aleatorio consistente en escoger al azar una pieza de una gran partida de las mismas, fabricadas por el taller dado, la probabilidad del suceso A = {la pieza será defectuosa} es igual a 0,01. Es claro que el porcentaje fijado de piezas defectuosas y, por consiguiente, la probabilidad del suceso A pueden considerarse invariables sólo para ciertas restricciones impuestas sobre las condiciones de realización del experimento indicado: la partida de piezas debe ser suficientemente grande para que se pueda considerar la frecuencia relativa de aparición de las piezas defectuosas como una estimación bastante exacta de la probabilidad del suceso A; el tiempo de realización del experimento debe corresponder al período en que el proceso tecnológico de producción es estable y ajustado y se realiza sin recurrir a trabajos urgentes, sin interrupciones ni otras alteraciones del ritmo laboral, etc.

En otros problemas el espacio probabilístico se construye basándose en la analogía existente entre el experimento en cuestión y cualquier modelo bien estudiado del experimento aleatorio en el cual la distribución de las probabilidades está conocida. Tales, por ejemplo, son las pruebas que se reducen a un esquema clásico o geométrico los cuales examinaremos detalladamente en adelante.

4. Esquema probabilístico clásico, o sea, esquema de las urnas. Todo experimento que satisface la condición de que el conjunto Ω que le corresponde no es más que un conjunto finito de los casos equiprobables $\left(\text{o sea, } \mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}\right)$ se llama *esquema clásico* o *esquema de las urnas*. En vigor del carácter finito de Ω el álgebra de sucesos $\mathcal{F}$ coincide con el conjunto de todos los subconjuntos de Ω (incluyendo también el conjunto vacío). Por eso todo suceso que tiene la forma $A = \{\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \ldots \omega_{k_m}\} \subset \Omega$ es observable en tal experimento y la probabilidad de que se realice se determina por la fórmula de *probabilidad clásica*:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

donde $N(A) = m$ es el número de elementos del conjunto A (número de todos los casos que favorecen el suceso A); $N(\Omega) = n$, el número de elementos del conjunto Ω (número de todos los casos del experimento).

El esquema clásico es la formalización matemática de las pruebas en las cuales los casos elementales poseen una simetría determinada respecto a las condiciones de la prueba y por eso no hay razones considerar cualquiera de los casos más probable que un otro. Tal propiedad poseen, por ejemplo, las pruebas consistentes en extraer al azar un número determinado de bolas de la urna que contiene una cantidad prefijada de bolas indistinguibles por el tiento. (De aquí procede la denominación: esquema de las urnas.)

La cuenta del número de elementos de unos u otros subconjuntos del conjunto Ω se facilita a menudo merced a la fórmula siguiente. El

número de elementos del producto directo de los subconjuntos es igual al producto del número de elementos de los conjuntos integrantes, o sea,

$$N(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_s) = N(\Omega_1) N(\Omega_2) \ldots N(\Omega_s).$$

1.57. Un dado se arroja una sola vez. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$el número de los puntos es igual a 6$\}$, $B = \{$el número de los puntos es múltiple de tres$\}$, $C = \{$el número de los puntos es par$\}$, $D = \{$el número de los puntos es menor que cinco$\}$, $E = \{$el número de los puntos es más de dos$\}$.

1.58. Se escoge al azar un número de cinco cifras. ¿Cuál es la probabilidad de los sucesos siguientes: $A = \{$el número se lee igualmente tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda (como, por ejemplo, 13531)$\}$, $B = \{$el número es múltiple de cinco$\}$, $C = \{$el número se compone de cifras impares$\}$.

1.59. El 1 de setiembre en el primer curso de una de las facultades hay, según el horario, tres conferencias dedicadas a diferentes asignaturas. En total en este curso se estudian 10 asignaturas. Un estudiante que no tenía tiempo para familiarizarse con el horario procura adivinarlo. ¿Cuál es la posibilidad del éxito en el experimento dado si se considera equiposible todo horario compuesto de tres asignaturas?

1.60. Se lanzan dos dados. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$los números de puntos que salen en ambos dados coinciden$\}$, $B = \{$el número de puntos salido en el primer dado es mayor que en el segundo$\}$, $C = \{$la suma de los puntos es par$\}$, $D = \{$la suma de los puntos es más de dos$\}$, $E = \{$la suma de los puntos es igual a cinco, como mínimo$\}$, $F = \{$en un dado, al menos, aparecerá la cifra 6$\}$, $G = \{$el producto de los puntos salidos es igual a 6$\}$.

1.61. Una batería antiaérea compuesta de n piezas dispara una salva contra un grupo de m aviones. Cada uno de los cañones escoge para sí, al azar, un objetivo independientemente de los demás. Hallar la probabilidad de que todos los cañones hagan fuego contra el mismo avión.

1.62. Cinco radioestaciones de campaña tienen permiso de funcionar durante un ejercicio usando seis ondas radioeléctricas. Cada estación escoge una onda al azar. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$durante el funcionamiento simultáneo de todas las cinco radioestacio-

nes no coincidirán al menos dos ondas}; B = {se utilizarán diferentes ondas radioeléctricas}.

1.63. En un tablero de ajedrez se ponen a la suerte dos torres, blanca y negra. ¿ Cuál es la probabilidad de que las torres no ataquen una a la otra?

5. Método combinatorio para calcular probabilidades en el esquema clásico Al calcular el número de casos elementales que constituyen los sucesos en el esquema clásico se utilizan a menudo las fórmulas conocidas del análisis combinatorio. Tales son, por ejemplo, la fórmula para el número de combinaciones de n elementos m a m:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)}{m!} \qquad (2)$$

y la fórmula para el número de variaciones de n elementos m a m:

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! = \frac{n!}{(n-m)!} = n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1). \qquad (3)$$

Para resolver los problemas probabilísticos es importante destacar los experimentos en los cuales pueden utilizarse algunas fórmulas combinatorias. Cada una de las fórmulas combinatorias determina el número total de casos elementales en cierto esquema de las urnas, o sea, en un experimento idealizado consistente en escoger al azar m elementos de n diferentes elementos del conjunto inicial $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. En este caso en las condiciones de cada experimento semejante está estipulado estrictamente: con qué método se realiza la elección (muestreo) y qué se entiende por diferentes muestras. Existen dos esquemas de muestreo que se distinguen en principio: en el primer esquema el muestreo se realiza sin devolver los elementos (esto quiere decir que se escogen todos los elementos de una vez o sucesivamente uno tras otro con la particularidad de que cada elemento escogido se excluye del conjunto inicial). En el segundo esquema el muestreo se lleva a cabo elemento a elemento con devolución obligatoria del elemento escogido en cada paso y con un mezclado esmerado del conjunto inicial antes de proceder a la siguiente elección. Una vez efectuado el muestreo por uno u otro procedimiento, los elementos escogidos (o sus números) pueden ser ordenados (o sea, puestos en la cadena sucesiva) o no ordenados. Como resultado se obtienen las siguientes cuatro condiciones diferentes de un experimento consistente en escoger a la suerte m elementos del número total de n elementos diferentes del conjunto E.

A. EL ESQUEMA DE ELECCIÓN QUE CONDUCE A LAS COMBINACIONES. Si la prueba consiste en escoger m elementos sin devolverlos ni ordenarlos, entonces conviene considerar como casos diferentes los subconjuntos del conjunto E que tienen m elementos y diferente composición. En este caso las combinaciones de elementos (casos elementales) llevan el nombre de *combinaciones de n elementos m a m* y su cantidad total $N(\Omega)$ se determina con ayuda de la fórmula (2).

Para los números C_n^m, llamados también *coeficientes binomiales*, son válidas las identidades siguientes que a menudo son útiles para

1.66. De una urna que contiene $m_1 + m_2$ bolas, entre las cuales m_1 bolas blancas y m_2 negras, se escogen a la ventura m bolas ($m \leqslant$ mín (m_1, m_2)) sin volver a meterlas en la urna. Hallar las probabilidades siguientes: $A = \{$todas las bolas extraídas son blancas$\}$, $B = \{$entre las bolas extraídas hay exactamente k bolas blancas; $k \leqslant m\}$, $C = \{$está sacada al menos una bola blanca$\}$, $D = \{$están sacadas k bolas blancas, como mínimo; $k \leqslant m\}$.

1.67. Para disminuir el número de partidas $2n$ equipos de fútbol, entre los cuales 2 equipos ganadores del campeonato precedente, se dividen por medio del sorteo en dos grupos (la primera y la segunda) que contienen n equipos cada uno. ¿Cuál es la probabilidad q_n de que ambos equipos ganadores se encuentren en diferentes grupos?

1.68. En un torneo de ajedrez participan 10 grandes maestros, 6 maestros internacionales y 4 maestros nacionales. Los rivales para la primera ronda y el número de la mesa para cada par de participantes se determinan por medio del sorteo. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$a la mesa N° 1 se encontrarán entre sí los ajedrecistas que tienen un mismo título$\}$, $B = \{$a la mesa N° 2 jugarán los ajedrecistas que tienen diferentes títulos$\}$, $C = \{$a las mesas N° 1 y N° 2 se encontrarán entre sí los grandes maestros$\}$.

1.69. De una baraja de 52 naipes se extraen al azar 4 naipes. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$en la muestra obtenida todos los naipes son rombos$\}$, $B = \{$en la muestra obtenida todos los naipes son de un mismo palo$\}$, $C = \{$sale al menos un as$\}$, $D = \{$la composición obtenida es la siguiente: un valet, una dama y dos reyes$\}$.

1.70. De una urna que contiene m_1 bolas de número 1, m_2 bolas de número 2, . . ., m_s bolas de número s se extraen al azar n bolas sin volver a meterlas en la urna. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$se sacan n_1 bolas de número 1, n_2 bolas de número 2, . . . n_s bolas de número $s\}$; $B = \{$no aparecen las bolas de número 1 ó 2$\}$.

1.71. Según las condiciones impuestas por los organizadores de una exposición fantástica de alfombras hechas a mano los ejecutores han de utilizar trabajando hilos de lana que tienen, como máximo, siete colores estrictamente determinados (rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul celeste, azul, violado) y, además, en las condiciones ha sido estipulado

que se admite sólo una alfombra cuya composición de colores se distinga de los que tienen las alfombras ya aprobadas para la exposición. En cierto instante la exposición tuvo la colección completa de las muestras en cuestión. Un visitante entra en la sala y se detiene delante de una alfombra elegida a la ventura. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {la alfombra está hecha con utilización de los hilos de un solo color}, B = {en la alfombra están presentes los colores rojo y anaranjado}, C = {en la alfombra están ausentes los hilos violados}, D = {la alfombra está hecha de los hilos de tres colores}, E = {la alfombra está hecha de los hilos de tres colores con la particularidad de que el alfombrero se vio obligado a «pintar» el cielo y el follaje de los árboles con colores impropios}.

B. ESQUEMA DE ELECCIÓN QUE CONDUCE A LAS VARIACIONES. Si la prueba consiste en escoger m elementos sin devolución, pero ordenándolos en una cadena sucesiva a medida que se lleva a cabo la elección, entonces los subconjuntos de m elementos del conjunto E, que se distinguen por la colección de elementos o por el orden de sucesión de estos últimos, son casos diferentes de la prueba dada. En esta ocasión las combinaciones de elementos (casos elementales) obtenidos se llaman *variaciones de n elementos dispuestos m a m* y su número total se determina con ayuda de la fórmula (3), o sea,

$$N(\Omega) = A_n^m .$$

En el caso particular en que $m = n$ la prueba consiste de hecho en una ordenación arbitraria del conjunto E, es decir, se reduce a una permutación aleatoria de los elementos de todo el conjunto. En este caso

$$N(\Omega) = A_n^n = n!.$$

EJEMPLO 9. Un grupo compuesto por 8 personas ocupa los asientos a una mesa redonda en un orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de que en este caso dos personas determinadas estén sentadas juntas?

◀Puesto que se ordena todo el conjunto E de 8 elementos, $N(\Omega) = 8! = 40320$. El suceso A es favorecido por las variaciones tales cuando dos personas señaladas están sentadas una al lado de la otra: en total hay 8 diferentes pares vecinos de asientos a la mesa redonda y en cada uno de estos pares de asientos las personas pueden sentarse de dos modos, mientras que las demás 6 personas ocupan arbitrariamente los asientos restantes; por eso por la fórmula referente al número de elementos del producto directo de los conjuntos obtenemos

$$N(A) = 2 \cdot 8 \cdot 6!$$

y

$$\mathrm{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 6!}{8!} = \frac{2}{7} . \blacktriangleright$$

EJEMPLO 10. Supongamos que el conjunto E es el mismo que en el ejemplo 8. La prueba consiste en escoger, sin devolución, 4 letras y escribir una palabra en el orden en que llegan las letras. ¿Cuántas palabras de 4 letras pueden obtenerse en la prueba dada? ¿Cuál es la probabilidad de que una palabra formada al azar termine en a?

◀ $N(\Omega)$ es el número de todas las palabras de 4 letras en la prueba en cuestión y equivale al número de los subconjuntos ordenados de 4 elementos del conjunto de 10 elementos, o sea,

$$N(\Omega) = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Supongamos que el suceso A = {una palabra compuesta al azar de 4 letras y perteneciente al conjunto E termina en la letra a}. El número de elementos del conjunto A es igual a la cantidad de los métodos de colocar en tres lugares quedados un símbolo de 9, en cada uno (el símbolo a está excluido de la consideración, puesto que su lugar ya se ha determinado); ahora bien,

$$N(A) = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

y

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}. \blacktriangleright$$

1.72. Un grupo compuesto de 8 personas ocupa los asientos dispuestos por un lado de una mesa rectangular. Hallar la probabilidad de que dos personas determinadas están juntas, si

a) el número de los asientos es igual a 8;

b) el número de los asientos es igual a 12.

1.73. n personas entran en una habitación donde hay en total m sillas ($m \leqslant n$) y se sientan al azar, pero de modo que todas las sillas resultan ocupadas.

a) Mostrar que el número de todos los métodos de acomodar a las personas en los asientos se determina por la fórmula (3).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas determinadas queden sin asiento?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que k personas determinadas estén sentadas ($k \leqslant m$)?

1.74. Los números 1, 2, . . ., 9 se escriben al azar. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {los números se escriben en el orden de crecimiento}, B = {los números 1 y 2 están uno al lado de otro y en el orden de crecimiento}, C = {los números 3, 6 y 9 siguen uno tras otro en el orden arbitrario}, D = {los lugares pares están ocupados por los números pares}, E = {la suma de cada dos números que se encuentran a una distancia igual a partir de los extremos vale 10}.

1.75. Cinco fichas llevan escritas las cifras de 1 a 5. La prueba consiste en elegir al azar tres fichas y colocarlas en el orden de su llegada en una fila, de izquierda a derecha. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A =$ $=$ {aparece el número 123}, $B =$ {aparece un número que no contiene la cifra 3}, $C =$ {aparece un número compuesto por cifras sucesivas}, $D =$ {aparece un número par}, $E =$ $=$ {aparece un número que contiene al menos una de las cifras 2 ó 3}.

1.76. 10 variantes de un trabajo de control, escritas cada una en una ficha aislada, se mezclan y se distribuyen al azar entre ocho estudiantes que están sentados en una fila, con la particularidad de que cada uno recibe una variante. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: $A =$ {las variantes que llevan los números 1 y 2 quedan inutilizadas}, $B =$ {las variantes 1 y 2 están elegidas por estudiantes sentados uno al lado de otro}, $C =$ {se reparten los números sucesivos de variantes}.

1.77. En el campeonato de fútbol del país participan 16 equipos de la liga superior. Los equipos que ocupan los lugares I, II, III (ganadores) se condecoran con medallas respectivas y los que ocupan los dos últimos lugares abandonan la liga superior. Antes del comienzo de la lucha todos los equipos tienen iguales posibilidades de ocupar un lugar cualquiera. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: $A =$ {el equipo que se encuentra primero en la lista gana la medalla de oro}, $B =$ {los equipos que ocupan los tres primeros lugares en la lista resultan ser ganadores (pero no obligatoriamente en el orden previsto por la lista)}, $C =$ {el equipo «Spartak», participante del campeonato, abandona la liga superior}, $D =$ {en la distribución real de los equipos según los resultados del campeonato es al menos una incoincidencia con la lista inicial}.

C. ESQUEMA DE ELECCIÓN QUE CONDUCE A LAS COMBINACIONES CON REPETICIONES. Si la prueba consiste en elegir con devolución m elementos del conjunto $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, pero sin recurrir a la ordenación sucesiva, entonces todas las colecciones posibles de m elementos, distintas por su composición, serán diferentes casos de esta prueba. En este caso las colecciones tomadas por separado pueden contener elementos que se repiten. Por ejemplo, cuando $m = 4$ las colecciones $\{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ y $\{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ son indistinguibles para el experimento dado, mientras que la colección $\{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ difiere de cualquiera de las precedentes. Las combinaciones que se obtienen como resultado de la prueba en cuestión se llaman *combinaciones con*

repeticiones y su número total se determina por la fórmula

$$N(\Omega) = C^m_{n+m-1}.$$

EJEMPLO 11. En una biblioteca técnica hay libros de matemáticas, física, química, etc., en total dedicados a 16 ramas de la ciencia. Llegan cuatro pedidos. Suponiendo que toda composición de obras pedidas es equiposible, hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {se piden los libros concernientes a diferentes ramas de la ciencia}, B = {se piden los libros dedicados a una misma rama de la ciencia}.

▲ Es evidente que el número de todos los casos equiprobables del experimento dado es igual a las combinaciones, con repeticiones, de 16 elementos 4 a 4, o sea,

$$N(\Omega) = C^4_{16+4-1} = C^4_{19}.$$

La cantidad de los casos que favorecen el suceso A es igual al número de los métodos de seleccionar, sin devolución, cuatro elementos de 16, por eso

$$\mathbf{P}(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{C^4_{16}}{C^4_{19}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{455}{969} \approx 0{,}47.$$

El número de los casos que favorecen el suceso B es igual a la cantidad de los procedimientos de escoger un elemento de dieciseis, por eso

$$\mathbf{P}(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{C^1_{16}}{C^4_{19}} = \frac{4}{969} \approx 0{,}004. \blacktriangleright$$

1.78. En una pastelería hay 7 clases de pasteles. Un comprador paga por 4 pasteles. Suponiendo que toda colección pedida de pasteles es equiprobable, comprobar la probabilidad de que el comprador pida

a) pasteles de una misma clase,

b) pasteles de diferentes clases,

c) dos a dos pasteles de diferentes clases.

1.79. De la cantidad total de las fichas de dominó que contienen los números 0, 1, 2, . . ., n se extraen dos fichas. Se mira una de ellas y se cerciora de que no es un doble. ¿Cuál es la probabilidad P_n de que la segunda de estas fichas se pueda poner junto a la primera? Hallar los valores numéricos de la probabilidad para $n = 6$ (colección ordinaria de dominó) y $n = 9$ (colección ampliada).

D. ESQUEMA DE ELECCIÓN QUE CONDUCE A LAS VARIACIONES CON REPETICIONES. Si la elección de m elementos del conjunto $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se realiza con devolución y con ordenación de los mismos, formando una cadena sucesiva, entonces todas las colecciones posibles de m elementos (hablando en general, con repeticiones) las cuales se distinguen por la composición de los elementos o por el orden de se-

guimiento de los mismos serán casos diferentes. Por ejemplo, cuando $m = 4$ los conjuntos $\omega_1 = \{e_1, e_1, e_2, e_1\}$, $\omega_2 = \{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ y $\omega_3 = \{e_1, e_1, e_3, e_1\}$ son diferentes casos de la prueba dada. Las combinaciones que se obtienen como resultado se llaman variaciones con repeticiones y el número total de las mismas se determina por la fórmula

$$N(\Omega) = n^m.$$

EJEMPLO 12. La prueba consiste en escoger cuatro veces, con devolución, una de las letras del alfabeto $E = \{a, b, k, o, m\}$ y componer una palabra en el orden de llegada de las letras. ¿Cuál es la probabilidad de que como resultado se componga la palabra *mama*?

◀ El número de elementos del conjunto de casos equiprobables es igual al número de las variaciones con repeticiones, de 5 elementos 4 a 4, o sea,

$$N(\Omega) = 5^4.$$

A la palabra *mama* le corresponde un solo caso posible. Por eso

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{5^4} = 0{,}0016. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 13. 7 bolas iguales se colocan al azar en 4 hoyos (en un hoyo puede caber una cantidad cualquiera de bolas). ¿Cuántos diferentes métodos existen para distribuir 7 bolas en 4 hoyos? ¿Cuál es la probabilidad de que como resultado de la prueba dada el primer hoyo quede vacío (y pueda quedar vacío en este caso cualquier hoyo más)?

◀ Asignemos los números de orden a los hoyos y a las bolas. Se puede considerar que la experiencia consiste en escoger 7 veces, con devolución, un número de orden del hoyo y escribir una palabra de 7 letras. En este caso a cada número de orden de la letra (a cada número de la bola) le corresponde una de las cuatro letras del alfabeto (un número del hoyo).

Así, por ejemplo, la palabra

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

significa que en el primer hoyo van a parar las bolas N° 1, N° 2 y N° 4; en el segundo, la bola N° 7; en el tercero, la bola N° 3; en el cuarto, las bolas N° 5 y N° 6. Así pues, el número de todos los métodos de distribuir 7 bolas en 4 hoyos es igual a la cantidad de diferentes palabras de 7 letras que forman parte del alfabeto de 4 letras, o sea, $N(\Omega) = 4^7$.

El suceso A = {el primer hoyo queda vacío} corresponde a una elección tal cuando el símbolo 1 (número del primer hoyo) está eliminado del alfabeto. Por eso $N(A) = 3^7$ y

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \approx 0{,}133. \blacktriangleright$$

1.80. Se lanzan 10 dados iguales. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {en ningún dado salen 6 puntos}, B = {al menos en un dado salen 6 puntos}, C = {en tres dados, exactamente, salen 6 puntos}.

1.81. Una guía de teléfonos se abre al azar y se escoge un número aleatorio de teléfono. Suponiendo que todos los números telefónicos constan de 7 cifras, con la particularidad de que todas las combinaciones de cifras son equiprobables, hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: Al = {las cuatro últimas cifras del número telefónico son iguales}, B = {todas las cifras son diferentes}, C = {el número comienza con la cifra 5}, D = {el número contiene tres cifras 5, dos cifras 1 y dos cifras 2}.

1.82. Seis individuos suben con ayuda del ascensor instalado en una casa de siete pisos incluyendo la planta baja (piso inferior). Suponiendo que el movimiento del ascensor comienza a partir de la planta baja, hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {en los primeros tres pisos no sale ninguno, B = {todos los individuos salen en los primeros seis pisos}, C = {en los pisos cinco, seis y siete salen dos individuos, en cada uno}, D = {todos los individuos salen en un mismo piso}.

1.83. En un cruce aparecen cuatro automóviles, llegando de cuatro lados distintos. Cada automóvil puede, con igual probabilidad, realizar en el cruce una de las cuatro maniobras: dar vuelta en retorno, pasar de frente, virar a la izquierda o a la derecha. Pasado cierto lapso, todos los automóviles han abandonado el cruce. Hallar las probabilidedes de los sucesos siguientes: A = {todos los automóviles viajan por una misma calle}, B = {tres automóviles viajan por una misma calle}, C = {por cada una de las cuatro calles viaja exactamente un automóvil}, D = {por una calle, como mínimo, no viaja ningún automóvil}.

E. ESQUEMA DE PARTICIONES ORDENADAS. Supongamos que el conjunto E consta de n diferentes elementos. Examinemos la prueba consistente en partir al azar el conjunto E en s subconjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_s$ de modo que:

1. El conjunto E_i contenga exactamente n_i elementos, $i = 1, 2, \ldots, s$.
2. Los conjuntos E_i estén ordenados según la cantidad de elementos n_i.
3. Los conjuntos E_i que contienen igual cantidad de elementos se ordenen de un modo arbitrario. (Esto quiere decir, por ejemplo, que para $n = 7$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$ particiones $\omega_1 = \{E_1 = \{e_1, e_2\}, E_2 = \{e_3, e_4\}, E_3 = \{e_5, e_6, e_7\}\}$ y $\omega_2 = \{E_1 = \{e_3, e_4\},$

$E_2 = \{e_1, e_2\}$, $E_3 = \{e_5, e_6, e_7\}$) son diferentes casos de la prueba dada.)

El número de todos los casos elementales en la prueba en cuestión se determina por la fórmula

$$N(\Omega) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_s!}. \qquad (4)$$

EJEMPLO 14. Diez individuos forasteros, entre los cuales son Petrov e Ivanov, se alojan en un hotel ocupando dos habitaciones para tres personas y una habitación para cuatro personas. ¿Cuántos hay modos de alojarlos? ¿Cuál es la probabilidad de que Petrov e Ivanov se encuentren en la habitación para cuatro personas?

◀ En esta prueba las particiones se caracterizan por los parámetros siguientes: $s = 3$, $n = 10$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$. Según la fórmula (4) $N(\Omega) = \dfrac{10!}{3!\,3!\,4!} = 4200$. El suceso A = {Petrov e Ivanov se encuentran en la habitación para cuatro personas}. Los casos que favorecen el suceso A corresponden a las particiones con los parámetros siguientes: $s = 3$, $n = 8$, $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$;

$$N(A) = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 560.$$

La probabilidad buscada $\mathbf{P}(A) = \dfrac{560}{4200} = \dfrac{2}{15}$. ▶

1.84. El conjunto E consta de n elementos entre los cuales n_1 elementos e_1, n_2 elementos e_2, . . ., n_s elementos e_s ($n_1 + n_2 + \ldots n_s = n$). La prueba consiste en escoger elemento a elemento, sin devolverlos, todos los elementos del conjunto E y colocar éstos de modo que se forme una cadena sucesiva.

a)** Mostrar que el número de todos los casos del experimento dado (número de diferentes sucesiones ordenadas de longitud n) se determina por la fórmula (4).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los elementos e_1 ocupen los primeros n_1 lugares?

1.85. Se lanzan 6 dados. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {salen 3 unidades, dos ternas y un seis}, B = {salen diferentes cifras}, C = {salen tres cifras iguales}.

1.86. 52 naipes se distribuyen entre cuatro jugadores (cada uno recibe 13 naipes). Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {cada jugador recibe un as}, B = = {uno de los jugadores recibe todos los 13 naipes de un mismo palo}, C = {todos los ases se encuentran en las manos de uno de los jugadores}, D = {dos jugadores determinados no reciben ni un solo as}.

1.87. Con ayuda de un abecedario se compone la palabra «matemática». Luego todas las letras de esta palabra se mezclan con esmero y vuelven a componerse al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que vuelva a obtenerse la palabra «matemática»[1])?

E. PROBLEMAS MIXTOS PARA EL CÁLCULO COMBINATORIO DE LAS PROBABILIDADES EN EL ESQUEMA CLÁSICO.

1.88. La prueba consiste en escoger al azar un elemento del conjunto $E_1 = \{a, b\}$ y un elemento del conjunto $E_2 = \{a, b, c\}$. Enumerar la composición del conjunto $E = E_1 \times E_2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra se componga de los elementos iguales?

1.89. Un conjunto E consta de tres elementos diferentes: $E = \{a, b, c\}$. Escribir la composición del conjunto Ω en todas las cuatro pruebas consistentes en escoger dos elementos del conjunto E sin devolución y con devolución, sin ordenación y con ordenación. Determinar el número de elementos del conjunto Ω (número de diferentes muestras) en cada uno de los cuatro casos y comparar el resultado con el que se obtiene con ayuda de la fórmula combinatoria correspondiente.

1.90. De un conjunto de números $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ se escogen dos números. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo número sea mayor que el primero si la elección se efectúa: a) sin devolución; b) con devolución?

1.91. De un conjunto de números $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ se escogen tres números. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo número esté comprendido entre el primero y el tercero si la elección se lleva a cabo: a) sin devolución; b) con devolución?

1.92. De una urna que contiene las bolas con números 1, 2, . . ., n k veces ($k \leqslant n$) se extrae una bola y cada vez vuelve a meterse en la urna. Hallar la probabililidad de que los números de las bolas sacadas forman una sucesión creciente.

1.93. Siendo válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.61, para $m > n$ hallar la probabilidad de que los cañones disparen contra diferentes aviones.

1.94. De una urna que contiene las bolas con números $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ($k_1 < k_2 < \ldots < k_n$) se extraen al azar k bolas y se escriben sucesivamente los números de las bolas sacadas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el m-ésimo lugar

[1]) El acento puesto en la segunda «a» de la palabra «matemática» no se tiene en cuenta. (*Nota del T.*)

fijo ($m \leqslant k$) se encuentre la bola con número k_m si la elección se efectúa: a) sin devolución, b) con devolución?

1.95. En un entrenamiento de la escuela deportiva infantil de fútbol los papeles a desempeñar se distribuyen al azar entre once participantes. Es necesario escoger un portero, cuatro defensas, tres medios y tres delanteros. ¿Cuál es la probabilidad de que dos amigos Juan y Pedro que participan en el entrenamiento: a) jueguen como delanteros, b) reciban diferentes misiones, de modo que uno de los amigos actúe como delantero y el otro, como defensa?

1.96. En una lotería hay n billetes entre los cuales m premiados. Se compran k billetes. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan los sucesos siguientes: A = {entre k billetes hay al menos un billete premiado}, B = {entre k billetes hay un billete premiado, exactamente}, C = {entre k billetes hay k_1 billetes premiados, exactamente}?

1.97. ¿Cuál es la probabilidad p_n de que en un grupo de n ($n \leqslant 365$) estudiantes escogidos al azar al menos dos tengan el cumpleaños en un mismo día? Estimar el valor de p_n para $n = 24$ y $n = 50$.

1.98. En una fábrica trabajan 30 000 obreros y empleados. Mostrar que en la fábrica dada hay obligatoriamente al menos dos individuos cuyos nombres y apellidos llevan iniciales iguales.

1.99. El registro de una calculadora tiene 8 órdenes. Suponiendo que la aparición de un número cualquiera en el registro es equiprobable, determinar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {en todos los órdenes están ceros}, B = {en todos los órdenes están unas mismas cifras}, C = {el registro contiene exactamente dos cifras iguales}, D = {el registro contiene exactamente dos pares de cifras iguales}, E = {el registro contiene exactamente tres cifras iguales}, F = {el registro contiene sólo tres cifras diferentes, como máximo}.

1.100. 7 manzanas, 3 naranjas y 5 limones se distribuyen al azar colocando las frutas en tres paquetes de modo que cada uno de éstos contenga igual cantidad de las mismas. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {en cada uno de los paquetes hay una naranja}, B = {un paquete determinado no contiene una naranja}.

1.101. Cada uno de n bastones se rompe al azar en dos partes: la larga y la corta. Luego $2n$ elementos obtenidos se unen a la ventura formando n pares, cada uno de los cuales

constituye un bastón nuevo. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {todos los elementos se unen formando el orden inicial}, B = {todas las partes largas se unen con las cortas}.

1.102. 20 estudiantes escriben un trabajo de control, estando sentados en un aula de modo que formen dos filas paralelas. En total hay 10 variantes del trabajo de control que se distribuyen del modo siguiente: para cada uno de los estudiantes que ocupan la primera fila el número de la variante se sortea sin devolución y luego la lista inicial de las variantes se restituye y el procedimiento indicado se repite para la segunda fila. ¿Cuál es la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {dos pares de estudiantes que están sentados a las primeras mesas de ambas filas reciben iguales colecciones de las variantes}, B = {las variantes 1 y 2 son recibidas por cualquier par de la primera fila y por cualquier par de la segunda fila}.

1.103. Se sortean seis ediciones por suscripción entre diez participantes.

a) ¿Cuántas diferentes distribuciones de las suscripciones son posibles, si cada edición siguiente se sortea entre todos los participantes? Hallar la probabilidad de que los primeros seis individuos reciban, cada uno, una edición por suscripción?

b) Responder a las mismas preguntas si cada participante que ha recibido una edición sale del juego.

1.104. La prueba consiste en que n objetos diferentes se reparten al azar entre m individuos ($m < n$) con la particularidad de que cada uno puede recibir cualquier número de los objetos que están presentes. ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan los sucesos siguientes: A = {todos los objetos pasan en propiedad de uno de los participantes}, B = {un individuo determinado no recibe ningún objeto}, C = {m_1 individuos determinados reciben un objeto cada uno}, D = {n_1 objetos determinados pasan en propiedad de uno de los participantes}?

1.105. Siendo válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.83, hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: E = {los automóviles van por parejas por diferentes calles}, F = {por una calle determinada viajan dos automóviles}.

1.106. Las condiciones del experimento descrito en el problema 1.83 están cambiadas del modo siguiente: en el cruce

están prohibidas vueltas en retorno. Todos los demás sentidos del movimiento son equiprobables para cada uno de los automóviles. Hallar las probabilidades de los sucesos E y F determinados en el problema precedente.

1.107*. De la colección de todos los subconjuntos no vacíos del conjunto $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ se escogen, según el esquema de elección con devolución, dos subconjuntos E_1 y E_2. ¿Cuál es la probabilidad de que éstos se intersequen?

1.108. Siendo válidas las condiciones del problema 1.68, hallar la probabilidad del suceso $D =$ {a todas las mesas están sentados los rivales que llevan un mismo título}.

6. Probabilidades geométricas. La fórmula de probabilidad clásica se generaliza del modo siguiente si se trata de los conjuntos continuos de casos elementales Ω.

Sea Ω la región cuadrable sobre el plano. Examinemos el sistema $\mathcal{F}$ de subconjuntos cuadrables del conjunto Ω. Como hemos señalado en el ejemplo 5, el sistema $\mathcal{F}$ es σ-álgebra. Supongamos que las condiciones del experimento son tales que la probabilidad de ir a parar en una subregión cuadrable arbitraria ω de la región Ω sea proporcional al área de esta subregión y no dependa de su posición en Ω. En estas condiciones para la probabilidad de que se produzca el suceso $A = \{(x, y) \in \omega \mid \omega \in \mathcal{F}\}$, que se observa en el experimento dado, es válida la *fórmula de la probabilidad geométrica*

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{(x, y) \in \omega \mid \omega \in \mathcal{F}\} = \frac{S(\omega)}{S(\Omega)}, \tag{5}$$

donde $S(\omega)$ es el área de la subregión ω.

De un modo natural, la fórmula (5) se generaliza para el caso de espacios de dimensión arbitraria:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \omega \mid \omega \in \mathcal{F}\} = \frac{\text{mes}(\omega)}{\text{mes}(\Omega)},$$

donde mes (ω) es la medida del conjunto (longitud, área, volumen, etc. en función de la dimensión del espacio en el cual se examinan los conjuntos dados).

EJEMPLO 15. Sobre un tablero de ajedrez infinito cuyos cuadrados tienen el lado a se echa a la suerte una moneda de radio $r < \frac{a}{2}$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A =$ {la moneda se encuentra por completo dentro de un cuadrado}, $B =$ {la moneda corta un lado de un cuadrado, como máximo}.

◀ Sean (x, y) las coordenadas de la moneda caída. En virtud del carácter infinito del tablero de ajedrez, se puede considerar que los casos elementales del experimento dado se determinan por completo por la posición que ocupa el centro de la moneda caída respecto a los vértices del cuadrado que contiene este centro. Colocando el origen de coordenadas en uno de los vértices del cuadrado indicado, podemos escribir el conjunto de casos elementales en forma de $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant$

$\leqslant x, y \leqslant a\}$. El conjunto ω_A que corresponde al suceso A tiene la forma $\omega_A = \{(x, y) \mid r \leqslant x, y \leqslant a - r\}$, o sea, es un cuadrado de lado $a - 2r$. Con ayuda de la fórmula de la probabilidad geométrica (5) hallamos

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S(\omega_A)}{S(\Omega)} = \frac{(a-2r)^2}{a^2}.$$

El conjunto ω_B, que tiene una estructura más compleja, está representado en la fig. 119. Puesto que $S(\omega_B) = a^2 - 4r^2$, entonces, volviendo a utilizar la fórmula (5), encontramos

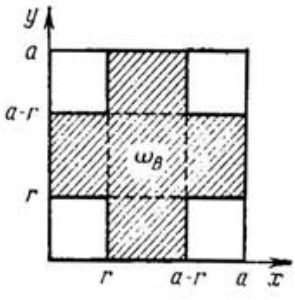


Fig. 119

$$\mathbf{P}(B) = \frac{S(\omega_B)}{S(\Omega)} = 1 - 4\frac{r^2}{a^2}. \blacktriangleright$$

1.109. Dentro de un cuadrado que tiene por vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1) se escoge al azar un punto $M(x, y)$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{(x, y) \mid \text{máx}(x, y) < a, a > 0\}$, $B = \{(x, y) \mid \text{mín}(x, y) < a, 0 \leqslant a \leqslant 1$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2, a > 0\}$, $D = \{(x, y) \mid xy < a, a > 0\}$.

1.110. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de tres segmentos, tomados al azar, en los cuales la longitud de cada uno no supera l, es mayor que l?

1.111*. En una esfera de radio unitario que tiene por centro el punto O se escoge a la suerte un punto M. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$la longitud de la proyección del radio vector $\overrightarrow{OM}$ sobre el eje Ox es menor que a, $0 \leqslant a \leqslant 1\}$, $B = \{$la longitud de la proyección de $\overrightarrow{OM}$ sobre el plano Oxy no es menor que a, $0 \leqslant a \leqslant 1\}$.

1.112. El haz de un localizador se desplaza en el plano horizontal con una velocidad angular constante. ¿Cuál es la probabilidad de que un objetivo sea descubierto en el sector angular de α radianes, si la aparición del objetivo es igualmente posible en cualquier dirección?

1.113*. Los valores a y b son equiposibles en un cuadrado $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 + 2ax + b$ son reales$\}$, $B = \{$las raíces del trinomio de segundo grado $x^2 + 2ax + b$ son positivas$\}$.

1.114. ¿Cuál es la probabilidad de que, sin apuntar, una bala infinitésima acierta las barras de una reja si el espesor

de las barras es igual a a y la distancia entre los ejes de las mismas vale l $(l > a)$?

1.115. Sobre la superficie de una esfera se toman al azar dos puntos y se unen con el arco menor del círculo máximo. Hallar la probabilidad de que el arco no exceda α radianes.

1.116. ¿Cuál es la probabilidad de que un punto escogido a la ventura sobre el globo se encuentre: a) fuera del círculo polar (66°33′ de la latitud boreal); b) entre 60° y 30° de la latitud boreal, c) entre 10° y 40° de la longitud occidental?

1.117. (Problema sobre un encuentro.) Siendo válidas las condiciones del problema 1.6, hallar las probabilidades de los sucesos B, D, F, G, H, I, J, K.

1.118. En un instante aleatorio de tiempo $x \in [0, T]$ aparece una señal de radio de longitud t_1. En un instante aleatorio de tiempo $y \in [0, T]$ se enciende un receptor para un tiempo $t_2 < t_1$. Hallar la probabilidad de que se detecte la señal si: a) el receptor se sintoniza instantáneamente; b) el tiempo de sintonización del receptor es igual a t_3 $(t_3 < t_2 < t_1)$.

1.119*. Un cilindro circular recto homogéneo de altura h y de radio de la base r se arroja al azar sobre un plano horizontal. Hallar la probabilidad de que el cilindro caiga de costado.

1.120*. En un segmento de longitud l se escogen al azar dos puntos M_1 y M_2. Determinar la probabilidad de que de los tres segmentos obtenidos se puede construir un triángulo.

1.121*. Sobre un plano cuadriculado se echa repetidas veces una moneda de diámetro d y como resultado se ha determinado que en el 40% de los casos la moneda no corta ningún lado de un cuadrado. Evaluar la dimensión de la cuadrícula.

1.122. En un cruce hay un semáforo automático en el cual un minuto se ve la luz verde y un medio minuto, la luz roja; luego un minuto vuelve a arder la luz verde y un medio minuto, la luz roja, etc. En un instante aleatorio se aproxima al cruce un automóvil. ¿Cuál es la probabilidad de que pase el cruce sin parar?

1.123. Dos buques deben aproximarse a un mismo atracadero. El tiempo de llegada de ambos buques es independiente y equiposible durante todas las venticuatro horas. Determinar la probabilidad de que uno de los buques tenga que esperar hasta que se libere el atracadero si el tiempo de

parada del primer buque es igual a una hora y el del segundo buque, dos horas.

1.124*. En la circunferencia de radio unitario se ponen al azar tres puntos A, B y C. ¿Cuál es la probabilidad de que el triángulo ABC sea acutángulo?

1.125. Se dan dos circunferencias concéntricas de radios $r_2 > r_1$. Sobre la circunferencia mayor se ponen a la suerte dos puntos A y B. ¿Cuál es la probabilidad de que el segmento AB no corte la circunferencia menor?

1.126. Del segmento $[-1, 2]$ se toman a la ventura dos números. ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea mayor que la unidad y el producto sea menor que la unidad?

1.127*. (Problema de Buffon.) Sobre un plano que lleva trazadas rectas paralelas alejadas una de otra a la distancia $2a$ se echa al azar una aguja de longitud $2l$. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja corte una de las líneas paralelas si $l \leqslant a$?

1.128*. (Paradoja de Bertrand.) En un círculo de radio unitario se traza al azar una cuerda. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la cuerda sea mayor que el lado de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia dada? El resultado depende de cómo se entienden las palabras «se traza al azar una cuerda». Citemos tres diferentes variantes de interpretación de este concepto, partiendo de las «consideraciones de simetría».

a) PRIMERA VARIANTE. Cualquiera que sea el modo de trazar una cuerda, siempre puede inscribirse un triángulo equilátero de manera que uno de los vértices de éste coincida con uno de los extremos de la cuerda. Por eso para «trazar al azar» una cuerda basta, al haber sujetado uno de sus extremos, por ejemplo en el punto (1, 0), elegir a la ventura el segundo extremo suyo en la circunferencia (el origen de coordenadas coincide con el centro de la circunferencia).

b) SEGUNDA VARIANTE. El mismo triángulo equilátero puede ser orientado de manera que uno de sus vértices sea paralelo a la cuerda trazada. Por eso se puede considerar que la cuerda se traza paralela a la dirección prefijada, por ejemplo al eje Ox. En este caso para el trazado de la misma es suficiente elegir un punto en el diámetro perpendicular a la dirección escogida (es decir, en el eje Oy).

c) TERCERA VARIANTE. La posición de la cuerda se determina completamente por dos coordenadas (r, φ), donde r es la distancia entre el centro del círculo y la cuerda, φ

es el ángulo comprendido entre la dirección positiva del eje Ox y el radio vector perpendicular a la cuerda. Para trazar a la suerte una cuerda, es necesario escoger al azar dos números: un número (r) del intervalo (0, 1) y el otro número (φ) del intervalo $(0, 2\pi)$.

Hallar la probabilidad del suceso indicado en cada una de las tres variantes y resolver el problema consistente en cuál entre ellas describe más adecuadamente la prueba dedicada a un trazado aleatorio de la cuerda.

7. Probabilidades condicionales. Independencia de los sucesos. Antes hemos introducido el concepto de probabilidad como función numérica que está determinada sobre el campo de sucesos para el experimento dado y satisface tres axiomas fundamentales (p. 3). Esta probabilidad se llama *probabilidad incondicional*, subrayando de este modo que ella no depende de ningunas condiciones adicionales, a excepción de un complejo fijo de condiciones S por el cual es caracterizado el experimento.

Sean A y B los sucesos observables en un experimento y, además, $\mathbf{P}(A) > 0$.

La magnitud que se define por la igualdad

$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}, \tag{6}$$

se denomina *probabilidad condicional* $\mathbf{P}(B/A)$ *de que aparezca el suceso* B *a condición de que el suceso* A *se haya producido como resultado del experimento en cuestión.*

Para brevedad, la probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A)$ se llama «probabilidad del suceso B a condición de A». Para $\mathbf{P}(A) = 0$ la probabilidad $\mathbf{P}(B/A)$ no está determinada.

El significado de esta definición axiomática de la probabilidad condicional se aclara al examinar el esquema probabilístico clásico. Supongamos que el experimento E sea un esquema de urnas para el cual el número total de todos los casos sea igual a $N(\Omega) = n$, de ellos m casos favorecen el suceso A y k casos favorecen el suceso AB. Admitamos que el suceso A se ha producido. Esto quiere decir que se ha realizado uno de los casos que favorecen el suceso A. De aquí se deduce que el número total de todos los casos posibles de la prueba, que son útiles para construir todos los demás sucesos observables, se ha disminuido hasta el valor igual a m. Es evidente que en esta ocasión al suceso B le corresponden k casos, exactamente. En la prueba dada por probabilidad $\mathbf{P}(B/A)$ conviene entender naturalmente la relación entre el número de los casos favorecientes al caso B, que favorecen también el caso A (tales casos son k, exactamente), y el número de todos los casos que favorecen el suceso A, o sea,

$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{k}{m} = \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}$$

lo que coincide con la fórmula (6).

No es difícil comprobar que cuando se trata de un espacio probabilístico arbitrario la probabilidad $\mathbf{P}(B/A)$, definida por la fórmu-

la (6) y considerada como función de los sucesos observables $B \in \mathcal{F}$ para el suceso fijo A, satisface tres axiomas fundamentales y todas las consecuencias deducidas de éstos (véase el problema 1.131).

En realidad, la fórmula (6) reduce el problema de cálculo de una probabilidad condicional al cálculo de dos probabilidades incondicionales que están definidas en el espacio probabilístico dado.

En algunos problemas resulta útil otro método de calcular la probabilidad condicional, el cual es análogo al que hemos utilizado examinando el esquema clásico.

Como ya sabemos, todo suceso es un subconjunto del conjunto de sucesos elementales Ω que es fijo para el experimento dado. Este conjunto se determina por completo por la colección de condiciones S que caracteriza el experimento. Cambiando estas condiciones, cambiamos de este modo el experimento y obtenemos otro conjunto de casos elementales Ω' y, respectivamente, otra colección de sucesos observables (como subconjuntos del conjunto Ω') y, en consecuencia, otra distribución probabilística en el campo de sucesos. En ciertas ocasiones es cómodo interpretar algún suceso como conjunto de autenticidad de una proposición (afirmación) determinada con respecto al resultado del experimento. Si para dos experimentos cualesquiera los complejos correspondientes de condiciones S y S' no coinciden, entonces en semejantes experimentos una misma proposición con respecto al resultado del experimento se representará por diferentes conjuntos de casos elementales y por eso, hablando en general, tendrá diferentes probabilidades.

Así, por ejemplo, la probabilidad de que sea cierta la declaración «un televisor comprado al azar en el almacén dado tiene defectos» dependerá, en gran medida, del tiempo elegido para realizar este experimento, puesto que distintos días pueden suministrarse al almacén televisores fabricados por diversas fábricas. En virtud de diferentes tecnologías que se emplean para la producción de los televisores, el porcentaje de artículos defectuosos es diferente en cada fábrica.

Ahora bien, en el sentido indicado la probabilidad de todo suceso podría considerarse condicional y designarse $\mathbf{P}(A/S)$.

Supongamos ahora que en las condiciones de realización de un experimento concreto, en el cual seguimos el suceso B, hemos conocido que se había producido el suceso A. Esta nueva información es equivalente a una condición adicional que se impone sobre el experimento y que es adecuada a la aparición del suceso A. La información en cuestión nos obliga a cambiar el conjunto de casos del modelo y, por lo tanto, reexaminar también las probabilidades que se atribuyen a los casos. En otras palabras, para calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A)$ formulamos un nuevo experimento auxiliar que no es más que cierta modificación del experimento inicial y corresponde al complejo de condiciones $\{S, A\}$. En este nuevo experimento la probabilidad incondicional de que se produzca el suceso B es precisamente la que se toma por probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A)$. Llamemos a este método de calcular la probabilidad condicional *método de experimento auxiliar*. En la práctica el método en cuestión suele aplicarse cuando el espacio probabilístico para el experimento auxiliar se construye más sencillamente que para el inicial. Para esto es necesario, por lo menos, que el nuevo experimento se reduzca a un modelo probabilístico conocido.

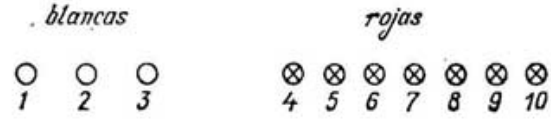
Un caso particular del esquema para el cual realicemos el método

de experimento auxiliar es la sucesión de n ensayos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cada uno de los cuales no es más que un esquema de elección sin devolución, utilizando una misma urna. Si el resultado de la primera extracción es conocido, o sea, se ha producido uno de los casos del ensayo E_1, entonces el experimento auxiliar constituye una sucesión de ensayos $E_2, E_3, \ldots, E_n$ para la cual en el estado inicial está conocida la composición de la urna y por eso están determinadas las probabilidades de los casos elementales, al igual que éstas están determinadas también para el experimento inicial.

Ambos enfoques de determinar la probabilidad condicional se concuerdan bien entre sí al interpretar la probabilidad como frecuencia. En el significado estadístico la frecuencia relativa condicional es «una porción dentro de la parte separada». Si, por ejemplo, el suceso $A = \{$un televisor comprado al azar en el almacén tiene defectos$\}$ y el suceso $B = \{$un televisor comprado al azar en el mismo almacén fue producido en una fábrica de Moscú$\}$, entonces la frecuencia incondicional $\mathbf{P}^*(A)$ es porción de los televisores defectuosos entre todos los producidos y la frecuencia relativa condicional $\mathbf{P}^*(A/B)$ es porción de los televisores defectuosos entre los producidos en las fábricas de Moscú.

EJEMPLO 16. De una urna que contiene 3 bolas blancas y 7 rojas se extraen sucesivamente dos bolas sin volver a meterlas en la urna. Los sucesos son los siguientes: $A = \{$la primera bola sacada es blanca$\}$, $B = \{$la segunda bola sacada es blanca$\}$, $C = \{$al menos una de las bolas sacadas es blanca$\}$. Calcular las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(B/A)$, $\mathbf{P}(A/B)$ y $\mathbf{P}(A/C)$.

◀ Para calcular las probabilidades condicionales buscadas hagamos uso de la fórmula (6). Asignemos sucesivamente los números a todas las bolas en el orden indicado en el esquema



Según la descripción del experimento tenemos el esquema siguiente: elegir al azar, sin devolver, un par de números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$ con ordenación, por eso el conjunto de casos elementales puede escribirse en la forma

$$\Omega = \{\omega_{ij} = (i, j) \mid i = 1, \ldots, 10;\ \ j = 1, \ldots, 10;\ \ i \neq j\}.$$

De aquí resulta que $N(\Omega) = A_{10}^2 = 90$, $\mathbf{P}(\omega_{ij}) = \dfrac{1}{90}$ para todos los valores admisibles de i y j.

Los subconjuntos correspondientes a los sucesos A y B tienen la composición siguiente:

$$A = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, \ldots, 10;\ i \neq j\},$$

$$B = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, 10;\ \ j = 1, 2, 3;\ \ i \neq j\}$$

y, lo que no es difícil calcular, $N(A) = 3 \cdot 9$, $N(B) = 9 \cdot 3$,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{10},\ \mathbf{P}(B) = \frac{3}{10}.$$

Al suceso AB le corresponde el subconjunto

$$AB = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\},$$

por lo tanto, $N(AB) = 3 \cdot 2$,

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{15}.$$

Ya que $C = A + B$, entonces, aplicando la fórmula de adición (véase el problema 1.47), obtenemos $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = \frac{8}{15}$.

Para calcular la probabilidad del producto AC obsérvese que $AB \subset A$, por eso $AC = A(A + B) = A + AB = A$ (véase el problema 1.18).

De aquí

$$\mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(A) = \frac{3}{10}.$$

Luego con ayuda de la fórmula (6) obtenemos

$$\mathbf{P}(B/A) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{2}{9}, \quad \mathbf{P}(A/B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{2}{9},$$

$$\mathbf{P}(A/C) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{9}{16}.$$

Calculemos la probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A)$ aplicando el método de experimento auxiliar. Adicionemos al complejo de condiciones S que determina el experimento inicial una condición que es adecuada a la aparición del suceso A (la primera bola sacada es blanca). El experimento auxiliar respectivo se reduce al siguiente esquema de urnas: de la urna que contiene 2 bolas blancas y 7 rojas (una bola blanca ya está extraída en consonancia con la condición A) se saca al azar una bola (la segunda bola contada en el experimento inicial). La probabilidad de que ésta sea blanca se determina por la fórmula de la probabilidad clásica, por eso $\mathbf{P}(B/A) = 2/9$.

Para calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(A/B)$ con ayuda de este mismo método es necesario fijar la condición B (la segunda bola es blanca). El experimento auxiliar respectivo se realiza de manera siguiente: extraemos a la ventura la primera bola y la ponemos a parte; luego sacamos al azar la segunda bola. Si es roja, volvemos a meter las bolas en la urna y repetimos la prueba hasta que la segunda bola extraída sea blanca. Luego consideramos sólo la prueba en que la segunda bola es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola puesta a parte sea blanca? Evidentemente, el conjunto de casos elementales del experimento dado se puede escribir en la forma

$$\Omega' = \{(i, j) \mid i = 1, \ldots, 10; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\}.$$

Nótese que el experimento auxiliar descrito no se reduce a ninguno de los cuatro esquemas conocidos de elección de dos elementos en el conjunto que los contiene diez. Por eso no hay ningunas razones serias para considerar los casos elementales del experimento dado como sucesos equiprobables. Utilicemos el hecho de que el conjunto

Ω', como se ve de su construcción, coincide con la intersección de los conjuntos Ω y B determinados para el experimento inicial. Es natural admitir que el conjunto Ω', que forma parte del conjunto de casos equiposibles Ω, también se compone de casos equiposibles. En este experimento al suceso observable $A' = \{$la bola puesta a parte es blanca$\}$ le corresponde el subconjunto

$$A' = \{(i, j) \mid i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3; \quad i \neq j\}.$$

Ahora bien,

$$\mathbf{P}(A/B) = \mathbf{P}(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega')} = \frac{2}{9}.$$

El hecho de que este resultado coincide con el que ha sido obtenido con ayuda de la fórmula (6) confirma indirectamente que nuestra admisión acerca de la equiposibilidad de los casos elementales que integran el conjunto Ω' es justa.

Obsérvese también que el conjunto A' es la intersección de los conjuntos A y B y por eso la fórmula anteriormente citada para la probabilidad $\mathbf{P}(A/B)$ se puede escribir del modo siguiente:

$$\mathbf{P}(A/B) = \frac{N(A')}{N(\Omega')} = \frac{N(AB)}{N(\Omega)} \cdot \frac{N(\Omega)}{N(\Omega B)} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)},$$

o sea, este resultado se concuerda con la definición universal de la probabilidad condicional.

Nos tropezamos también con una dificultad semejante de construir el espacio probabilístico, tratando de aplicar el método de experimento auxiliar para calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(A/C)$; el modelo de tal experimento no se reduce a ninguno de los esquemas clásicos de elección.▶

EJEMPLO 17. Juan y Pedro están jugando al juego de azar siguiente. Pedro arroja una moneda y Juan procura adivinar con qué lado ésta caerá para arriba. Si Juan adivina, Pedro le pagará 1 rublo, en el caso contrario Juan pagará a Pedro la misma suma. El juego continúa hasta que uno de los jugadores pierde todo el dinero (se supone que cada jugador tiene en el estado inicial una cantidad finita y completamente determinada de rublos). Supongamos que el juego llega a un momento tal que a Juan le quedan x rublos. Los sucesos son los siguientes: $H_1 = \{$Juan gana con el lanzamiento siguiente de la moneda$\}$, $H_2 = \{$Juan pierde con el lanzamiento siguiente de la moneda$\}$, $A = \{$Juan pierde todo el dinero$\}$. Designemos $\mathbf{P}(A) = f(x)$, donde $f(x)$ es cierta función desconocida del argumento $x \in Z_0$. Expresar las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(A/H_1)$ y $\mathbf{P}(A/H_2)$ por medio de la función $f(x)$.

◀ Para hacer uso del método universal de cálculo de las probabilidades condicionales (o sea, para utilizar la fórmula (6)) es necesario construir un espacio probabilístico $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ que corresponda al experimento dado y, en particular, determinar la composición de los subconjuntos equivalentes a los sucesos observables A, H_1, H_2, AH_1, AH_2 lo que en esta ocasión es un problema difícil, ya que el conjunto de casos en tal juego es infinito. Probemos aplicar el segundo método. Supongamos que es conocido que se ha producido el suceso H_1. Esto quiere decir que Juan ha ganado 1 rublo y en el instante dado su

capital constituye la suma igual a $x + 1$ rublos. El capital de Pedro se ha disminuido, respectivamente, en un rublo. El experimento auxiliar consiste en que a partir del instante dado el juego continúa según las reglas descritas en el experimento inicial. Los modelos de estos dos experimentos no se distinguen, sino por los capitales iniciales de ambos jugadores. La probabilidad condicional $\mathrm{P}(A/H_1)$ es igual, por definición, a la probabilidad incondicional de que en este experimento llegue el suceso A la cual, en consonancia con las designaciones adoptadas, vale $f(x + 1)$.

Así pues, $\mathrm{P}(A/H_1) = f(x + 1)$. De una manera análoga se determina que $\mathrm{P}(A/H_2) = f(x - 1)$.

OBSERVACIÓN. Para calcular la función $f(x)$ en la forma explícita es preciso fijar los valores iniciales del capital de que dispone cada uno de los jugadores, aplicar la fórmula de la probabilidad total que se examina en el p. 9 y resolver la obtenida ecuación en diferencias finitas (véase, por ejemplo, la resolución de este problema en el libro: *Chistiakov V. P.* Curso de la Teoría de las Probabilidades.—Moscú, Naúka, 1982, cap. 4, § 4, en ruso).

Escribiendo la fórmula (6) en la forma equivalente, obtenemos la llamada *fórmula de multiplicación de las probabilidades*

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A), \quad \mathrm{P}(A) > 0.$$

Si ambos sucesos A y B poseen una probabilidad no nula, la fórmula de multiplicación puede escribirse de dos maneras:

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(A/B). \tag{7}$$

La fórmula (7) permite calcular la probabilidad de aparición conjunta de los sucesos A y B siempre que la probabilidad condicional se considere conocida (a partir de las pruebas adicionales) o se determine por el método de experimento auxiliar.

La fórmula de multiplicación para un número arbitrario de sucesos se escribe del modo siguiente:

$$\mathrm{P}(A_1A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2/A_1) \ldots \mathrm{P}(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \tag{8}$$

La fórmula (8) es válida si están determinadas todas las probabilidades condicionales que forman parte del segundo miembro.

El suceso A se llama *independiente del suceso* B, que satisface la condición $\mathrm{P}(B) > 0$, si se cumple la igualdad

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A).$$

Los sucesos A y B se llaman *independientes* si

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B). \tag{9}$$

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se denominan *independientes en conjunto* si para toda colección de m sucesos ($m = 2, 3, \ldots, n$) se cumple la igualdad

$$\mathrm{P}(A_{k_1}A_{k_2} \ldots A_{k_m}) = \mathrm{P}(A_{k_1})\,\mathrm{P}(A_{k_2}) \ldots \mathrm{P}(A_{k_m}),$$
$$k_m \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{10}$$

EJEMPLO 18. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el ejemplo 16, determinar si son independientes o no los sucesos A y B, A y C, B y C, los sucesos A, B y C en conjunto.

◀ Puesto que todas las probabilidades necesarias están calculadas en el ejemplo 16, para resolver el problema basta comprobar si se cumple o no para cada par de sucesos el criterio de independencia (9) y para los tres sucesos A, B y C, el criterio (10). Tenemos

$$\mathrm{P}(AB)=\frac{1}{15},\ \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)=\frac{9}{100}\neq\mathrm{P}(AB),$$

o sea, los sucesos A y B no son independientes (en esta ocasión se dice que ellos son dependientes). Luego, como hemos determinado en el mismo ejemplo,

$$\mathrm{P}(AC)=\mathrm{P}(A)\neq\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(C),$$

ya que $\mathrm{P}(C)\neq 1$. Por consiguiente, los sucesos A y C son también dependientes. Finalmente,

$$\mathrm{P}(BC)=\mathrm{P}(B(A+B))=\mathrm{P}(AB+B)=\mathrm{P}(B)\neq\mathrm{P}(B)\,\mathrm{P}(C),$$

por eso los sucesos B y C son también dependientes.

Los sucesos A, B y C no son independientes en conjunto, ya que según el criterio (10) para esto es necesario que todos los tres sucesos sean independientes de dos en dos. ▶

El concepto de independencia tiene mucha importancia en la teoría de las probabilidades y lo utilizaremos a continuación hasta el fin de la colección. Las fórmulas (9)—(10) permiten separar los sucesos independientes siempre que el modelo de un experimento probabilístico esté formalizado y las probabilidades de todos los sucesos necesarios queden determinadas por completo. Sin embargo, en los problemas prácticos vinculados con la realización de experimentos reales algunas veces no es posible utilizar los criterios de independencia dados. Entonces se emplea frecuentemente la hipótesis sobre la independencia física de los sucesos: se consideran independientes los sucesos que no tienen nexos causales. Tal enfoque está justificado, por ejemplo, en los experimentos que no son más que una sucesión de pruebas que son realizadas por diferentes experimentadores o en diferentes instalaciones no vinculadas entre sí.

Así, por ejemplo, es natural considerar independientes los resultados del tiro efectuado de dos cañones con un disparo simultáneo contra el objetivo o los sucesos relacionados con la aparición de los defectos en artículos determinados que se fabrican por dos cadenas de producción en diferentes empresas, etc.

No obstante, existen también tales situaciones cuando los sucesos son condicionados por un mismo proceso físico en el marco del experimento dado, pero, a pesar de todo, son estadísticamente independientes. En la práctica, si hay dudas, se toman medidas para la comprobación imparcial de la hipótesis sobre la independencia de los sucesos.

La fundamentación estadística de que en cierto experimento sea válida la suposición sobre la independencia de los sucesos A y B consiste en determinar que en una serie larga de ensayos repetidos las frecuencias relativas de aparición del suceso B en todas las pruebas y en aquella parte de todas las pruebas en la cual se ha producido el suceso A resultan aproximadamente iguales entre sí. La resolución de

semejantes problemas, basada en la aplicación de los métodos de verificación de hipótesis estadísticas se examina en la capítulo 15.

EJEMPLO 19. Entre 20 estudiantes que están en la aula 8 fuman, 12 llevan gafas y 6 estudiantes fuman y llevan gafas. El profesor llama, al azar, a la pizarra a un estudiante. Los sucesos son los siguientes: A = {el estudiante llamado a la pizarra fuma}, B = {el estudiante llamado a la pizarra lleva gafas}. Determinar si son dependientes o no los sucesos A y B.

◀ Puesto que $\mathbf{P}(AB) = \frac{3}{10} \neq \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{20}$, la condición de independencia no se cumple, por lo tanto, los sucesos A y B son dependientes.

Cabe señalar que esta afirmación es justa sólo en el marco del experimento estrecho en cuestión y conviene cuidarse de extender esta deducción a todos los estudiantes en general.

Aunque la suposición acerca de la dependencia entre la costumbre de fumar y la agudeza de la vista parece sensata, para su fundamentación científica sería necesario realizar la investigación estadística completa de todos los estudiantes del país, comprobando la vista de cada uno y registrando desde qué tiempo y cómo intensivamente fuman los estudiantes fumadores. Una divergencia considerable entre las frecuencias relativas $\mathbf{P}^*(B)$ y $\mathbf{P}^*(B/A)$ confirmaría la existencia de la dependencia estadística entre la costumbre de fumar y la agudeza de la vista en el grupo profesional de población constituido por los estudiantes. ▶

La condición de independencia de los sucesos establecida a partir de las consideraciones físicas en uno u otro experimento puede ser la base para construir un espacio probabilístico que corresponda al experimento dado. Precisamente de esta manera se construye, por ejemplo, el modelo de un experimento que no es más que sucesión de ensayos independientes, modelo que desempeña gran papel en la estadística matemática. Un caso particular de tal modelo lo constituye el esquema de ensayos de Bernoulli que se examina detalladamente en el § 2, p. 3.

1.129. Sean A y B los sucesos observables en un experimento con la particularidad de que $\mathbf{P}(A) > 0$, $\mathbf{P}(B) > 0$ y el suceso A no depende de B. Mostrar que son válidas las afirmaciones siguientes: a) el suceso B no depende de A; b) los sucesos A y B son independientes. (De este modo se determina que la propiedad de independencia de dos sucesos es recíproca.)

1.130. Demostrar que para el experimento dado cualquier suceso observable A no depende del suceso Ω. Explicar este resultado.

1.131. Sean A, B y C los sucesos observables y, además, $\mathbf{P}(C) > 0$, $\mathbf{P}(AC) > 0$. Demostrar la validez de las siguientes fórmulas para la probabilidad condicional:
$\mathbf{P}(AB/C) = \mathbf{P}(A/C) \cdot \mathbf{P}(B/AC)$ (fórmula de multiplicación),

$\mathbf{P}(A + B/C) = \mathbf{P}(A/C) + \mathbf{P}(B/C) - \mathbf{P}(AB/C)$ (fórmula de adición).

1.132. Supongamos que el suceso A conduce detrás de sí el suceso B y, además, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}\mathbf{P}(B)$. Calcular las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(A/B)$ y $\mathbf{P}(B/A)$ y determinar si son dependientes o no estos sucesos.

1.133. Supongamos que los sucesos A y B son incompatibles y, además, $\mathbf{P}(A) \neq 0$, $\mathbf{P}(B) \neq 0$. Demostrar que estos sucesos son dependientes. En particular, de aquí resulta que los casos elementales de cualquier experimento probabilístico son dependien tes.

1.134. Los sucesos A y B son dependientes. ¿Se deduce de esta afirmación que son incompatibles? Citar un ejemplo.

1.135*. Supongamos que los sucesos A y B son independientes. Mostrar que entonces son independientes también los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

1.136. De una urna que contiene 6 bolas blancas y 4 negras se extraen, al azar y de modo sucesivo, bolas una tras otra hasta que salga una bola negra. Hallar la probabilidad de que sea necesario realizar la cuarta extracción si el muestreo se efectúa: a) con devolución; b) sin devolución.

1.137. De una baraja completa de 52 naipes se extrae a la ventura un naipe. Los sucesos son siguientes: $A = \{$el naipe sacado es un as$\}$, $B = \{$el naipe sacado es de palo negro$\}$, $F = \{$el naipe sacado es una figura (es decir, es un valet, dama, rey o as)$\}$. a) Determinar son dependientes o independientes los siguientes pares de sucesos: A y B, A y F, F y B; b) calcular las probabilidades de los sucesos BF, AF y ABF, utilizando la fórmula de multiplicación de las mismas.

1.138. En un tablero de ajedrez se ponen a la ventura dos alfiles: blanco y negro. ¿Cuál es la probabilidad de que los alfiles no capturen uno al otro a condición de que el alfil blanco se encuentre en una de las casillas extremas del tablero?

1.139. Entre 100 estudiantes que se hallan en el aula 50 conocen el inglés, 40 el francés y 35 el alemán. 20 estudiantes conocen el inglés y el francés, 8 el inglés y el alemán, 10 el francés y el alemán. 5 estudiantes dominan todos los tres idiomas. Uno de los estudiantes ha salido del aula. Examinemos los sucesos siguientes: $E = \{$el estudiante salido conoce el inglés$\}$, $F = \{$el estudiante salido

conoce el francés}, D = {el estudiante salido conoce el alemán}.

a) Indicar todos los pares de sucesos independientes.

b) Determinar si son independientes en conjunto o no los sucesos E, F y D.

1.140. De un conjunto de números $\{1, 2, \ldots, N\}$ según el esquema de elección aleatoria sin devolución se escogen tres números. Hallar la probabilidad condicional de que el tercer número se encuentre en el intervalo formado por los dos primeros si es sabido que el primer número es menor que el segundo.

1.141. Se arrojan al azar tres dados. Los sucesos observables son los siguientes: A = {en los tres dados salen diferentes caras}, B = {al menos en uno de los dados sale el seis}. Calcular $\mathbf{P}(B/A)$ y $\mathbf{P}(A/B)$.

1.142. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.141, determinar si son dependientes o independientes los sucesos C = {una unidad aparece dos veces, como mínimo} y D = {un seis aparece dos veces, como máximo}. Calcular la probabilidad condicional $\mathbf{P}(D/C)$.

1.143*. En una familia hay dos hijos. Suponiendo que el nacimiento de un niño y de una niña son los sucesos independientes y equiprobables calcular la probabilidad de que ambos hijos son niños si se sabe que en la familia hay un niño.

1.144. Un taller fabrica los cinescopios para televisores y el 70% de todos los cinescopios se destinan para televisores en colores y el 30% para los en negro-blanco. Se sabe que el 50% de todos los artículos producidos se suministran al extranjero y, además, entre el número total de cinescopios destinados para los televisores en colores el 40% se envían a otros países. Hallar la probabilidad de que un cinescopio escogido al azar para el control se destine para un televisor en negro-blanco si se conoce que este artículo se suministra al extranjero.

8. Probabilidades de sucesos compuestos. Se llama *suceso compuesto* un suceso observable expresado por medio de otros sucesos observables en el mismo experimento con ayuda de las operaciones algebraicas admisibles.

La probabilidad de que se produzca uno u otro suceso compuesto se calcula con ayuda de las *fórmulas de multiplicación* (7) ó (8) y de la *fórmula de adición* la cual, siempre que se trate de dos sucesos obser-

vables A y B, se escribe en la forma

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB). \tag{11}$$

La fórmula (11) es la consecuencia de los axiomas de probabilidad fundamentales (véase el problema 1.47). En el caso particular cuando $AB=\varnothing$

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$$ (axioma de adición).

Para n sumandos la fórmula (11) se generaliza del modo siguiente

$$\mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)-\sum_{\substack{i\\ i<j}}\sum_{j}\mathbf{P}(A_iA_j)+$$

$$+\sum_{\substack{j\\ i<j<k}}\sum_{j}\sum_{k}\mathbf{P}(A_iA_jA_k)+\ldots+(-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1A_2\ldots A_n). \tag{12}$$

En particular, para la probabilidad de que se produzca al menos uno de los tres sucesos A, B o C obtenemos (véase el problema 1.55)

$$\mathbf{P}(A+B+C)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(C)-$$
$$-\mathbf{P}(AB)-\mathbf{P}(AC)-\mathbf{P}(BC)+\mathbf{P}(ABC)$$

Si los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes en conjunto, la probabilidad de que se produzca al menos uno de los mismos se calcula más fácilmente no por la fórmula de adición (12), sino con ayuda de la fórmula de multiplicación

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-\mathbf{P}(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n})=$$
$$=1-\mathbf{P}(\overline{A}_1)\,\mathbf{P}(\overline{A}_2)\ldots\mathbf{P}(\overline{A}_n). \tag{13}$$

EJEMPLO 20. En una fábrica las piezas defectuosas constituyen el 5% de la cantidad total fabricada de las mismas. Para el control se escogen 20 piezas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre éstas haya por lo menos una pieza defectuosa?

◀ La probabilidad de que cualquier pieza producida en la fábrica sea defectuosa es igual, según los datos, a $p=0{,}05=\mathbf{P}(A_k)$, $k=1, 2, \ldots, 20$, donde el suceso $A_k=\{$la k-ésima pieza extraída es defectuosa$\}$. Evidentemente, nos interese el suceso $A_1+A_2+\ldots+A_{20}$. Si el proceso tecnológico está bien arreglado, se puede considerar que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ son independientes en conjunto. Con ayuda de la fórmula (13) obtenemos

$$\mathbf{P}(A_1+A_2+\ldots+A_{20})=1-\prod_{k=1}^{20}\mathbf{P}(\overline{A}_k)=1-0{,}95^{20}\approx 0{,}64. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 21. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.139, calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: $A=\{$el estudiante salido conoce el inglés o el francés$\}$, $B=\{$el estudiante salido conoce sólo el inglés$\}$, $C=\{$el estudiante salido no conoce ningún idioma$\}$.

◀ Puesto que $A = E + F$, entonces, utilizando la fórmula de adición (11) y los datos del problema 1.139, obtenemos

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(EF) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}7.$$

El suceso B puede ser representado en la forma $B = E\overline{D}\overline{F}$. Aplicando la fórmula de multiplicación (7), las propiedades de la probabilidad condicional, la fórmula de adición (11) y los datos del problema 1.139, obtenemos

$$\mathrm{P}(E\overline{D}\overline{F}) = \mathrm{P}(E)\,\mathrm{P}(\overline{D}\overline{F}/E) = \mathrm{P}(E)\,(1 - \mathrm{P}(D + F/E)) =$$

$$= \mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(E)\,\mathrm{P}(D + F/E) = \mathrm{P}(E) - \mathrm{P}(DE + FE) =$$

$$= \mathrm{P}(E) - (\mathrm{P}(DE) + \mathrm{P}(EF) - \mathrm{P}(DEF)) =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}08 - 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}27$$

(compruébese el resultado con ayuda del diagrama de Venn:

$$\mathrm{P}(E\overline{D}\overline{F}) = \frac{50 - 20 - 3}{100} = 0{,}27\Big).$$

Para calcular la probabilidad del suceso $C = \overline{E}\overline{D}\overline{F}$ utilicemos las reglas de de Morgan y la fórmula de adición para tres sucesos:

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(\overline{E}\overline{D}\overline{F}) = \mathrm{P}(\overline{E + D + F}) = 1 - \mathrm{P}(E + D + F) =$$

$$= 1 - (\mathrm{P}(E) + \mathrm{P}(D) + \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(ED) - \mathrm{P}(EF) -$$

$$- \mathrm{P}(DF) + \mathrm{P}(EDF)) = 0{,}08. \blacktriangleright$$

1.145*. Se lanzan al azar dos dados. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {la suma de los puntos salidos es par}, B = {el producto de los puntos salidos es par}, C = {en uno de los dados el número de puntos salidos es par y en el otro, impar}, D = {en ninguno de los dados sale un seis}.

1.146. Un caza está atacando el orden de combate de los aviones adversarios de los cuales forman parte 8 portadores y 2 perturbadores que exteriormente no distinguen unos de otros. El caza realiza un ataque sucesivo contra cuatro aviones, escogiendo cada vez el objetivo al azar. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {mayor parte de los aviones atacados son portadores}, B = {han sido atacados todos los perturbadores}, C = {los aviones que integran ambos grupos han sido atacados alternadamente}, D = {un perturbador ha sido atacado no antes que el tercero según la cuenta}.

1.147. Se realizan cinco mediciones independientes repetidas de cierta magnitud física. La probabilidad de que

en una medición (cualquiera) el error exceda la exactitud prefijada es igual a 0,1. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {al menos en tres mediciones se alcanza la exactitud prefijada}, B = {en todas las mediciones se alcanza la exactitud prefijada}, C = {al menos en tres mediciones seguidas se alcanza la exactitud prefijada},

1.148. Por un canal de telecomunicación constituido por un transmisor, un retransmisor y un receptor se transmiten dos señales: la unidad y el cero. Debido a la acción de las perturbaciones las señales pueden distorsionarse. En el tramo transmisor-retransmisor una unidad queda la unidad con probabilidad p_1 y se convierte en cero con probabilidad $1 - p_1$; un cero queda el cero con probabilidad q_1 y se convierte en unidad con la probabilidad $1 - q_1$. En el tramo retransmisor—receptor las probabilidades de los sucesos indicados son iguales a p_2, $1 - p_2$, q_2 y $1 - q_2$, respectivamente. Determinar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {la combinación codificada 10 enviada por el transmisor está recibida sin distorsiones}, B = {está transmitida la combinación 10 y están recibidos dos símbolos iguales}.

1.149. Los datos estadísticos obtenidos entre los estudiantes de uno de los centros de enseñanza superior muestran lo siguiente: el 60% de todos los estudiantes practican el deporte, el 30% participan en los círculos de aficionados al arte, el 50% trabajan en el destacamiento de construcción, el 20% practican el deporte y participan en los círculos de aficionados al arte, el 10% practican el deporte y trabajan en el destacamento de construcción, el 5% participan en los círculos de aficionados al arte y trabajan en el destacamento de construcción y, por último, el 5% toman parte en todas las tres formas de actividad. Un corresponsal del periódico local se acerca a un estudiante escogido al azar. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {el estudiante se ocupa al menos de una de dos formas de actividad: practica el deporte y participa en un círculo de aficionados al arte}, B = {el estudiante sólo practica el deporte}, C = {el estudiante se ocupa sólo de una forma de actividad}, D = {el estudiante se ocupa de dos y sólo de dos formas de actividad}.

1.150. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.137, calcular las probabilidades de los sucesos $B + F$, $F - A$ y $F - AB$.

1.151. Es sabido que A y B son los sucesos observables

en un experimento y $\mathbf{P}(B) = 0{,}4$, $\mathbf{P}(A/B) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(A/\overline{B}) = 0{,}2$. Hallar $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\overline{A}\,\overline{B})$, $\mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$ y $\mathbf{P}(A \triangle B)$.

1.152. La probabilidad de dar en el blanco efectuando un disparo es igual a p_1. ¿Cuántos disparos independientes hace falta producir en condiciones invariables para acertar el blanco al menos una vez con la probabilidad p_2? Escribir la expresión general para la cantidad mínima de disparos $n(p_1, p_2)$ y hallar los valores numéricos siguientes: $n(0{,}3;\ 0{,}9)$, $n(0{,}3;\ 0{,}95)$.

1.153. (Problema de de Meré.) ¿Cuántas veces es necesario arrojar un par de dados para que, con la probabilidad no menor que 0,5, aparezca, por lo menos una vez, la suma de puntos igual a 12?

1.154. Se efectúa el tiro de un cañon antiaéreo contra un blanco aéreo. Los impactos hechos sueltos son independientes y tienen la probabilidad p. Si un proyectil alcanza el blanco, éste se destruye con la probabilidad p_1. La reserva de combate del cañón está constituida por n proyectiles. El tiro se efectúa hasta destruir el blanco o hasta gastar toda la reserva de combate. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {no toda la reserva de combate de proyectiles será gastada}, B = {quedarán no gastados k proyectiles, como mínimo}.

1.155. Quedando válidas las condiciones del problema 1.32, hallar la probabilidad de que el avión sea destruido si $\mathbf{P}(D_1) = \mathbf{P}(D_2) = p_1$, $\mathbf{P}(K) = p_2$.

1.156. Un avión se compone de tres partes que tienen diferente vulnerabilidad: 1) cabina del piloto y motores, 2) depósitos de combustible, 3) célula. Para destruir el avión es necesario hacer un impacto en la primera parte, dos impactos en la segunda o tres impactos en la tercera parte. Si el avión está alcanzado por un proyectil, éste con probabilidad p_k e independientemente de otros hace el impacto en la k-ésima parte ($k = 1, 2, 3$). Se efectúa un tiro contra el avión. Los sucesos son los siguientes: A_m = {m proyectiles han alcanzado el avión}, B = {el avión está destruido}. Hallar la probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A_m)$ para $m = 2, 3, 4$.

1.157. Un estudiante puede responder a 20 de 25 preguntas del programa. El examen preliminar se considera rendido si el estudiante responde, como mínimo, a tres de cuatro preguntas contenidas en la papeleta. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante pase el examen preliminar?

1.158. Los estudiantes cumplen un trabajo de control en el aula de máquinas controladoras. El trabajo se compone de tres problemas. Para recibir una nota positiva es suficiente resolver dos problemas. Para cada problema están codificadas cinco diferentes respuestas de las cuales sólo una es correcta. El estudiante Ivanov conoce mal el material y por eso escoge al azar las respuestas a cada problema. ¿Cuál es la probabilidad de que este estudiante reciba una nota positiva?

1.159. En un tiro hay blancos de dos tipo: menudos (de diámetro d) y grandes (de diámetro $2d$). El tirador recibirá un premio si, efectuando tres disparos, dos veces seguidas da en un blanco que se escoge según su deseo, pero con una condición obligatoria: no debe disparar dos veces seguidas contra un blanco que tiene un mismo diámetro. ¿Qué blanco, menudo o grande, debe ser el primero en probarse si la probabilidad de alcanzar un blanco es proporcional al área de éste? ¿Cuántas veces es mayor la probabilidad de recibir el premio empleando la estrategia correcta en comparación con la incorrecta si se sabe que un blanco de diámetro $2d$ será obligatoriamente batido por el tirador?

1.160. Juan y Pedro lanzan por turno una moneda. Gana quien antes consigue la aparición del escudo. Juan es el primero en arrojar la moneda. Hallar las probilibidades p_1 y p_2 de que gane, respectivamente, uno de los jugadores, suponiendo que: a) el lanzamiento de la moneda puede continuar un período ilimitadamente largo; b) el juego está limitado con diez lanzamientos para cada uno de los jugadores con la particularidad de que si Juan, al efectuar el décimo lanzamiento, no consigue la aparición del escudo, se considera que Pedro ha ganado. ¿Cómo han cambiado las probabilidades en este caso? Determinar si se puede o no hacer que el juego sea más justo permitiendo que Pedro realice un mayor número de lanzamientos cuando llegue su turno a lanzar. Calcular la probabilidad de que gane Juan si se permite que Pedro haga dos lanzamientos durante su turno, quedando ilimitada la cantidad total de lanzamientos.

1.161. Juan y Pedro lanzan por turno dos dados, efectuando cada uno m lanzamientos. Gana quien antes consigue que en ambos dados salga la suma de puntos igual a 8. Juan es el primero en arrojar. Hallar las probabilidades p_1 y p_2 de que gane, respectivamente, cada uno de los jugadores y

determinar cuántas veces la probabilidad de ganar que tiene Juan es mayor en comparación con la probabilidad que tiene Pedro si: a) el número de lanzamientos es ilimitado y $m = 1$; b) el número de lanzamientos es ilimitado, pero $m > 1$.

1.162*. Juan y Pedro han comprado dos fichas de «Sportlotó 6 de 49». Juan mismo ha llenado una ficha y ha pedido a uno de los miembros de su familia que llene la otra sin decirle a éste la propia variante de llenado. Pedro mismo ha llenado ambas sus fichas y en una de ellas ha señalado los números 1, 2, 3, 47, 48, 49 y en la otra, 1, 2, 3, 37, 38, 39. ¿Quién de los amigos tiene mayor posibilidad de obtener el premio mínimo y cuántas veces esta posibilidad es mayor que la otra? (Una ficha será premiada si el participante de la lotería adivina tres números, exactamente.)

Examinemos el trabajo, durante un intervalo de tiempo fijo T, que realiza cierto sistema físico constituido por n elementos (piezas, conjuntos, etc.) unidos de un modo determinado. La fiabilidad de este sistema se determina cuantitativamente, en el estrecho sentido, por la probabilidad de un funcionamiento irreprochable en el transcurso del intervalo de tiempo T. El surgimiento de los fallos del sistema se determina por los fallos de los elementos de éste y, por consiguiente, la fiabilidad del sistema depende de la de los elementos que lo integran.

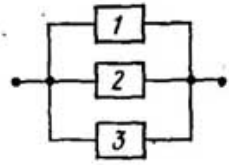
Se distinguen la conexión en paralelo de los elementos del sistema redundancia o duplicación) y la conexión en serie. En caso de la conexión en paralelo el sistema falla solamente al fallar todos los elementos y en caso de la conexión en serie, al fallar al menos un elemento del sistema.

Los fallos de elementos sueltos del sistema pueden ser sucesos dependientes o independientes (en conjunto) lo que es necesario mencionar cuando se trata de la formalización matemática de un experimento aleatorio respectivo.

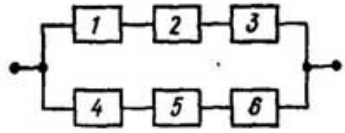
En los problemas siguientes se representan los esquemas de conexión de los elementos que forman un circuito provisto de una sola entrada y una sola salida. Se supone que los fallos de los elementos son sucesos independientes en conjunto. Se considera conocida la fiabilidad p_k del k-ésimo elemento (respectivamente, $q_k = 1 - p_k$ es la probabilidad del fallo del mismo).

El fallo de un elemento cualquiera origina la interrupción de la señal en el ramal del circuito donde se encuentra este elemento. Calcular la fiabilidad p de cada uno de los esquemas.

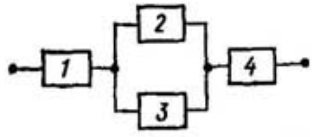
1.163.



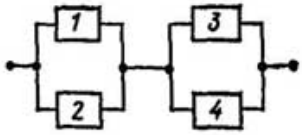
1.164.



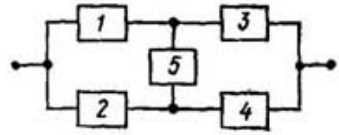
1.165.



1.166.



1.167.



1.168*. En una taquilla quedan para cierto instante los billetes siguientes: 1 billete del Teatro de Variedades, 2 billetes del Teatro de Drama y 3 billetes del Teatro de Comedia. Cada comprador de turno adquiere sólo un billete de uno de los teatros indicados, con igual probabilidad. Tres personas de la cola formada han adquirido consecutivamente billetes. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {han sido comprados billetes de diferentes teatros}, B = {han sido comprados billetes de un teatro cualquiera}, C = {han sido vendidos todos los billetes del Teatro de Drama} D = {al menos dos veces seguidas han sido comprados los billetes del Teatro de Comedia}, E = {un billete del Teatro de Comedia ha sido comprado antes que el del Teatro de Variedades}.

1.169. La probabilidad de que falle un aparato después de emplearse k veces es igual a p (k). Se sabe que, empleado las primeras m veces, el aparato no ha fallado. ¿Cuál es la probabilidad de que al emplearse n veces siguientes el aparato falle?

1.170. En una estación de servicio técnico se encuentran tres automóviles con motores defectuosos. En cada uno de los automóviles puede ser revelado: con probabilidad p_1,

un defecto en el sistema de encendido; con probabilidad p_2, un defecto en el mecanismo de distribución de gases y con probabilidad $p_3 = 1 - p_1 - p_2$, un defecto en cualquiera de los demás sistemas del motor (se excluye la posibilidad de que haya defectos simultáneamente en varios sistemas). Si se detecta un defecto en el sistema de encendido, entonces con probabilidad p_{11} este desperfecto se eliminará *in situ* durante una jornada y con probabilidad $1 - p_{11}$ hará falta reemplazar conjuntos y realizar una regulación esmerada para lo cual se necesitan dos jornadas. Para los defectos descubiertos en el mecanismo de distribución de gases las probabilidades respectivas son iguales a p_{22} y $1 - p_{22}$. Al localizar un defecto en cualquiera de los demás sistemas, el automóvil se somete a una reparación que dura tres jornadas, por lo menos. Todos los tres automóviles son servidos simultáneamente en la estación. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {al fin de la jornada todos los tres automóviles estarán reparados}, B = {para reparar al menos un automóvil se necesitan más de dos jornadas}, C = {pasados dos días, se ha reparado un automóvil, exactamente}.

1.171. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.170, se produce el suceso C. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya eliminado el desperfecto en el sistema de encendido?

1.172. Ocurre el combate aéreo entre un bombardero y dos cazas que lo atacan. En cada uno de los aviones hay una reserva de combate constituida por dos cohetes aire—aire. El combate se desenvuelve en dos etapas. El primero en abrir fuego es el bombardero que escoge al azar uno de los cazas y lo destruye por un cohete con probabilidad p_1. Luego entran en el combate los cazas: si el caza dado queda intacto, entonces, independientemente de la suerte del otro caza, lanza un cohete y derriba el bombardero con probabilidad p_2. Si el bombardero no ha sido abatido, comienza la segunda etapa del combate en la cual el primero en abrir fuego vuelve a ser el bombardero que lanza su último cohete. El combate termina si ha sido derribado el bombardero o han sido derribados ambos cazas o se ha gastado toda la reserva de cohetes. Hallar la probabilidad de los sucesos siguientes: A = {en el combate será abatido el bombardero}, B = {serán abatidos ambos cazas}, C = {será abatido al menos un caza}, D = {será abatido un avión, como mínimo},

E = {será abatido exactamente un avión}, F = {todos los aviones quedarán intactos}.

1.173. En un lapso una ameba puede morir con probabilidad 1/4, sobrevivir con probabilidad 1/4 y dividirse en dos partes con probabilidad 1/2. Durante el siguiente lapso de igual duración con cada ameba, independientemente de su «origen», ocurre lo mismo. ¿Cuántas amebas y con qué probabilidades pueden existir al fin del segundo intervalo de tiempo?

1.174*) n números 1, 2, . . ., n se escriben cada uno en una ficha suelta, todas las fichas se colocan en una caja y se mezclan con esmero. Luego de la caja se extraen sucesivamente todas las n fichas sin volver a meterlas en la caja y cada vez se registran el número escrito en la ficha y el número de orden de la extracción dada. Hallar la probabilidad de que al menos una vez el número escrito en la ficha coincida con el número de orden de la extracción de esta última.

9. Fórmula de la probabilidad total. Sean $H_1, H_2, \ldots, H_n$ los sucesos observables para el experimento dado y el sistema de conjuntos $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ forma una partición del conjunto Ω. Para cualquier suceso A observable en el experimento tiene lugar la siguiente *fórmula de la probabilidad total*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A/H_k). \qquad (14)$$

Los sucesos H_k suelen llamarse *hipótesis* con respecto al suceso A. Las probabilidades incondicionales $\mathbf{P}(H_k)$ se tratan como probabilidades *a priori* de las hipótesis. No toda partición del conjunto Ω puede considerarse como una colección acertada de hipótesis para calcular la probabilidad del suceso que nos interesa. Por ejemplo, la colección de sucesos $\{H, \overline{H}\}$, donde H ($H \neq \varnothing$ y $H \neq \Omega$) es un suceso observable arbitrario que a ciencia cierta es partición del conjunto Ω. Sin embargo, si la dependencia del suceso A de las hipótesis H_k no es clara y las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(A/H_k)$ no pueden ser calculadas con suficiente sencillez, semejante partición no será prácticamente útil para la resolución de un problema.

EJEMPLO 22. De una baraja completa de 52 naipes se eligen al azar dos naipes sin volver a meterlos en la baraja. ¿Cuál es la probabilidad de que con el segundo naipe se pueda matar el primero? (Esto quiere decir que el segundo naipe debe ser superior y del mismo palo que el primero.)

◀ Sea A el suceso que nos interesa. En calidad de la primera prueba escojamos las hipótesis siguientes: H_k = {en la composición de dos naipes sacados hay k figuras, exactamente}, $k = 0, 1, 2$ (forman parte de las «figuras» el valet, dama, rey y as de cada palo).

Es claro que $\{H_k\}$ $(k = 0, 1, 2)$ es partición del conjunto Ω, ya que están cumplidas todas las tres condiciones formuladas en la definición de la partición del conjunto (compruébeselo). Además, no es difícil calcular las probabilidades incondicionales de las hipótesis $\mathbf{P}(H_k)$.

No obstante, la calculación de las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(A/H_k)$ resulta no menos difícil que dar la respuesta a la pregunta inicialmente puesta sobre la probabilidad del suceso $\mathbf{P}(A)$. Esto se explica por el hecho de que la ligazón del suceso A con las hipótesis dadas H_k no puede ser descrita con suficiente sencillez en el lenguaje de operaciones algebraicas.

Examinemos otra variante de partición, que es más acertada para la resolución del problema, $\{H_k\}$ $(k = 2, 3, \ldots, 14)$, donde H_k = {el primer naipe sacado tiene el valor de k puntos}, en este caso al valor $k = 2$ le corresponde el dos, a $k = 3$ le corresponde el tres, . . ., a $k = 11$, el valet; a $k = 12$, la dama; a $k = 13$, el rey y a $k = 14$, el as. Calculemos las probabilidades condicionales, aplicando el método del experimento auxiliar.

$\mathbf{P}(A/H_k) = \mathbf{P}$ {el segundo naipe sacado es del mismo palo y su valor es no menos que $k + 1$ puntos} $= \dfrac{14 - k}{51}$ en virtud de la fórmula de la probabilidad clásica. Las probabilidades incondicionales de las hipótesis $\mathbf{P}(H_k) = \dfrac{1}{13}$ en virtud de la equiprobabilidad de los sucesos H_k = {sacar un naipe de palo arbitrario cuyo valor es k puntos}. Utilizando la fórmula de la probabilidad total (14), obtenemos

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=2}^{14} \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A/H_k) = \frac{1}{13} \sum_{k=2}^{14} \frac{14-k}{51} = \frac{2}{17}.$$

Un método de resolución todavía más simple se obtiene si se introduce en el experimento dado la siguiente partición del conjunto Ω: $\{H_k\}$ $(k = 1, 2)$, donde H_1 = {ambos naipes sacados son de un mismo palo}, H_2 = {dos naipes sacados son de diferentes palos}. Es evidente que $\mathbf{P}(A/H_2) = 0$, por eso la segunda hipótesis se excluye de la fórmula de la probabilidad total y $\mathbf{P}(H_1) = \dfrac{12}{51} = \dfrac{4}{17}$ (el primer naipe puede ser de un palo arbitrario, el segundo naipe debe ser del mismo palo que el primero). Supongamos ahora que se ha producido el suceso H_1, o sea, ambos naipes sacados son de igual palo. Entonces el segundo naipe extraído debe ser superior que el primero. Pero en virtud de la equiprobabilidad de los casos ω_1 = {el segundo naipe es superior que el primero} y ω_2 = {el primer naipe es superior que el segundo} en este experimento auxiliar obtenemos $\mathbf{P}(A/H_1) = 0{,}5$, por eso

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A/H_1) = \frac{4}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{17}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 23. Una partida de transistores, entre los cuales le 10% son defectuosos, se somete a un control. El esquema de control es el siguiente: con probabilidad de 0,95 se revela un defecto (si éste existe) y hay una probabilidad no nula igual a 0,03 de que un tran-

sistor en buen estado está reconocido defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que un transistor escogido al azar de la partida esté reconocido defectuoso?

◀ De los datos del problema es evidente que con el suceso en cuestión A = {un transistor escogido al azar está reconocido defectuoso} tienen una ligazón estrecha dos hipótesis: H_1 = {el transistor que se somete al control es defectuoso}, $H_2 = \overline{H_1}$ = {el transistor que se somete al control está en buen estado}. Las probabilidades incondicionales a priori de estas hipótesis se calculan fácilmente con ayuda de la fórmula clásica: $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}1$, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}9$. Las probabilidades condicionales están determinadas en los datos del problema: $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}95$, $\mathrm{P}(A/H_2) = 0{,}03$. Aplicando la fórmula de la probabilidad total (14), obtenemos

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122. \blacktriangleright$$

1.175. Un aparato instalado a bordo de un avión puede funcionar a dos regímenes: en condiciones del vuelo de crucero normal y en condiciones de una sobrecarga durante el despegue y el aterrizaje. El régimen de vuelo en crucero ocupa el 80% de todo el tiempo de vuelo y las condiciones de sobrecarga, el 20%. La probabilidad de que el aparato falle durante el vuelo en el régimen normal es igual a 0,1 y de que falle en las condiciones de sobrecarga, 0,4. Determinar la fiabilidad del aparato en el transcurso del vuelo.

1.176. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema 1.148 calcular la probabilidad del siguiente suceso C = {se transmiten con igual probabilidad dos símbolos iguales (11 ó 00) y se reciben dos símbolos iguales}.

1.177. Se producen n disparos independientes con proyectiles incendiarios contra un depósito de combustible. Cada proyectil alcanza el depósito con una probabilidad p. Si un proyectil da en el depósito el combustible se inflama con la probabilidad p_1 y si dos proyectiles dan en el mismo, el combustible se inflama con certeza completa. Hallar la probabilidad de que el combustible se inflame al producirse n disparos.

1.178. Supongamos que para dos sucesos A y B observables en el experimento se cumplen las condiciones $A \neq \Omega$, $A \neq \varnothing$, $\mathrm{P}(A) > 0$, $\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B/\overline{A})$. Mostrar que los sucesos A y B son independientes.

1.179. En un tablero de ajedrez se ponen al azar dos alfiles: blanco y negro. ¿Cuál es la probabilidad que los alfiles capten uno al otro?

1.180. Están en venta los televisores hechos por tres fábricas. La primera fábrica suministra el 20% de los televisores con un defecto encubierto; la segunda, el 10% y la tercera, el 5%. ¿Cuál es la probabilidad de adquirir un televisor en buen estado si en el almacén hay un 30% de los televisores producidos por la primera fábrica; un 20%, por la segunda y un 50%, por la tercera?

1.181. En un cajón hay 20 pelotas de tenis entre las cuales 15 son nuevas y 5 usadas. Para el juego se escogen al azar dos pelotas que, una vez terminado el juego, vuelven a meterse en el cajón. Luego para un otro juego se extraen dos pelotas una vez más. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo juego se lleve a cabo con pelotas nuevas?

1.182. Tres tiradores cuyas probabilidades de dar en un blanco son, en las condiciones invariables, constantes e iguales a $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}6$, respectivamente, producen un disparo cada uno contra el mismo blanco. Calcular la probabilidad del suceso A = {en el blanco habrán dos agujeros, exactamente}, tomando en calidad de las hipótesis los casos elementales del experimento dado.

1.183. Entre diez estudiantes que han venido a rendir los exámenes de teoría de las probabilidades y han tomado las papeletas Ivanov y Petrov conocen 20 papeletas de 30, Sídorov estudió mal todo el semestre y ha preparado las respuestas sólo para 15 papeletas, los demás estudiantes conocen todas las 30 papeletas. Pasado el tiempo destinado para la preparación, el examinador llama al azar a uno de los estudiantes para que éste responda. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante llamado pase el examen si el conocimiento de una papeleta garantiza el éxito con la probabilidad de 0,85 y en el caso contrario el éxito tiene lugar sólo con la probabilidad de 0,1?

1.184. En la primera urna hay 6 bolas blancas y 4 negras y en la segunda, 3 bolas blancas y 2 negras. De la primera urna se sacan al azar simultáneamente 3 bolas y las bolas de un mismo color, que son en la mayoría, se meten en la segunda urna y se mezclan con esmero. Luego de la segunda urna se extrae a la suerte una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que esta bola sea blanca?

1.185. Dos talleres producen las piezas del mismo tipo. El primer taller da $\alpha\%$ de los artículos defectuosos y el segundo, $\beta\%$. Para el control están escogidas n_1 piezas fabricadas en el primer taller y n_2 piezas fabricadas en el se-

gundo. Estas $n_1 + n_2$ piezas se mezclan formando una partida y de ésta se extrae al azar una pieza. ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza sacada sea defectuosa?

1.186*. Cada uno de tres tiradores produce un disparo contra tres blancos fugaces, escogiendo un blanco al azar e independientemente de los demás tiradores. La probabilidad de dar en el blanco, efectuando un solo disparo, para todos los tiradores es la misma y vale p. Determinar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$exactamente en uno de los blancos no habrá ningún agujero$\}$, $B = \{$en cada uno de los blancos habrá al menos un agujero$\}$, $C = \{$todos los tres agujeros aparecerán en el mismo blanco$\}$.

1.187*. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el problema precedente, la probabilidad de acertar el blanco, efectuando un disparo, no es una misma para los tiradores y vale p_1, p_2 y p_3, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de los mismos sucesos A, B y C en esta ocasión?

1.188*. Para buscar un yacimiento de petróleo en el territorio dado se forman n grupos de exploración geológica cada uno de los cuales, independientemente de los demás, descubre un aluvial de petróleo con la probabilidad p. Una vez tratados y analizados los registros sismográficos, todo el territorio se divide en dos regiones. En la primera región el petróleo puede yacer con la probabilidad p_1 y en la segunda, con la probabilidad $1 - p_1$. ¿Cómo conviene distribuir n grupos de exploración geológica en dos regiones para que la probabilidad de descubrir el petróleo sea máxima?

1.189*. En una urna hay 7 bolas blancas y 3 negras. Tres jugadores extraen por turno una bola cada uno, marcan el color de la bola sacada y vuelven a meterla en la urna. El que primero saque una bola negra, gana. Hallar la probabilidad del éxito para cada uno de los jugadores si el juego puede continuar ilimitadamente.

1.190. Uno de los estudiantes que ha venido a rendir el examen de teoría de las probabilidades faltaba frecuentemente a los seminarios y no ha aprendido a resolver correctamente los problemas dedicados al tema de probabilidades de los sucesos compuestos. Para el examen este estudiante ha preparado sólo 10 papeletas de 25 y razonaba así: puesto que desconoce la mayoría de las papeletas, para au-

mentar la posibilidad del éxito, debe dejar pasar primero a k estudiantes ($k \leqslant 25$) y luego sacar una papeleta. Cierto tiempo el estudiante queda meditando cómo hallar tal valor del número k con el cual la probabilidad de rendir el examen sea máxima, pero pronto comprende que no tiene conocimientos suficientes para resolver este problema.

a) Hallar el valor de la probabilidad a priori p_k de que el estudiante saque una papeleta que conoce si se encuentra cerca de la mesa de exámenes el $(k+1)$-ésimo según el orden ($k = 0, 1, 2, 3$).

b)* Demostrar que en el experimento dado la respuesta no depende de k.

10. Fórmula de Bayes. Sea $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ la partición del conjunto Ω para el experimento dado la cual se interpreta como colección de hipótesis con respecto al suceso A que nos interesa. Supongamos que el experimento ha sido realizado y llega a ser conocido que el suceso A se ha producido. ¿Cuál es la probabilidad *a posteriori* de que se realice la hipótesis H_k a condición de que el suceso A haya tenido lugar? La respuesta se da por la *fórmula de Bayes*:

$$\mathbf{P}(H_k/A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A/H_k)}{\mathbf{P}(A)}, \qquad (15)$$

donde $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A/H_i)$ es la probabilidad total de que se produzca el suceso A.

La fórmula de Bayes permite «revalorizar» la probabilidad de cada una de las hipótesis después de que llegue una nueva «información» respecto a la aparición de unos u otros sucesos observables.

EJEMPLO 24. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el ejemplo 23, un transistor escogido al azar de la partida se reconoce defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que en realidad el transistor esté en buen estado?

◀ En las designaciones del ejemplo 23 se necesita hallar $\mathbf{P}(H_2/A)$ (probabilidad condicional a posteriori de la hipótesis H_2). De acuerdo con la fórmula de Bayes

$$\mathbf{P}(H_2/A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\,\mathbf{P}(A/H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} \approx 0{,}221.$$

Ahora bien, la probabilidad condicional a posteriori de que en realidad el transistor esté en buen estado si se sabe que ha sido reconocido defectuoso es considerablemente menor que la probabilidad a priori H_2 lo que es consecuencia de la información suministrada. ▶

La fórmula de Bayes tiene una importancia especial para los experimentos en los cuales las hipótesis H_k no son observables directamente, aunque las probabilidades a priori $\mathbf{P}(H_k)$ y las probabilidades condicionales correspondientes $\mathbf{P}(A/H_k)$, $k = 1, \ldots, n$, son conocidas a partir de las pruebas adicionales. Semejante situación puede

tener lugar, por ejemplo, si falta un aparato que permita registrar la realización de las hipótesis dadas o si el empleo del aparato para registrar la realización de las hipótesis origina la destrucción del objeto de observación (control destructivo). Para semejantes experimentos la revalorización de las probabilidades de las hipótesis después de la prueba puede ser efectuada sobre la base del experimento observable A, vinculado estrechamente con las hipótesis. Tal enfoque se utiliza frecuentemente en los problemas de diagnosis médica o técnica.

EJEMPLO 25. Se estudian tres tipos de defectos de las memorias montadas sobre los circuitos integrados: defectos de los circuitos de encuadración (hipótesis H_1, $\mathbf{P}(H_1) = 0{,}1$), defectos provocados por acoplamientos parásitos entre las células (hipótesis H_2, $\mathbf{P}(H_2) = 0{,}6$) y defectos de las barras de dirección (hipótesis H_3, $\mathbf{P}(H_3) = 0{,}3$). La diagnosis de las memorias se lleva a cabo con ayuda de una colección de tests T_1, T_2, . . ., T_n cada uno de los cuales comprueba un estado determinado de la célula de la memoria. El resultado observable es el estado de la célula escogida respecto a cada test. Supongamos que la diagnosis se ha realizado y se ha observado cierto resultado (se ha producido el suceso A). Antes de la prueba es sabido que

$$\mathbf{P}(A/H_1) = 0{,}4 \quad \mathbf{P}(A/H_2) = 0{,}2, \quad \mathbf{P}(A/H_3) = 0{,}3.$$

Determinar qué hipótesis tiene la máxima probabilidad a posteriori (o sea, qué defecto es el más probable).

◀ Primeramente calculemos la probabilidad total de que se produzca el suceso A. Utilizando los datos del problema y aplicando la fórmula (14), obtenemos

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(H_k)\,\mathbf{P}(A/H_k) = 0{,}25.$$

Para contestar a la pregunta qué defecto tiene la máxima probabilidad a posteriori, notemos que en el numerador de la fórmula de Bayes está el sumando de la probabilidad total el cual se refiere a la hipótesis dada que se revaloriza. Comparando estos tres sumandos para tres hipótesis en cuestión, obtenemos que la máxima probabilidad la tiene la hipótesis H_2: $\mathbf{P}(H_2/A) = \dfrac{0{,}12}{0{,}25} = 0{,}48$.

1.191. En una urna hay una bola de color desconocido, o sea, la cual puede ser blanca o negra con igual probabilidad. En la urna se mete una bola blanca y, después de realizar con esmero el mezclado, se extrae una bola. Es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna haya quedado una bola blanca?

1.192. Quedando válidas las condiciones del experimento descrito en el ejemplo 16, determinar la probabilidad condicional $\mathbf{P}(A/B)$, suponiendo conocida la probabilidad condicional $\mathbf{P}(B/A)$ y utilizando la fórmula de Bayes.

1.193. Se somete al control técnico una partida de n artículos entre los cuales con igual probabilidad pueden ha-

ber 0, 1, 2, . . ., m ($m < n$) defectuosos. Un artículo que se toma al azar para el control es bueno. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: S_k = {en la partida hay k artículos defectuosos, exactamente}, S = {el número de artículos defectuosos en la partida es menor que m}.

1.194. Los aparatos de un mismo tipo se producen por tres fábricas en la razón cuantitativa n_1: n_2: n_3 y las probabilidades de expedir artículos defectuosos para estas fábricas son iguales a p_1, p_2 y p_3, respectivamente. Un aparato adquirido por el instituto de investigación científica es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato dado se haya producido por la primera fábrica (en el aparato no hay una marca de fábrica)?

1.195. En una caja hay dos dados indistinguibles en aspecto exterior y peso: un dado es perfecto y al lanzarlo al azar, las probabilidades de que salga cualquiera de las seis cifras son iguales; el otro dado no es perfecto y la masa del dado no está distribuida uniformemente en su volumen. Al arrojar a la suerte el dado no perfecto el seis aparece con la probabilidad igual a 1/3, el uno, con la probabilidad igual a 1/9 y las demás cifras salen con igual probabilidad. Un dado extraído a la ventura de la caja se lanza y como resultado salen k puntos. Hallar la probabilidad p_k de que haya sido lanzado el dado perfecto si: a) $k = 1$, b) $k = 6$, c) $k = 5$.

1.196. A la entrada de un radar se suministra, con la probabilidad igual a 0,8, una mezcla de la señal útil con el ruido y con la probabilidad igual a 0,2, sólo el ruido. Si llega la señal útil junto con el ruido, el radar registra la presencia de cualquier señal con la probabilidad 0,7; si llega sólo el ruido, con la probabilidad 0,3. Se sabe que el radar ha registrado la presencia de una señal cualquiera. Hallar la probabilidad de que en su composición haya una señal útil.

1.197. Supongamos que la fiabilidad de determinar la tuberculosis con ayuda de la radiografía del tórax constituya el 90% (o sea, el 10% de los tuberculosos quedan no identificados). La probabilidad de que un individuo sano quede reconocido equívocamente tuberculoso constituye el 1%. Se somete a la radiografía un gran grupo de individuos en el cual el porcentaje medio de los enfermos es igual a 0,1. ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo reconocido enfermo sea de hecho tuberculoso?

1.198. Un aparato consta de dos conjuntos conectados en serie. La fiabilidad (la probabilidad del funcionamiento

irreprochable durante el tiempo T) del primer conjunto es igual a 0,9 y la del segundo, a 0,8. Al ensayar el aparato en el transcurso del tiempo T se ha registrado un fallo del mismo. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A_1 = {ha fallado sólo el primer conjunto}, A_2 = {han fallado ambos conjuntos}.

1.199*. Un blanco contra el cual se efectúa el tiro consta de dos partes de vulnerabilidad diferente. Para destruir el blanco es suficiente alcanzar una vez la primera parte o dos veces la segunda. Si el proyectil da en el blanco, la probabilidad de que haya alcanzado la primera parte es igual a 0,4 y de que haya alcanzado la segunda parte, a 0,6. Sobre el blanco se han producido tres disparos independientes con la probabilidad de alcanzarlo igual a 0,7 para cada disparo y como resultado el blanco queda destruido. ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco haya sido destruido sólo debido a los impactos hechos en la segunda parte del blanco?

1.200. Una batería antitanque se compone de 10 cañones y para el primer grupo de seis cañones las probabilidades de que al producir un disparo ocurra un impacto corto, un impacto bueno o un impacto largo son iguales a 0,1; 0,7 y 0,2, respectivamente. Para cada uno de los demás cuatro cañones quedados las probabilidades de los sucesos indicados son iguales a 0,2; 0,6 y 0,2, respectivamente. Un cañón escogido a la ventura produce tres disparos sobre un blanco y como resultado se observan un impacto bueno, un impacto corto y un impacto largo. ¿Cuál es la probabilidad de que el cañón en cuestión pertenezca al primer grupo?

1.201. Una partida de transistores entre los cuales $\alpha\%$ son defectuosos se somete al control. El esquema del control es tal que con la probabilidad p se revela un defecto (si éste existe) y existe una probabilidad no nula q de que un buen transistor quede reconocido defectuoso. Se ensaya un transistor escogido al azar. Las hipótesis son las siguientes: H_1 = {el transistor es bueno}, H_2 = {el transistor tiene un defecto}. El suceso A = {el transistor ha sido reconocido bueno como resultado del control}. Hallar las probabilidades a posteriori de las hipótesis para las condiciones A y $\overline{A}$ y determinar para qué relación entre p y q el esquema del control puede considerarse efectivo (se llama efectivo el esquema de control para el cual $\mathbf{P}(H_1/A) + \mathbf{P}(H_2/\overline{A}) > \mathbf{P}(H_1/\overline{A}) + \mathbf{P}(H_2/A)$).

1.202. Tres tiradores producen un disparo cada uno contra un mismo blanco. Las probabilidades de dar en el blanco con un disparo son iguales a p_1, p_2 y p_3, respectivamente, para cada uno de los tiradores .¿Cuál es la probabilidad de que el segundo tirador falle si después de los disparos en el blanco hay dos agujeros?

1.203. En un grupo de 25 estudiantes que han venido a rendir el examen de teoría de las probabilidades hay 10 sobresalientes, 7 estudiantes preparados bien, 5 estudiantes preparados satisfactoriamente y 3 estudiantes preparados mal. Los sobresalientes conocen las respuestas para todas las 25 preguntas del programa; los preparados bien, para 20 preguntas, los preparados satisfactoriamente, para 15 preguntas y los preparados mal, sólo para 10 preguntas. Un estudiante llamado al azar ha respondido a dos preguntas puestas. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: S_1 = {el estudiante está preparado muy bien o bien}, S_2 = {el estudiante está preparado satisfactoriamente}, S_3 = {el estudiante está preparado mal}.

1.204. Por un canal de telecomunicación se transmite un texto digital que contiene sólo tres cifras 1, 2, 3 que pueden aparecer en el texto con igual probabilidad. Puesto que hay ruidos, cada cifra se recibe correctamente con la probabilidad igual a p y con la probabilidad igual a $\frac{1}{2}(1-p)$ se toma por una otra cifra cualquiera. Se supone que las cifras se distorcionan independientemente. Hallar la probabilidad de que se haya transmitido 111 si se recibe 123.

1.205*. Hay cinco urnas iguales que forman una línea y contienen cada una 4 bolas blancas o negras y en la k-ésima urna hay exactamente $(k-1)$ bolas blancas y $(4-k+1)$ negras.

a) La prueba Nº 1 consiste en lo siguiente. El primer jugador coloca al azar los números de orden de las urnas y pide que el segundo llame a la suerte cualquier número de 1 a 5. El contenido de la urna en cuestión lo conoce el primer jugador y no conoce el segundo. El segundo jugador extrae a la ventura dos bolas de la urna indicada que son blancas. El primer jugador propone que el segundo conteste a la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca de la misma urna en que han quedado dos bolas?

b) La prueba Nº 2 se realiza de un modo análogo a la precedente con la adición siguiente: después de que el segundo

jugador señale al azar el número de orden de la urna, el primero hará la observación tal: «Has escogido la urna en que se contiene al menos una bola blanca». Luego el segundo jugador extrae dos bolas que son blancas. ¿Ha cambiado o no el valor de la probabilidad buscada después de obtener el segundo jugador la información adicional indicada?

§ 2. Variables aleatorias

1. Leyes de distribución y características numéricas de las variables aleatorias. Se llama *variable aleatoria* X la función real $X = X(\omega)$ que está definida sobre el conjunto de casos elementales Ω y es tal que, cualquiera que sea x real, el conjunto de tales ω para los cuales $X(\omega) < x$ pertenece al álgebra de sucesos para el experimento dado.

Las variables aleatorias suelen designarse con letras mayúsculas del alfabeto latino y sus valores posibles, con letras minúsculas correspondientes.

De la definición de la variable aleatoria y de las propiedades del álgebra de sucesos se deduce que para describir todos los sucesos de intervalo relacionados con la variable aleatoria X, o sea, los sucesos $\{X \geqslant x\}$, $\{x_1 \leqslant X < x_2\}$, $\{X < x\}$, es suficiente, cualquiera que sea x real, definir la probabilidad de uno de estos sucesos, por ejemplo, del suceso $\{X < x\}$.

La función $F_X(x)$ de una variable real x, $-\infty < x < \infty$, que se define por la fórmula

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} \tag{1}$$

se denomina *función de distribución* de la variable aleatoria X. La función de distribución posee las propiedades siguientes:

1. $0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$;
2. $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$;
3. $F_X(x)$ es función no decreciente sobre todo el eje;
4. $F_X(x)$ es continua a izquierda, o sea,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F_X(x) = F_X(x_0).$$

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor perteneciente a un intervalo arbitrario del eje real $[x_1, x_2)$ se define por la fórmula

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = F_X(x_2) - F_X(x_1).$$

Se distinguen las variables aleatorias del tipo discreto (abreviadamente V.A.T.D.) y las variables aleatorias del tipo continuo (abreviadamente V.A.T.C.).

La variable aleatoria X se llama *variable aleatoria del tipo discreto* si el conjunto de sus valores posibles $\{x_1, x_2, \ldots\}$ es finito o numerable y $\mathbf{P}\{X = x_k\} = p_k > 0$, $\sum_k p_k = 1$, donde la sumación se extiende a todos los valores posibles de k.

La enumeración de todos los valores posibles de una V.A.T.D.

y de las probabilidades que corresponden a estos valores se denomina *ley de distribución de la variable aleatoria del tipo discreto.*

Conociendo la ley de distribución de una V.A.T.D., se puede calcular la función de distribución que, en virtud de la definición (1), no es más que la función de las probabilidades acumuladas:

$$F_X(x) = \sum_{x_i < x} \mathbf{P}\{X = x_i\},$$

donde la sumación se extiende a todos los valores del índice i para los cuales $x_i < x$. De esta fórmula resulta, en particular, que

$$F_X(x_k + 0) - F_X(x_k) = \mathbf{P}\{X = x_k\}, \quad x_k \in \{x_1, x_2, \ldots\},$$

o sea, la función de distribución de la V.A.T.D. experimenta saltos en los puntos x para los cuales existe una probabilidad positiva del suceso $\{X = x\}$.

Una variable aleatoria X se denomina *variable aleatoria del tipo continuo* (V.A.T.C.,) si existe una función $f_X(x)$ no negativa y integrable según Riemann en los límites infinitos (llamada *densidad de distribución de las probabilidades*) tal que para todos los $x \in \mathbf{R}$

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

La densidad de distribución de las probabilidades posee las propiedades siguientes:

1. $f_X(x) \geqslant 0, \quad -\infty < x < \infty;$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$ (condición de normalización);
3. $\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$ en los puntos de continuidad de la función $f_X(x)$.

La función $F_X(x)$ de distribución de una V.A.T.C. es una función monótona creciente continua sobre todo el eje y

$$\mathbf{P}\{X = x\} = \lim_{\Delta x \to 0} (F_X(x + \Delta x) - F_X(x)) = 0 \text{ para todos los } x \in \mathbf{R}.$$

Esto quiere decir que la probabilidad de «dar en el punto» para la V.A.T.C. es igual a cero.

Si X es una V.A.T.C., entonces la probabilidad de que tome un valor en el intervalo puede ser calculada tanto con ayuda de la función de distribución, valiéndose de la fórmula (2), como con ayuda de la densidad de distribución de las probabilidades:

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\, dx. \tag{3}$$

Además de las leyes de distribución, para la descripción de las variables aleatorias pueden emplearse también *las características numé-*

ricas, entre las cuales se distinguen las *características de posición* (esperanza matemática, moda, mediana, etc.) y las *de dispersión* (varianza, desviación estándar (típica), diferentes momentos de distribución que tienen un orden superior que el primero, etc.).

Se llama *esperanza matemática* (*valor medio de una distribución*) el número real que se define, en función del tipo de una variable aleatoria X, por la fórmula

$$m_X = \mathbf{M}[X] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k p_k, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.} \end{cases} \tag{4}$$

La esperanza matemática existe si la serie (o, respectivamente, la integral) del segundo miembro de la fórmula (4) converge absolutamente.

Se denomina *moda de una variable aleatoria X del tipo continuo* el número real d_X que se define como punto del máximo de la densidad de distribución de las probabilidades $f_X(x)$.

La moda de una variable aleatoria del tipo discreto se define como un valor posible x_m para el cual

$$\mathbf{P}\{X = x_m\} = \max_k \mathbf{P}\{X = x_k\}.$$

Ahora bien, la moda de una V.A.T.D. es su valor más probable en el caso en que tal valor es único. La moda puede no existir, tener el calor único (*distribución unimodal*) o tener un conjunto de valores (*distribución multimodal*).

Se denomina *mediana de una variable aleatoria X del tipo continuo* el número real h_X que satisface la condición

$$\mathbf{P}\{X < h_X\} = \mathbf{P}\{X \geqslant h_X\} \text{ o bien } F_X(x) = \frac{1}{2}.$$

Puesto que la ecuación dada puede tener muchas raíces, la mediana, hablando en general, se determina no unívocamente.

Se llama *varianza de una variable aleatoria X* el número no negativo $\mathbf{D}[X] = D_X$ que se define por la fórmula

$$D_X = \mathbf{M}[(X - m_X)^2] = \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - m_X)^2 p_k, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.} \end{cases}$$

La varianza existe si la serie (o, respectivamente, la integral) del segundo miembro de la igualdad converge. El número no negativo $\sigma_X = \sqrt{D_X}$ se denomina *desviación estándar* de la variable aleatoria X. Tiene la dimensión de la variable aleatoria X y determina cierto intervalo estándar de varianza, simétrico con respecto a la esperanza matemática. (A veces la magnitud σ_X se llama desviación típica.)

Si la magnitud $X = \text{const}$ (o sea, X no es aleatoria), entonces $\mathbf{D}[X] = 0$.

La variable aleatoria X se denomina *centrada* (se designa por $\mathring{X}$), si $m_X = 0$. La variable aleatoria X se llama *estandarizada*, si $m_X = 0$ y $\sigma_X = 1$.

Se llama *momento inicial del m-ésimo orden* ($m = 0, 1, 2, \ldots$) *de distribución de una variable aleatoria* X (si este momento existe) el número real α_m que se determina con ayuda de la fórmula

$$\alpha_m = \mathbf{M}[X^m] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^m p_k, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.} \end{cases}$$

Se denomina *momento central del m-ésimo orden de distribución de una variable aleatoria* X (si este momento existe) el número μ_m que se determina con ayuda de la fórmula

$$\mu_m = \mathbf{M}[(X - m_X)^m] = \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - m_X)^m p_k, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^m f_X(x)\, dx & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.} \end{cases}$$

De las definiciones de los momentos resulta, en particular, que

$$\alpha_0 = \mu_0 = 1, \quad m_X = \alpha_1, \quad D_X = \sigma_X^2 = \mu_2 = \alpha_2 - m_X^2.$$

Obsérvense dos otras características importantes de una distribución, relacionadas con los momentos de orden superior:

$a_X = \dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ (*coeficiente de asimertía* de una distribución),

$e_X = \dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3$ (*coeficiente de exceso* de una distribución).

Se llama *cuantil de orden p* (*cuantil simétrico de orden p*) de distribución de una variable aleatoria X del tipo continuo el número real t_p (número real $\hat{t}_p$) que satisface la ecuación

$$\mathbf{P}\{X < t_p\} = p \quad (\mathbf{P}\{|X| < \hat{t}_p\} = p).$$

En particular, de la definición de la mediana se deduce que

$$h_X = t_{0.5}.$$

Se denomina *punto crítico de orden p* (*punto crítico simétrico de orden p*) de distribución de una variable aleatoria X del tipo continuo el número real $\varkappa_p$ ($\hat{\varkappa}_p$) que satisface la ecuación

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \varkappa_p\} = p \quad (\mathbf{P}\{|X| \geqslant \hat{\varkappa}_p\} = p).$$

El cuantil y el punto crítico de una misma distribución están ligados por una relación simple:

$$x_p = t_{1-p} \quad (\hat{x}_p = \hat{t}_{1-p}).$$

EJEMPLO 1. El blanco consta de tres partes que tienen diferente vulnerabilidad. Si un proyectil acierta al blanco, la probabilidad de que dé en la primera parte es igual a p_1 y las probabilidades de que dé en la segunda y tercera partes son las mismas y valen p_2 ($p_1 + 2p_2 = 1$). Las condiciones del tiro son las siguientes: se excluye que hagan blanco simultáneamente dos o más proyectiles y el hecho de que proyectiles sueltos den en una u otra parte del blanco son sucesos independientes en conjunto. Para batir el blanco es suficiente hacer un impacto en la primera parte o un impacto en la segunda y un impacto en la tercera parte del blanco. Sea X el número de proyectiles cuyos impactos en el blanco originan la destrucción del mismo, mientras que para un número menor de impactos el blanco se considera todavía no destruido. Describir la ley de distribución de la variable aleatoria dada y calcular la función de distribución y las características numéricas: m_X, D_X y d_X.

◀ Es evidente que X es una V.A.T.D. y sus valores posibles son números naturales (o sea, $x \in \mathbb{N}$). Para calcular las probabilidades de los sucesos $\{X = n\}$ hagamos uso del hecho de que la función aleatoria X es la función definida sobre el conjunto de casos elementales del experimento aleatorio. En el caso en cuestión el conjunto numerable de casos elementales se puede representar del modo siguiente:

$$\Omega = \{\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}; \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \ldots, \omega_9^{(2)}; \ldots$$

$$\ldots; \omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \ldots \omega_{3^n}^{(n)}; \ldots\}.$$

Aquí en designaciones de los casos elementales el índice superior (n) de cada grupo de casos muestra el número de proyectiles que han acertado al blanco y el inferior, o sea 1, 2, . . ., 3^n, numera posibles distribuciones de impactos de los proyectiles en las tres partes del blanco (variaciones con repetición; véase § 1, p. 5).

Examinemos la sucesión de ensayos cada uno de los cuales es el impacto de un proyectil de turno en el blanco. Designemos los casos elementales de estos ensayos con $C_i^{(j)}$ = {el j-ésimo proyectil que alcanza el blanco hace impacto en la i-ésima parte}.

Utilizando el concepto de producto directo de los conjuntos para describir la sucesión de ensayos (véase la pág. 19), expresemos los casos elementales del experimento por medio de los sucesos $C_i^{(j)}$. Por ejemplo, pongamos

$$\omega_i^{(1)} = C_i^{(1)}, \; i = 1, 2, 3; \; \omega_1^{(2)} = C_1^{(1)} C_1^{(2)},$$

$$\omega_2^{(2)} = C_1^{(1)} C_2^{(2)}, \; \omega_3^{(2)} = C_1^{(1)} C_3^{(2)}, \; \ldots, \; \omega_3^{(2)} = C_3^{(1)} C_3^{(2)}, \text{ etc.}$$

Supongamos que un proyectil alcanza el blanco, o sea, se produce uno de los casos $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ o $C_3^{(1)}$. Entre estos casos es sólo uno que favorece la destrucción del blanco, precisamente, $\{X = 1\} = C_1^{(1)}$

según la condición que determina esta destrucción. De aquí

$$\mathbf{P}\{X=1\}=\mathbf{P}\,(C_1^{(1)})=p_1.$$

Si dos proyectiles alcanzan en blanco, entonces el suceso $\{X=2\}$ es favorecido por aquellos de los casos $\omega_i^{(2)}$ para los cuales la destrucción del blanco ocurre sólo al hacer impacto el segundo proyectil, por eso

$$\{X=2\}=(C_2^{(1)}+C_3^{(1)})\,C_1^{(2)}+C_2^{(1)}C_3^{(2)}+C_3^{(1)}C_2^{(2)}.$$

Utilizando la incompatibilidad de los sucesos que se suman, así como la independencia de los sucesos $C_i^{(1)}$ y $C_j^{(2)}$ para cualesquiera i y j (lo que se ha determinado por las condiciones del experimento), y aplicando el axioma de sumación y la fórmula de multiplicación de las probabilidades, obtenemos

$$\mathbf{P}\,\{X=2\}=2p_1p_2+2p_2^2=2p_2\,(1-p_2)$$

en virtud de la condición de normalización de las probabilidades condicionales: $p_1+2p_2=1$.

Por los razonamientos análogos se determina que para $n\geqslant 2$ el suceso $\{X=n\}$ puede ser escrito en el álgebra de sucesos $C_i^{(j)}$ así:

$$\{X=n\}=C_2^{(1)}C_2^{(2)}\ \ldots\ C_2^{(n-1)}\,(C_1^{(n)}+C_3^{(n)})+$$
$$+C_3^{(1)}C_3^{(2)}\ \ldots\ C_3^{(n-1)}\,(C_1^{(n)}+C_2^{(n)}),$$

de donde resulta que

$$\mathbf{P}\,\{X=n\}=2p_2^{n-1}\,(p_1+p_2)=2p_2^{n-1}\,(1-p_2),\ n\geqslant 2.$$

Comprobemos la condición de normalización:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\,\{X=n\}=p_1+\sum_{n=2}^{\infty}2p_2^{n-1}\,(1-p_2)=$$

$$=p_1+2\,(1-p_2)\,\frac{p_2}{1-p_2}=p_1+2p_2=1.$$

Para mayor evidencia la ley de distribución de la variable aleatoria X puede ser representada por la tabla siguiente:

x_i	1	2	...	n	...
$\mathbf{P}\{X=x_i\}$	$p_1=1-2p_2$	$2p_2\,(1-p_2)$	...	$2p_2^{n-1}\,(1-p_2)$	...

Calculemos la función de distribución. Por definición,

$$F_X(x)=\mathbf{P}\{X<x\}=\sum_{\substack{k\\ x_k<x}}\mathbf{P}\{X=x_k\}=\sum_{\substack{k\\ k<x}}\mathbf{P}\,\{X=k\}.$$

Sustituyendo aquí las probabilidades encontradas anteriormente y utilizando la fórmula de suma de los términos de la progresión geométrica

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} p^k = \frac{1-p^{n+1}}{1-p},$$

hallamos

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ p_1, & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} 2(1-p_2)\, p_2^{k-1} = 1 - 2p_2^n, & \text{si } n \leqslant x < n+1. \end{cases}$$

Para el experimento dado se puede calcular la función de distribución de la variable aleatoria X, valiéndose de un método más simple. Es evidente que para $n \geqslant 1$

$\mathbf{P}\{X \geqslant n+1\} = \mathbf{P}$ {ninguno de n proyectiles que alcanzan el blanco causa la destrucción del mismo} $= \mathbf{P}$ {todos los n proyectiles hacen impacto en la segunda parte del blanco} $+$ $+ \mathbf{P}$ {todos los n proyectiles hacen impacto en la tercera parte del blanco} $= 2p_2^n$.

Por otro lado,

$$\mathbf{P}\{X \geqslant n+1\} = 1 - F_X(n+1),$$

por eso

$$F_X(n+1) = 1 - 2p_2^n \quad \text{para } n \geqslant 1.$$

Teniendo en cuenta que para $x < 1$ tenemos $F_X(x) = F_X(1) = \mathbf{P}\{X < 1\} = 0$ y que $F_X(x)$ conserva el valor constante en un semiintervalo cualquiera de forma $n \leqslant x < n+1$ $(n \in \mathbb{N})$, obtenemos la expresión para $F_X(x)$ escrita anteriormente.

A su vez, por la función conocida de distribución se puede volver a hallar la ley de distribución de una variable aleatoria del tipo discreto, utilizando para cada valor posible $x_n = n$ de la variable aleatoria X la fórmula que determina el salto de la función de distribución (véase la pág. 72):

$$\mathbf{P}\{X = x_n = n\} = F_X(n+0) - F_X(n) = F_X(n+1) - F_X(n) =]$$

$$= \begin{cases} p_1, & \text{si } n = 1, \\ (1-p_2)\cdot 2p_2^{n-1}, & \text{si } n \geqslant 2, \end{cases}$$

o sea, tenemos los resultados obtenidos anteriormente.

Hallemos el valor medio m_X y la varianza D_X de la distribución dada. Según la definición de la esperanza matemática de una V.A.T.D.

$$m_X = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}\{X = n\} = p_1 + 2(1-p_2) \sum_{n=2}^{\infty} np_2^{n-1} =$$

$$= -1 + 2(1-p_2) \sum_{n=1}^{\infty} np_2^{n-1}.$$

Designemos

$$S(p)=\sum_{n=0}^{\infty} p^n=\frac{1}{1-p};$$

entonces podemos escribir

$$m_X=-1+2(1-p_2)\frac{dS(p)}{dp}\Big|_{p=p_2}=-1+\frac{2}{1-p_2}.$$

Ahora bien, si, por ejemplo, $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}4$, entonces para destruir el blanco dado son suficientes, por término medio, 2,33 proyectiles.

Es más cómodo calcular la varianza mediante el segundo momento inicial, utilizando la fórmula (véase el problema 2.2)

$$D_X=\alpha_2-m_X^2.$$

Tenemos

$$\alpha_2=\sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbf{P}\{X=n\}=p_1+2(1-p_2)\sum_{n=2}^{\infty} n^2p_2^{n-1}=$$

$$=-1+2(1-p_2)\sum_{n=1}^{\infty} n^2p_2^{n-1}.$$

Obsérvese que

$$S''(p)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p^{n-2}=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} n^2p^{n-1}-\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1}.$$

De aquí

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2p^{n-1}=pS''(p)+S'(p),$$

por consiguiente,

$$\alpha_2=1+2(1-p_2)(p_2S''(p_2)+S'(p_2))=-1+\frac{2(1+p_2)}{(1-p_2)^2}$$

y, por lo tanto,

$$D_X=-1+\frac{2(1+p_2)}{(1-p_2)^2}-\left(\frac{2}{1-p_2}-1\right)^2=\frac{2p_2}{1-p_2}.$$

La moda d_X de la distribución dada depende del valor numérico de la probabilidad p_2. Nótese, ante todo, que para $n\geqslant 2$

$$\mathbf{P}\{X=n+1\}=p_2\mathbf{P}\{X=n\}<\mathbf{P}\{X=n\}.$$

Por eso $d_X=1$, si $\mathbf{P}\{X=1\}>\mathbf{P}\{X=2\}$ o bien $d_X=2$ si se cumple la desigualdad contraria. Resolviendo la desigualdad $1-2p_2>2p_2(1-p_2)$ y teniendo en cuenta que en virtud de la condición de normalización $p_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_1<1$, obtenemos el resultado

siguiente:

$$d_X=\begin{cases}1, & \text{si } 0<p_2<1-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ 2, & \text{si } 1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<p_2<0.5,\\ \{1,\ 2\}, & \text{si } p_2=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \blacktriangleright\end{cases}$$

EJEMPLO 2. Una variable aleatoria X se subordina a la *ley de distribución de Pareto* con parámetros $a>0$ y $x_0>0$ si es V.A.T.C. y su función de distribución de las probabilidades tiene la forma

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant x_0,\\ 1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^a, & \text{si } x>x_0.\end{cases}$$

Hallar las características principales m_X, D_X, h_X y d_X de la distribución de Pareto, expresándolas por los parámetros de distribución. Calcular el cuantil de orden $p=0{,}75$ para el caso particular de la distribución de Pareto con parámetros $a=3$, $x_0=100$.

◀ Hallemos la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant x_0,\\ \dfrac{a}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a+1}, & \text{si } x>x_0.\end{cases}$$

Calculemos la esperanza matemática con ayuda de la fórmula (4) para el caso de una V.A.T.C.:

$$m_X=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,dx=\frac{a}{x_0}\int\limits_{x_0}^{+\infty} x\left(\frac{x_0}{x}\right)^{a+1}dx=$$

$$=ax_0^a\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^a}.$$

Es evidente que la esperanza matemática existe si existe la integral impropia del límite infinito, o sea, para $a>1$. En este caso, calculando la integral, obtenemos

$$m_X=\frac{a}{a-1}x_0,\quad a>1.$$

Hallemos el segundo momento inicial:

$$\alpha_1=\mathbf{M}[X^2]=ax_0^a\int\limits_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{x^{a-1}}.$$

Análogamente, el segundo momento inicial existe para $a > 2$, en este caso:

$$\alpha_2 = \frac{a}{a-2} x_0^2, \quad a > 2.$$

Para calcular la varianza utilicemos la fórmula

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2 = \frac{a}{a-2} x_0^2 - \frac{a^2}{(a-1)^2} x_0^2 = \frac{a}{(a-1)^2 (a-2)} x_0^2.$$

Encontramos la mediana h_X como raíz de la ecuación

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^a = \frac{1}{2},$$

de donde

$$h_X = x_0 \sqrt[a]{2}.$$

Evidentemente, para $a \geqslant 2$ tenemos $\sqrt[a]{2} < \frac{a}{a-1}$, por eso $h_X < m_X$.

Puesto que $\frac{d}{dx} f_X(x) < 0$ para $x > x_0$, entonces la función de densidad decrece monótonamente para $x > x_0$ y por eso $d_X = x_0$. El cuantil t_p de orden $p = 0{,}75$ se halla con ayuda de la ecuación

$$P\{X < t_p\} = p = 0{,}75,$$

o sea

$$a x_0^a \int_{x_0}^{t_p} \frac{dx}{x^{a+1}} = 1 - \left(\frac{x_0}{t_p}\right)^a = p.$$

De aquí

$$t_{0,75} = x_0 (1 - 0{,}75)^{-\frac{1}{a}} \Big|_{x_0=100,\ a=3} \approx 156{,}2. \blacktriangleright$$

2.1. Se realiza una prueba como resultado de la cual el suceso A puede aparecer con la probabilidad igual a p y no aparecer con la probabilidad igual a $q = 1 - p$. Supongamos que X, o sea, la *variable aleatoria indicadora*, toma el valor 1 si el suceso A se ha producido, y el valor 0, si el suceso A no ha llegado. Describir la ley de distribución de la variable aleatoria X y la función de distribución, calcular la esperanza matemática, la varianza y el tercer momento central y determinar el valor de la probabilidad p para la cual la varianza es máxima.

2.2. Demostrar que para la varianza σ_X^2 de una variable aleatoria X es válida la fórmula

$$\sigma_X^2 = \alpha_2 - m_X^2.$$

2.3. a) Expresar el momento central del n-ésimo orden por los momentos iniciales del n-ésimo orden y de órdenes menores.

b) Expresar el momento inicial del n-ésimo orden por los momentos centrales del n-ésimo orden y de órdenes menores y por la esperanza matemática.

2.4. Se lanzan una vez dos dados iguales. La variable aleatoria S es la suma de puntos salidos en las caras superiores de los dados. Calcular el valor medio de la suma de puntos salidos y la moda. Hallar el orden p del punto crítico $x_p = 10$.

2.5. Se lanzan una vez tres dados iguales. La variable aleatoria X toma el valor 1 si al menos en un dado sale el seis; toma el valor 0 si el seis no sale en ninguna cara, pero al menos en una de las caras aparece el 5 y toma el valor -1 en los demás casos. Describir la ley de distribución de la variable aleatoria X, calcular la función de distribución y hallar la esperanza matemática y la moda de distribución.

2.6*. Una variable aleatoria X toma exclusivamente valores enteros no negativos. Demostrar que

$$m_X = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{X \geqslant k\}.$$

2.7*. Una variable aleatoria X del tipo continuo es no negativa, tiene la esperanza matemática finita y su ley de distribución está definida por la función de distribución $F_X(x)$. Mostrar que la esperanza matemática de tal variable aleatoria puede ser escrita en la forma $m_X = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)]\, dx$.

2.8. La densidad de distribución de las probabilidades $f_X(x)$ de cierta V.A.T.C. X satisface las condiciones siguientes: $f_X(x) = 0$ para $|x| \geqslant \pi$, en el segmento $[-\pi, \pi]$ la función $f_X(x)$ es par y continua a trozos. Mostrar que para la varianza de esta función es válida la fórmula

$$D_X = \frac{\pi^2}{3} + 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_k}{k^2},$$

donde a_k son los coeficientes de Fourier del desarrollo de la función $f_X(x)$ según el sistema $\{\cos kx,\ k = 0, 1, \ldots\}$.

2.9. Sea X la V.A.T.C. cuya ley de distribución es unimodal. Designemos $\tau_d^2 = \mathbf{M}[(X - d_X)^2]$ (momento central de segundo orden respecto a la moda), $\tau_h^2 = \mathbf{M}[(X - h_X)^2]$ (momento central de segundo orden respecto a la mediana). Sea, además, $d_X \neq h_X$. Mostrar que para que estos momentos sean iguales es necesario y suficiente que $m_X = \frac{d_X + h_X}{2}$

2. Ejemplos de distribuciones clásicas. En los problemas 2.10—2.28 se estudian ciertas distribuciones clásicas conocidas del tipo discreto y el continuo.

2.10. Una variable aleatoria X puede tomar únicamente valores enteros no negativos con las probabilidades $\mathbf{P}\{X = k\} = \frac{r^k}{(1+r)^{k+1}}$ (*distribución de Pascal con parámetro* $r > 0$). Hallar la esperanza matemática, la varianza y la moda de distribución.

Una magnitud variable X tiene la *distribución hipergeométrica con parámetros* n_1, n_2 y $n \leqslant n_1 + n_2$ (n_1, n_2, n son números naturales), si es del tipo discreto, toma un conjunto finito de valores naturales posibles $\{k_1, k_1 + 1, \ldots, k_2\}$ con probabilidades respectivas

$$\mathbf{P}\{X = k\} = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^k}, \quad k_1 \leqslant k \leqslant k_2,$$

en este caso

$$k_1 = \text{máx}\,(0,\ n - n_2),\ k_2 = \text{mín}\,(n_1,\ n).$$

La distribución hipergeométrica aparece en los experimentos en que de una urna que contiene $n_1 + n_2$ bolas, de las cuales n_1 bolas son blancas y n_2 bolas son negras, se extraen n bolas sin volver a meterlas en la urna (véase § 1, p. 4, problemas 1.64, 1,66).

2.11. De una urna que contiene 4 bolas blancas y 6 negras se sacan al azar 3 bolas sin volver a meterlas en la urna. La variable aleatoria X es el número de bolas blancas en la muestra. Describir la ley de distribución y hallar la esperanza matemática, la moda y la varianza de la variable aleatoria X.

2.12. Una variable aleatoria X está distribuida *por la ley de triángulo isósceles en el intervalo* $(-a, a)$ (*por la ley de Simpson*) si esta variable es del tipo continuo y su densidad de distribución de las probabilidades tiene la forma representada en la fig. 120.

Escribir la expresión para $f_X(x)$, calcular la función de distribución de las probabilidades, la esperanza matemá-

tica, la varianza, la moda, la mediana y el coeficiente de exceso.

2.13. Es sabido que al efectuar el tiro contra un blanco plano, en las condiciones invariables, la variable aleatoria R, o sea, la distancia comprendida entre el punto de impacto y el centro del blanco, se subordina a la *ley de distribución de Rayleigh* con la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_R(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x \leqslant 0, \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$ es el parámetro que caracteriza la distribución. Construir el esbozo del gráfico de la densidad de probabilidad $f_R(x)$, comprobar la condición de normalización, calcular las características m_R, D_R, d_R, h_R, a_R y determinar la disposición recíproca de las características m_R, d_R y h_R.

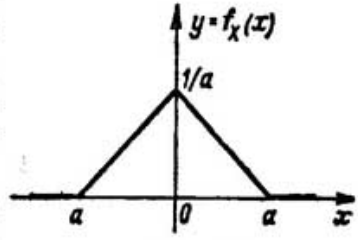


Fig. 120

2.14. La velocidad V de las moléculas del gas ideal que se encuentra en equilibrio a una temperatura determinada es una variable aleatoria subordinada a la *ley de distribución de Maxwell* con la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqslant 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^{3/2} x^2 e^{-\frac{1}{2}\beta x^2} & \text{para } x > 0, \end{cases}$$

donde el parámetro de distribución $\beta > 0$ se determina por la temperatura y la masa de las moléculas. Expresar el valor medio y el valor más probable de la velocidad de las moléculas, así como la varianza de distribución valiéndose del parámetro físico β.

2.15. Una variable aleatoria X se subordina a la *ley de arco seno* con la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geqslant a, \\ \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{si } |x| < a. \end{cases}$$

Hallar la función de distribución y calcular m_X, D_X, d_X, h_X y $\hat{x}_{0,75}$.

2.16. Una variable aleatoria X del tipo continuo está distribuida por la *ley de Laplace con parámetros* $m \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$ si la densidad de distribución de las probabilidades de la misma se prefija por la fórmula

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{|x-m|\sqrt{2}}{\sigma}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Expresar las características m_X, e_X y σ_X por los parámetros de distribución y representar el gráfico de la función de densidad para dos valores del parámetro σ: $\sigma = \sigma_2$ y $\sigma = \sigma_1$ ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sqrt{2}\,|m|$) para un mismo valor de m.

La variable aleatoria X del tipo continuo se llama distribuida *uniformemente en el segmento* $[a, b]$ (en este caso para brevedad se dice que X se subordina a la ley $R(a, b)$) si la densidad de distribución de las probabilidades de la misma es constante en el segmento dado:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin [a, b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

La distribución uniforme se realiza en los experimentos en los cuales se pone al azar un punto sobre el segmento $[a, b]$ (X es la abscisa del punto puesto), así como en los experimentos dedicados a la medición de unas u otras magnitudes físicas con redondeo (X es el error de redondeo).

2.17. Calcular la función de distribución, la esperanza matemática, la mediana, la varianza y el coeficiente de exceso para una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el segmento $[a, b]$.

2.18. La escala de una balanza de palanca instalada en el laboratorio tiene el valor de una división igual a 1 g. Al medir la masa de los componentes químicos de una mezcla la lectura se toma con precisión hasta una división entera redondeando con el error mínimo. ¿Cuál es la probabilidad de que el error absoluto de la determinación de la masa: a) no exceda la magnitud de la desviación estándar de errores posibles al determniar la masa; b) quede comprendido entre los valores de σ_X y $2\sigma_X$?

La variable aleatoria X se llama distribuida según la *ley exponencial con parámetro* $\lambda > 0$ (en este caso para brevedad se dice: X se subordina a la ley Ex (λ)) si es del tipo continuo y su densidad de

distribución de las probabilidades se define por la fórmula

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{si } x\leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x>0. \end{cases}$$

La distribución exponencial se encuentra con frecuencia en la teoría de las colas (por ejemplo, X es el tiempo de espera durante el mantenimiento técnico o X es la duración de las conversaciones telefónicas registradas diariamente en una central telefónica) y en la teoría de la fiabilidad (por ejemplo, X es el plazo de servicio de un equipo radioelectrónico).

2.19*. Sea X el tiempo de funcionamiento irreprochable de un equipo radioelectrónico. Supongamos que la probabilidad de que el equipo falle durante el tiempo Δx con precisión hasta la magnitud $o(\Delta x)$ es igual a $\lambda\Delta x$ $(\lambda > 0)$ sin importar el tiempo x en cuyo transcurso el equipo ya ha trabajado antes del intervalo de tiempo Δx en cuestión. Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X.

2.20. El tiempo de funcionamiento irreprochable de un equipo de radio es la variable aleatoria X distribuida según la ley exponencial con parámetro λ. Calcular la esperanza matemática, la varianza y la probabilidad de que el equipo de radio no falle en el transcurso del tiempo $t = m_X$. ¿Qué orden tiene el cuantil de valor m_X para la distribución dada?

2.21. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley exponencial con parámetro λ. Deducir una fórmula recurrente que exprese el momento central de orden $(k+1)$ por el momento central de k-ésimo orden y la esperanza matemática y con ayuda de esta fórmula calcular el coeficiente de asimetría y el de exceso de la distribución exponencial.

2.22. El tiempo de espera cerca del surtidor de gasolina de una estación de servicio es la variable aleatoria X distribuida según la ley exponencial con el tiempo medio de espera igual a t_0. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes:

$$A=\left\{\frac{t_0}{2}\leqslant X<\frac{3}{2}t_0\right\}, \quad B=\{X\geqslant 2t_0\}.$$

2.23. En algunos países capitalistas es vigente la ley de imposición que se extiende a los empresarios privados cuya ganancia anual excede cierto nivel x_0 determinado por la ley. Suponiendo que la ganancia anual de un contribuyente escogido al azar es la variable aleatoria X distribui-

da según la ley de Pareto (véase el ejemplo 2) con parámetros $a = 4$, $x_0 = 1000$, hallar las probabilidades de los sucesos: $A = \{h_X \leqslant X < m_X\}$, $B = \{ | X - m_X | < \sigma_X \}$. ¿Qué orden tiene punto crítico de la esperanza matemática m_X para la distribución dada?

2.24. Una variable aleatoria X está distribuida según la *ley de Cauchy* que se define por la función de distribución de las probabilidades

$$F_X(x) = b + c \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \qquad \text{para} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Escoger los coeficientes a, b y c de modo que la distribución dada corresponda a la variable aleatoria del tipo continuo y calcular la densidad de probabilidad de tal distribución. ¿Existen o no la esperanza matemática y los momentos de un orden superior en la distribución dada? Hallar la moda, la mediana y el cuantil t_p de orden $p = 0{,}75$.

La magnitud aleatoria X tiene la *distribución gamma con parámetros* $a > 0$ y $b > 0$ (para brevedad se dice: X se subordina a la ley $\Gamma(a, b)$) si es del tipo continuo y su densidad de distribución de las probabilidades tiene la forma siguiente:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leqslant 0, \\ \dfrac{b(a)}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} & \text{para } x < 0, \end{cases}$$

donde

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt \tag{5}$$

es la *función gamma de Euler.*

La distribución exponencial con parámetro λ, antes examinada, es un caso particular de la distribución gamma con parámetros $a = 1$, $b = \lambda > 0$.

Otro caso particular de la distribución gamma con parámetros $a = n/2$ (n es un número natural), $b = 1/2$ se llama *distribución jicuadrado con n grados de libertad* (se escribe $\chi^2(n)$). La distribución $\chi^2(n)$ desempeña gran papel en la estadística matemática (véase el capítulo 15, § 6).

Si X se subordina a la ley $\chi^2(n)$, su densidad de distribución de las probabilidades se escribe en la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

2.25*. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $\Gamma(a, b)$. Hallar m_X, D_X, a_X, e_X.

2.26*. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $\chi^2(4)$. Calcular m_X, D_X y h_X. ¿Qué orden tiene punto crítico del valor de m_X?

La variable aleatoria X del tipo continuo se subordina a la *ley de distribución de Weibull con parámetros* $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ si su densidad de distribución de las probabilidades se escribe en la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant a, \\ \dfrac{n}{b}\left(\dfrac{x-a}{b}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^n}, & \text{si } x > a. \end{cases}$$

La distribución de Weibull caracteriza, en varios casos, el plazo de servicio de los equipos radioelectrónicos y, además, se emplea para la aproximación de diferentes distribuciones asimétricas en la estadística matemática.

2.27*. La variable aleatoria X se subordina a la distribución de Weibull con parámetros n, a, $b > 0$. Calcular la esperanza matemática y la moda de distribución.

La variable aleatoria X del tipo continuo tiene la *distribución beta con parámetros* $a > 0$ *y* $b > 0$ si su densidad de distribución de las probabilidades se escribe en la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Un caso particular de la distribución beta para $a = b = 1$ es la *distribución uniforme en el segmento* $[0, 1]$.

2.28*. Una variable aleatoria X se subordina a la distribución beta con parámetros $a > 0$ y $b > 0$. Calcular la esperanza matemática y la varianza.

3. Distribuciones ligadas con pruebas independientes rep etidas. Varias distribuciones clásicas están vinculadas con el experimento en que se realizan pruebas independientes sucesivas y se observa el resultado de realización conjunta de unos u otros casos de cada prueba.

Las pruebas sucesivas se llaman *independientes* si la probabilidad de que se produzca cualquier caso en la n-ésima prueba contada no depende de la realización de los casos de las pruebas precedentes.

Un caso elemental de pruebas independientes repetidas es la *sucesión de ensayos independientes con dos casos («caso favorable» y «caso desfavorable») y con probabilidades invariables del «caso favorable»* (p) *y del «caso desfavorable»* $(1 - p = q)$ *en cada prueba.* Un esquema evidente de tales pruebas es la extracción aleatoria sucesiva de las bolas de una urna que contiene m_1 bolas blancas y m_2 bolas negras, volviendo a meter las bolas sacadas en la urna. Si X es el número de apariciones

de las bolas blancas en la muestra de $n \leqslant m_1 + m_2$ bolas, entonces

$$\mathbf{P}\{X=k\}=P_{n,k}(p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},\ k=0, 1, \ldots, n, \qquad (7)$$

donde $p=\dfrac{m_1}{m_1+m_2}$ es la probabilidad de que aparezca una bola blanca al efectuar una sola extracción. Los números $P_{n,k}(p)$ se interpretan como probabilidades de obtener exactamente k casos favorables en n pruebas independientes con dos casos. La fórmula (7) se llama *fórmula de Bernoulli* y la distribución respectiva de la variable aleatoria X, *distribución binomial* (o *distribución de Bernoulli*). Para brevedad se dice que X está distribuida según la ley $B(n, p)$.

Las características principales de la distribución binomial son las siguientes:

$$m_X=np,\ \sigma_X^2=npq,\ a_X=\frac{q-p}{\sqrt{npq}},\ e_X=\frac{1-6pq}{npq}.$$

EJEMPLO 3. Las probabilidades de que nazca un niño y una niña pueden considerarse, en la primera aproximación, iguales a 0,5. ¿Cuál es la probabilidad de que entre $2n$ neonatos escogidos a la ventura sea al menos un niño (suceso A_1); el número de niños y niñas sea igual (suceso A_2); sea el número de niños mayor que el de niñas (suceso A_3)? Obtener los valores numéricos de las probabilidades buscadas para $2n = 10$; $2n = 100$.

◀ Sea X el número de niños entre $2n$ neonatos. La variable aleatoria X se subordina a la distribución $B\left(2n, \frac{1}{2}\right)$, o sea, conforme a la fórmula (7)

$$\mathbf{P}\{X=k\}=C_{2n}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n},\ k=0, 1, \ldots, 2n.$$

La probabilidad del suceso A_1 se puede hallar con mayor facilidad, pasando al suceso contrario:

$$\mathbf{P}(A_1)=1-\mathbf{P}(\overline{A_1})=1-\mathbf{P}\{X=0\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

La probabilidad del suceso A_2 se escribe directamente:

$$\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}\{X=n\}=C_{2n}^n\left(\frac{1}{2n}\right)^{2n}.$$

Para calcular la probabilidad del suceso A_3 observemos que la distribución de Bernoulli $B\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ es simétrica respecto al valor de $x = n$. En efecto:

$$\mathbf{P}\{X=n-k\}=P_{2n,\ n-k}\left(\frac{1}{2}\right)=C_{2n}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=$$

$$=P_{2n,\ n+k}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathbf{P}\{X=n+k\}$$

para todos los $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Además, no es difícil comprobar que este valor es el más probable, o sea, $d_X = n$ (moda de distribución).

En virtud de simetría de la distribución se cumple la igualdad $P\{X>n\}=P\{X<n\}=\frac{1}{2}(1-P\{X=n\})$. Ahora bien, $P(A_3)=$ $=\frac{1}{2}\left(1-C_{2n}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right.$. Hallemos los valores numéricos de las probabilidades obtenidas. Para $2n=10$ el resultado se obtiene directamente:

$$P(A_1)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0{,}9990,\quad P(A_2)=C_{10}^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\approx 0{,}2461,$$

$$P(A_3)=\frac{1}{2}(1-P(A_2))\approx 0{,}3770.$$

Cuando $2n=100$, llega a ser difícil calcular las magnitudes $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ y C_{100}^{50} de un modo directo.

Para calcular $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ determinemos por logaritmos de base 10: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}=10^{x}$, de donde $x=100\log\frac{1}{2}\approx -30$. Así pues, $P(A_1)=$ $=1-10^{-30}\approx 1$.

A fin de calcular $C_{100}^{50}=\frac{100!}{50!\,50!}$ aplicamos la fórmula de Stirling para $n!$ cuando los valores de n son grandes:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,n^{n}e^{-n}.$$

Entonces

$$P(A_2)=C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}\approx\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\approx 0{,}0798.$$

Luego encontramos

$$P(A_3)=\frac{1}{2}(1-P(A_2))\approx 0{,}4601.\ \blacktriangleright$$

2.29. Para un tirador que ejecuta un ejercicio en un tiro la probabilidad de dar en la «diana» con un disparo no depende de los resultados de los disparos precedentes y es igual a $p=1/4$. El deportista produce 5 disparos. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A=$ {hay al menos un impacto}, $B=$ {hay exactamente un impacto}, $C=$ {hay dos impactos exactamente}, $D=$ {hay tres impactos, como mínimo}.

2.30. Un par de dados iguales se lanza 7 veces. ¿Cuál es la probabilidad de los sucesos siguientes: $A=$ {la suma

de puntos igual a 7 sale dos veces}, B = {la suma de puntos igual a 7 sale al menos 1 vez}, C = {cada vez sale la suma de puntos que es mayor que 7}, D = {la suma de puntos igual a 12 no sale ninguna vez}?

2.31. Demostrar la *fórmula recurrente para las probabilidades binomiales*:

$$P_{n,\,m+1}(p) = \frac{p}{q}\,\frac{n-m}{m+1}\,P_{n,\,m}(p)$$

y con ayuda de ésta determinar que el número más probable de los casos favorables ($d_X = M$) en una serie de n pruebas independientes satisface la desigualdad

$$np - q \leqslant M < np + p.$$

2.32. Dos ajedrecistas de igual fuerza han convenido en jugar un match de $2n$ partidas sin contar tablas. Se considera que cada uno de los participantes puede ganar una partida de turno con la probabilidad igual a 0,5. Gana el match el que venza en un número mayor de partidas. ¿En qué match tiene más probabilidades de ganar cualquiera de los participantes: en un match de 8 partidas o de 12 partidas sin contar tablas en ambos casos?

2.33. Diez bombillas de iluminación destinadas para un árbol de Año Nuevo están conectadas en serie en un circuito. La probabilidad de que cualquier bombilla se queme al elevar la tensión de la red es igual a 0,1. Determinar la probabilidad de ruptura del circuito al elevar la tensión en la red.

2.34. La probabilidad de que cada aparato falle durante un ensayo no depende de los fallos de los demás aparatos y es igual a 0,2. Se han ensayado 9 aparatos. La variable aleatoria X es el número de aparatos que han fallado durante las pruebas. Hallar la moda de distribución d_X y calcular con cuatro signos exactos las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{X = 0\}$, $B = \{X < 3\}$, $C = \{X \geqslant 6\}$.

2.35. Un dispositivo consta de 8 elementos que funcionan independientemente. Las probabilidades de que cada uno de los elementos falle en el transcurso del tiempo T son iguales y valen $p = 0{,}2$. Hallar la probabilidad de que el aparato falle si para esto es suficiente que fallen al menos 3 elementos de 8.

2.36. Se realiza un tiro por un cañón contra un blanco para prácticas. La probabilidad de dar en el blanco con un

disparo es igual a p. El blanco puede ser destruido con la probabilidad igual a $1 - t^k$ $(0 < t < 1)$ si hay k impactos $(k = 1, 2, \ldots)$. Calcular la probabilidad de que el blanco quede destruido al producir n disparos.

2.37. Una partida de piezas procedentes de un taller se someten al control. Es sabido que el 5% de todas las piezas no satisfacen la norma. ¿Cuántas piezas es necesario ensayar para revelar, con una probabilidad igual a 0,95, como mínimo: a) al menos una pieza no normalizada; b)* tres piezas no normalizadas, como mínimo?

2.38. La prueba consiste en que de una baraja de 32 naipes (a partir del siete y superiores) se extraen al azar 10 naipes volviendo a meterlos en la baraja con la particularidad de que cada vez se anota el resultado de la extracción. La prueba se repite 4 veces. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {por lo menos una vez se extraen 7 naipes de un mismo palo, como mínimo}, B = {dos veces, exactamente, se obtienen colecciones que no comprenden un palo cualquiera}, C = {una vez, exactamente, se obtiene una colección sin damas, ases ni reyes}.

2.39. Una moneda perfecta se lanza seis veces. La variable aleatoria X es el módulo de diferencia entre el número de apariciones del escudo y el de apariciones de la cifra en el experimento dado. Calcular el valor medio, la moda y la varianza de la variable aleatoria X.

2.40. Se realizan las pruebas sucesivas según el esquema de Bernoulli. La probabilidad del caso favorable en una prueba es igual a p. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {k-ésimo caso favorable contado llegará en la m-ésima prueba contada $(m \geqslant k)$}, B = {el k-ésimo caso favorable contado llegará antes de que se produzcan m casos desfavorables}, C = {todos los k casos favorables se producirán seguidamente en n pruebas}.

2.41. Las pruebas según el esquema de Bernoulli, con la probabilidad igual a p de que en una prueba se produzca un caso favorable, se repiten hasta que llegue tal caso, después de lo cual cesan. Designemos con X el número de las pruebas realizadas hasta el primer caso favorable, inclusivamente. Hallar m_X, d_X y D_X. (La ley de distribución de la variable aleatoria X se llama *geométrica con parámetro* p.)

2.42*. La probabilidad de que un tirador dé en un blanco es, en condiciones invariables, constante e igual a p. Los cartuchos se suministran al tirador hasta que éste falle. De-

signemos con X el número de cartuchos suministrados al tirador en el experimento dado. Hallar m_X, D_X y d_X.

2.43. Las pruebas segun el esquema de Bernoulli, con la probabilidad igual a p de que en una prueba se produzca un caso favorable, se repiten hasta que se obtengan exactamente k casos. Describir la ley de distribución y hallar el valor medio del número de pruebas realizadas en el experimento dado. (La distribución indicada se llama «*binomial negativa*» *con parámetros* $k \in \mathbb{N}$ *y* $p > 0$.)

Si la probabilidad de que se produzca el suceso A varía de una prueba a otra, la fórmula de Bernoulli llega a ser inaplicable. Sea $p_k = P_k(A)$ la probabilidad del «caso favorable» en la k-ésima prueba de una sucesión de pruebas independientes ($q_k = 1 - p_k$ es la probabilidad del «caso desfavorable» en la k-ésima prueba). Entonces la probabilidad $P_{n;m}$ de que sucedan exactamente m casos favorables en n pruebas independientes es igual al coeficiente de x^m en el desarrollo de la *función generadora* en serie de potencias x

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (q_k + p_k x) = \sum_{m=0}^{n} P_{n,m} x^m.$$

Los coeficientes buscados $P_{n,m}$ se calculan derivando respecto a x la función generadora $G_n(x)$:

$$P_{n,m} = \frac{1}{m!} \frac{d^m G_n(x)}{dx^m}\bigg|_{x=0}. \tag{8}$$

EJEMPLO 4. Designemos con X el número de casos favorables en una sucesión de n pruebas independientes con la probabilidad igual a p_k de que en la k-ésima prueba suceda un caso favorable. Calcular el número medio de casos favorables y la varianza de la variable X. Obtener las características análogas de la distribución binomial en el caso particular cuando $p_k = p$ para todos los $k = 0, 1, \ldots, n$.

◀ Haciendo uso de la definición de la función generadora, podemos escribir

$$m_X = \sum_{m=0}^{n} m P_{n,m} = \frac{dG_n(x)}{dx}\bigg|_{x=1} = \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

De un modo análogo encontramos el segundo momento inicial:

$$\alpha_2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 P_{m,n} = \frac{d}{dx}(xG_n'(x))\bigg|_{x=1} = G_n'(1) + G_n''(1), \tag{1}$$

$$G_n''(1) = p_1 \sum_{k\neq 1}^{n} p_k + p_2 \sum_{k\neq 2}^{n} p_k + \ldots + p_n \sum_{k\neq n}^{n} p_k =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} p_k^2.$$

De aquí

$$\alpha_2 = \sum_{k=1}^{n} p_k + \left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} p_k^2,\ D_X = \alpha_2 - m_X^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k q_k.$$

En el caso particular cuando $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ de estas fórmulas se deduce que $m_X = np$, $D_X = npq$. ▶

2.44. Con un cañón se realiza el tiro contra un blanco que se aleja. Para el primer disparo la probabilidad de acertar es igual a 0,8, para cada disparo siguiente la probabilidad de acertar disminuye 2 veces. Se producen 4 disparos. Determinar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {hay al menos un impacto}, B = {hay un impacto, exactamente}.

2.45. Un aparato consta de cinco elementos. El fallo del k-ésimo elemento durante el tiempo T ocurre, independientemente de los demás elementos, con la probabilidad $p_k = 0{,}2 + (k-1)\cdot 0{,}1$. Determinar: a) la esperanza matemática y la varianza del número de elementos que han fallado en el transcurso del tiempo T; b) la probabilidad de que durante el tiempo T falle al menos uno de los elementos del aparato.

2.46. En la primera urna hay 6 bolas blancas y 4 negras y en la segunda, 4 bolas blancas y 6 negras. De la primera urna se saca al azar, sucesivamente y con devolución, una bola y cada vez antes de realizar la extracción siguiente, independientemente del resultado de la prueba precedente, se pasa a la ventura una bola de la segunda urna a la primera. La operación se repite dos veces. ¿Cuál es la probabilidad del número más probable de bolas blancas extraídas de la primera urna?

2.47*. Se efectúan las pruebas independientes sucesivas con dos casos y la probabilidad de que se produzca el caso favorable en la k-ésima prueba contada es igual a p_k ($q_k = 1 - p_k$ es la probabilidad de suceder el caso desfavorable). Demostrar la *fórmula recurrente* para la probabilidad de ocurrir k casos desfavorables en m pruebas (por consiguiente, $m - k$ casos favorables en m pruebas)

$$\begin{cases} P_{m,\,m-k} = P_{m-1,\,m-k} q_k + P_{m-1,\,m-k-1} p_m,\ k = 2, 3, \ldots, m-1, \\ P_{m,\,m} = p_1 p_2 \ldots p_m, \\ P_{m,\,m-1} = q_1 p_2 \ldots p_m + p_1 q_2 p_3 \ldots p_m + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + p_1 p_2 \ldots p_{m-1} q_m. \end{cases}$$

2.48. Utilizando la fórmula recurrente del problema 2.47, escribir la expresión para la probabilidad de que sucedan exactamente dos casos favorables en cuatro pruebas con la probabilidad igual a p_k de que un caso favorable se produzca en la k-ésima prueba.

2.49*. Hay tres urnas que llevan los números 1, 2, 3. En la primera urna hay 7 bolas blancas y 5 negras, en la segunda hay 3 bolas blancas y 7 negras y en la tercera, 2 bolas blancas y 3 negras. De cada urna se extrae al azar una bola. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {en la muestra hay exactamente 2 bolas blancas}, B = {en la muestra hay más bolas blancas que negras}.

Supongamos que cada una de n pruebas independientes tiene N casos incompatibles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ con las probabilidades respectivas iguales a $p_1, p_2, \ldots, p_N \left(\sum_{k=1}^{N} p_k = 1 \right)$ que no cambian de una prueba a la otra. Designemos con $X_{n,k}$ ($k = 1, 2, \ldots, N$) el número de apariciones del caso ω_k en n pruebas. Entonces la probabilidad de que en todas las n pruebas se produzca conjuntamente el caso compuesto consistente en que el caso ω_1 sucede m_1 veces, el caso ω_2 sucede m_2 veces, ..., el caso ω_N sucede m_N veces ($m_1 + m_2 + \ldots + m_N = n$) se expresa por medio de la fórmula

$$\mathbf{P}\{X_{n,1}=m_1,\ X_{n,2}=m_2,\ \ldots,\ X_{n,N}=m_N\}=P_{n;\,m_1,\,m_2,\,\ldots,\,m_N}=$$

$$=\frac{n!}{m_1!\,m_2!\,\ldots\,m_N!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_N^{m_N}. \qquad (9)$$

El esquema descrito de la sucesión de pruebas con N casos se llama *esquema polinomial* y la fórmula (9) define las probabilidades de la *distribución polinomial*. La distribución de Bernoulli (7) es un caso particular de la distribución polinomial para $N = 2, p_2 = 1 - p_1 = q_1$.

EJEMPLO 5. Una urna contiene 8 bolas blancas, 5 rojas y 2 negras. Se efectúan 5 extracciones de una bola cada vez con devolución. Se examinan los sucesos A = {aparece la composición siguiente de bolas: 3 bolas blancas y una bola de cada uno de los demás colores}, B = = {aparecen exactamente 3 bolas blancas}, C = {aparecen 3 bolas blancas y una bola de cada uno de los demás colores con la particularidad de que las bolas blancas aparecen seguidamente}. Determinar las probabilidades de estos sucesos.

◀ El suceso A corresponde al esquema polinomial para $n = 5$, $N = 3$, $p_1 = 8/15$, $p_2 = 5/15$, $p_3 = 2/15$, por eso

$$\mathbf{P}(A)=P_{5;\,3,\,1,\,1}=\frac{5!}{3!\,1!\,1!}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{2}{15}=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\approx 0{,}1348$$

El suceso B corresponde al esquema binomial con los valores $N = 2$, $p_1 = 8/15$, $q_1 = 7/15$, por eso

$$P(B) = P_{5,3}\left(\frac{8}{15}\right) = C_5^3 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 =$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^2 \approx 0{,}3304.$$

El suceso C corresponde al esquema combinatorio en el cual en tres pruebas sucesivas cualesquiera una bola blanca sale tres veces y en las demás dos pruebas salen una vez bola negra y una vez bola oja, por eso

$$P(C) = 3P_{3,3}\left(\frac{8}{15}\right) P_{2;\,0,\,1,\,1} = 3 \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^3 \cdot \frac{2!}{0!\,1!\,1!} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^0 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{15}\right)^4 \approx 0{,}0404. \blacktriangleright$$

2.50. En las condiciones invariables se producen tres disparos independientes contra un blanco. La probabilidad de que con un disparo se acierte al «diez» es igual a $p_{10} = 0{,}3$, la probabilidad de que se acierte al «nueve» es igual a $p_9 = 0{,}4$, la probabilidad de que no se acierte al diez ni al nueve es igual a $p_0 = 1 - p_{10} - p_9 = 0{,}3$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {como resultado de tres disparos se obtienen 29 puntos, como mínimo}, B = {hay exactamente dos impactos en el «diez»}, C = {un impacto se ve en el «diez» y un impacto, en el «nueve»}.

2.51. Cada uno de los diez postgraduados del grupo elige al azar e independientemente de los demás uno de los cuatro días de la semana que viene (lunes, martes, miércoles o jueves) para trabajar en la biblioteca, en la sección de periódicos. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {el lunes viene a la biblioteca un solo postgraduado, el martes vienen dos, el miércoles vienen tres y el jueves vienen cuatro postgraduados}, B = {todos los diez postgraduados se reúnen en la biblioteca el jueves}, C = {cinco postgraduados aparecen en la biblioteca los primeros dos días de la semana y los demás cinco, los dos días siguientes}, D = {el lunes aparecen en la biblioteca tres postgraduados, exactamente}.

2.52. Dos ajedrecistas de igual fuerza juegan un match de 12 partidas. En cada partida son posibles tres casos: ω_1 = {el primer jugador gana (el segundo pierde)}, ω_2 = {tablas}, ω_3 = {gana el segundo jugador (pierde el primero)}. Sea

$\mathbf{P}(\omega_1) = \mathbf{P}(\omega_3) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(\omega_2) = 1 - \mathbf{P}(\omega_1) - \mathbf{P}(\omega_3) = 0{,}6$.

Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {el primer jugador gana tres partidas, 3 partidas pierde y las demás partidas son tablas}, B = {uno de los jugadores gana 4 partidas y pierde 3 partidas}, C = {6 partidas no son tablas}.

4. Distribución de Poisson. La variable aleatoria X se llama distribuida según la *ley de Poisson con parámetro* $\lambda > 0$ si todos los valores posibles de esta variable son iguales a 0, 1, 2, ..., y las probabilidades correspondientes se definen por la fórmula

$$\mathbf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{10}$$

La particularidad característica de la distribución de Poisson consiste en que la esperanza matemática y la varianza coinciden y en este caso

$$\lambda = m_X = D_X.$$

La distribución de Poisson puede ser obtenida de la binomial mediante el paso límite cuando $n \to \infty$ y $p \to 0$ a la condición de que $np = \lambda = \text{const}$ y entonces se interpreta como *ley de los fenómenos «raros»*. Si n es suficientemente grande y p es pequeña, la fórmula de Poisson (10) se utiliza con frecuencia, en calidad de una aproximación, en vez de las fórmulas binomiales exactas para hallar las probabilidades de que sucedan k casos favorables en n pruebas.

EJEMPLO 6. En la facultad hay 500 estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que el 1 de setiembre es a la vez el cumpleaños para k estudiantes de la facultad dada? Calcular la probabilidad indicada para los valores de $k = 0, 1, 2, 3$.

◀ Puesto que $n = 500 \gg 1$ y $p = \mathbf{P}$ {el 1 de setiembre nació uno de los estudiantes de la facultad} $= \frac{1}{365} \ll 1$, se puede considerar que el número aleatorio X de los estudiantes nacidos el 1 de setiembre se subordina a la ley de distribución de Poisson con el parámetro $\lambda = 1{,}36986$. Por eso según la fórmula (10) $p_0 = \mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-\lambda} \approx 0{,}2541$. Luego, encontramos recurrentemente:

$$p_1 = \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} = \lambda p_0 \approx 0{,}3481,$$

$$p_2 = \mathbf{P}\{X = 2\} = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{2} p_1 \approx 0{,}2385,$$

$$p_3 = \mathbf{P}\{X = 3\} = \frac{\lambda}{3} p_2 \approx 0{,}1089.$$

Los valores de las probabilidades buscadas, que corresponden a la distribución binomial B (500, 1/365) y están calculados con cuatro signos exactos después de la coma con ayuda de la fórmula recurrente del problema 2.31, son los siguientes: $p_0 = 0{,}2537$, $p_1 = 0{,}3485$, $p_2 = 0{,}2389$, $p_3 = 0{,}1089$. ▶

2.53. Un equipo consta de 1000 elementos cada uno de los cuales, independientemente de los demás, falla durante el tiempo T con la probabilidad $p = 5 \cdot 10^{-4}$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {durante el tiempo T falla al menos un elemento}, B = {durante el tiempo T fallan 3 elementos, exactamente}, C = {durante el tiempo T fallan 3 elementos, como máximo}.

2.54. La variable aleatoria X, o sea, el número de electrones que salen del cátodo calentado de un tubo electrónico en el transcurso del tiempo t, se subordina a la distribución de Poisson con el parámetro λt (λ es el número medio de electrones que se emiten en la unidad de tiempo). Determinar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {durante el tiempo t_1 el número de electrones emitidos es menor que m, $m \in \mathbb{N}$}, B = {durante el tiempo t_2 sale un número par de electrones}.

2.55*. El número medio de llamadas que llegan a una Central Telefónica Automática (CTA) por minuto es igual a 120. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: A = {durante dos segundos no viene a la CTA ninguna llamada}, B = {durante dos segundos llegan a la CTA menos de dos llamadas}, C = {durante un segundo viene a la CTA al menos una llamada}, D = {durante tres segundos llegan a la CTA 6 llamadas, como mínimo}.

2.56. Una estación de radio transmite automáticamente un texto digital en el transcurso de 10μs. El funcionamiento de la estación se realiza en condiciones de impulsos parásitos, siendo igual a 10^4 por segundo el número de impulsos perturbadores. Para frustrar la transmisión es suficiente que k impulsos perturbadores correspondan al período de funcionamiento de la estación. Considerando aplicable la ley de los fenómenos raros, hallar la probabilidad p_k de que fracase la transmisión para los valores de $k = 1, 2, 3$.

2.57. Una prueba de 500 páginas contiene 1300 erratas. Considerando aplicable la ley de Poisson, hallar el número más probable de erratas en una página de texto y la probabilidad de este número.

2.58. El número de partículas elementales que son registradas por un aparato es aleatorio y forma una variable aleatoria de Poisson con el valor medio de n partículas. Cada partícula que se registra puede llevar una carga con la probabilidad igual a p y ser neutra con la probabilidad igual a $1 - p$. Determinar la ley de distribución del número de par-

tículas cargadas que se registran por el aparato y hallar el valor medio y la varianza de la distribución obtenida.

2.59*. Al ensayar un acero aleado para determinar el contenido del carbono la probabilidad de que en una muestra tomada al azar el porcentaje de carbono exceda el nivel admisible es igual a $p = 0{,}01$. Considerando aplicable la ley de los fenómenos raros, calcular ¿cuántas muestras es necesario ensayar, por término medio, para que con la probabilidad $p = 0{,}95$ el efecto indicado se observe k veces, por lo menos? (Examinar los casos de $k = 1, 2, 3$.)

5. Ley normal de distribución. La variable aleatoria se llama distribuida según la *ley normal (de Gauss) con los parámetros* $m \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma > 0$ si la densidad de distribuc ión de las probabilidades tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{11}$$

Los parámetros m y σ coinciden con las características principales de la distribución:

$$m = m_X, \quad \sigma = \sigma_X = \sqrt{D_X}.$$

Para brevedad se dice que la variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(m, \sigma)$ si la densidad de probabilidades de la misma se escribe en la forma (11).

Si X está distribuida según la ley $N(0, 1)$, entonces se llama *variable normal estandarizada*. La función de distribución estandarizada de la variable de Gauss

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

se denomina *función de Laplace*. Con ayuda de esta función pueden calcularse probabilidades de intervalo para la distribución normal $N(m, \sigma)$:

$$\mathrm{P}\{x_1 \leqslant X < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right).$$

Los valores de la función $\Phi(x)$ se dan en el suplemento (tabla S1). Para resolver los problemas concernientes a la distribución normal se requiere utilizar con frecuencia los valores de tabla de la función de Laplace. Puesto que para la función de Laplace es válida la relación

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x),$$

es suficiente tener los valores de tabla de la función $\Phi(x)$ sólo para los valores positivos del argumento. Para la probabilidad de que se tome un valor perteneciente al intervalo simétrico respecto a la esperanza matemática es justa la fórmula

$$\mathrm{P}\{|X - m_X| < \varepsilon\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1.$$

Los momentos centrales de la distribución normal satisfacen la relación recurrente

$$\mu_{n+2} = (n + 1)\,\sigma^2\mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

De aquí resulta que todos los momentos centrales de orden impar son iguales a cero (ya que $\mu_1 = 0$).

2.60. Una magnitud aleatoria X está distribuida según la ley $N(m, \sigma)$. Haciendo uso de la tabla de la función de Laplace, calcular la probabilidad p_k de que la desviación de la variable X respecto a su esperanza matemática no exceda la magnitud de $k\sigma$ (obtener la respuesta para los tres valores de $k = 1, 2, 3$).

2.61. Una variable aleatoria X en medición se subordina a la ley de distribución $N(10, 5)$. Hallar el intervalo simétrico respecto a m_X al cual pertenezca, con la probabilidad igual a p, el valor medio. Examinar los siguientes valores numéricos: a) $p = 0{,}9974$; b) $p = 0{,}9544$; c) $p = 0{,}50$.

2.62. En un conjunto distribuido normalmente el 15% de los valores de x son menos de 12 y el 40% de los valores de x son más de 16,2. Hallar el valor medio y la desviación estándar de la distribución dada.

2.63. Una pieza fabricada por un robot se considera útil si el tamaño de la misma, sometido al control, no desvía del nominal más que en 10 mm. Las desviaciones aleatorias del tamaño controlado con respecto al nominal se subordinan a la ley $N(0, 5)$.

a) ¿Cuál es el porcentaje de las piezas útiles que son fabricadas por el robot?

b) ¿Cuántas piezas es necesario fabricar para que con una probabilidad no menor que 0,95 entre éstas haya al menos una pieza defectuosa?

2.64. Las bolas para cojinetes se desechan del modo siguiente: si una bola pasa a través del orificio de diámetro d_2, pero no pasa a través del orificio de diámetro $d_1 < d_2$, la bola se considera útil. Si no se observa cualquiera de estas condiciones, la bola se desecha. Se considera que el diámetro de la bola X es una variable aleatoria distribuida según la ley $N\left(\frac{d_1 + d_2}{2}, \alpha(d_2 - d_1)\right)$, donde el parámetro α $(0 < \alpha < 1/2)$ determina la precisión de fabricación de las bolas.

a) Determinar la probabilidad de que la bola quede desechada.

b) ¿Qué precisión de fabricación conviene establecer (o sea, qué parámetro α debe ser elegido) para que las bolas desechadas constituyan el 2% de toda la producción, como máximo?

2.65. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(m, \sigma)$.

a) Calcular $p_1 = \mathbf{P}\{X \geqslant x_{n2}\}$ y $p_2 = \mathbf{P}\{x_{n1} \leqslant X \leqslant x_{n2}\}$, donde x_{n1} y x_{n2} son los puntos de inflexión de la curva de la densidad de distribución de las probabilidades.

b)** Sea (a, b) el intervalo que no contiene m_X. ¿Para qué σ la probabilidad $Q(\sigma) = \mathbf{P}\{a \leqslant X < b\}$ será la mayor?

c)* Demostrar la relación recurrente (12) para los momentos centrales.

d) Calcular el primer momento central absoluto ($\mathbf{M}(|X - m_x|)$).

2.66*. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(-1, 1)$. Calcular el coeficiente de asimetría, el coeficiente de exceso y el momento inicial del sexto orden.

§ 3. Vectores aleatorios

1. Leyes de distribución y características numéricas de los vectores aleatorios. Supongamos que para el experimento dado están definidas las variables aleatorias $X_1 = X_1(\omega)$, $X_2 = X_2(\omega)$, ..., $X_n = X_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$. A cada suceso elemental ω se le puede asignar un *vector aleatorio n-dimensional (variable aleatoria n-dimensional)*

$$\boldsymbol{X}(\omega) = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

que define la aplicación $\Omega \to \mathbb{R}^n$.

Se llama *función de distribución* del vector aleatorio n-dimensional o *función de distribución compatible de las variables aleatorias* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la función no aleatoria de n variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (función del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$) determinable como probabilidad de que se cumplan conjuntamente n desigualdades

$$F_{\boldsymbol{X}}(x) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

En el caso particular, para el vector aleatorio bidimensional (X, Y) tenemos por definición

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}\{X < x, Y < y\}.$$

La función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$ posee las propiedades siguientes:

1. $\lim_{x \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0.$

2. $\lim_{x \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y), \quad \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y) = F_X(x).$

3. $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F_{X,Y}(x, y) = 1.$

4. La función $F_{X,Y}(x, y)$ es una función no decreciente de sus propios argumentos.

5. La función $F_{X,Y}(x, y)$ es continua a la izquierda para cada uno de los argumentos.

La propiedad 2 suele llamarse *condición de concordancia*. Significa que las funciones de distribución de distintas componentes de un vector aleatorio bidimensional pueden hallarse por el paso límite a partir de la función de distribución compatible de estas componentes.

La probabilidad de que un punto aleatorio sobre el plano (X, Y) se encuentre en un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, puede ser calculada con ayuda de la función valiéndose de la fórmula

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2\} = F_{X,Y}(x_1, y_1) + \\ + F_{X,Y}(x_2, y_2) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1).$$

El vector aleatorio bidimensional (X, Y) se llama *vector aleatorio del tipo discreto* (abreviadamente Vct. A.T.D.) si el conjunto de sus valores posibles $G(x, y)$ es no mayor que numerable.

La enumeración de los valores posibles de pares de componentes $\{(x_i, y_j) \mid (x_i, y_j) \in G(x, y)\}$ y de las probabilidades correspondientes a cada tal par

$$p_{ij} = \mathbf{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\}$$

que satisfacen la condición

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1,$$

donde la sumación se extiende a todos los valores posibles de los índices i y j, se llama ley de distribución del Vct. A.T.D.

Las leyes unidimensionales de distribución de distintas componentes del Vct. A.T.D. se expresan por las probabilidades de valores compatibles p_{ij} con ayuda de las fórmulas

$$p_{i\cdot} = \mathbf{P}\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \quad p_{\cdot j} = \mathbf{P}\{Y = y_j\} = \sum_j p_{ij}, \qquad (1)$$

donde la sumación se extiende a todos los valores posibles de los índices i o j.

Sean (X, Y) el vector aleatorio bidimensional del tipo discreto y $G(x, y)$ el conjunto de todos los valores posibles del mismo. Se denomina *ley condicional de distribución* de la componente aleatoria X, a condición de que la componente Y haya tomado el valor determinado

y_j, el conjunto $\{x_i \mid x_i \in G(x, y_j)\}$ de los valores posibles de la componente X y de las probabilidades condicionales, correspondientes a estos valores, $\mathbf{P}\{X = x_i/Y = y_j\}$ que se definen por la igualdad (véase el § 1, fórmula (6))

$$\mathbf{P}\{X=x_i/Y=y_j\}=\frac{\mathbf{P}\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{\mathbf{P}\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}. \qquad (2)$$

El vector aleatorio bidimensional (X, Y) se llama *vector aleatorio del tipo continuo* (abreviadamente Vct. A.T.C.) si la función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$ es continua sobre todo el plano y existe una función $f_{X,Y}(x, y)$ no negativa, integrable según Riemann en los límites infinitos sobre cada una de las coordenadas, tal que

$$F_{X,Y}(x, y)=\int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t)\, dt.$$

Esta función se llama *densidad de distribución de las probabilidades* del vector aleatorio (X, Y). La densidad de distribución de las probabilidades posee las propiedades siguientes:

1. $f_{X,Y}(x, y) \geqslant 0$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(s, t)\, dt = 1$ (condición de normalización).

3. Si (x, y) es el punto de continuidad de la densidad $f_{X,Y}(x, y)$, entonces

$$f_{X,Y}(x, y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{dx\, dy}.$$

4. Las densidades de distribución de las probabilidades de distintas componentes del vector aleatorio se expresan en la forma de integrales de la densidad compatible:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx. \qquad (3)$$

Si (X, Y) es un Vct. A.T.C., entonces la probabilidad de que un punto aleatorio se encuentre en una región cuadrable arbitraria S sobre el plano se determina por la fórmula

$$\mathbf{P}\{(X, Y) \in S\}=\iint_S f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Sea (X, Y) un Vct. A.T.C. bidimensional. Se llama *densidad de distribución de las probabilidades* de la componente aleatoria X, a condición de que la componente Y haya tomado cierto valor y tal que $f_Y(y) > 0$, la función no negativa $f_X(x/y)$ de la variable real x siendo esta función definible para todos los valores $x \in \mathbf{R}$ por la siguiente

fórmula de multiplicación para las densidades:

$$f_X(x/y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}. \qquad (4)$$

Análogamente, para todos los $y \in \mathbb{R}$ y para todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f_X(x) > 0$

$$f_Y(y/x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}.$$

Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se llaman *independientes (en conjunto)* si para toda colección de sucesos $\{X_i \in B_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son los subconjuntos de la recta numérica, se cumple la igualdad

$$\mathbf{P}\{X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n\} = \mathbf{P}\{X_1 \in B_1\}\,\mathbf{P}\{X_2 \in B_2\} \ldots \mathbf{P}\{X_n \in B_n\}.$$

TEOREMA. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes si, y sólo si, en todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ tiene lugar la igualdad

$$F_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{x}) = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \ldots F_{X_n}(x_n).$$

De este teorema se deduce, en particular, que para la independencia de las componentes de un vector aleatorio del tipo continuo $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es necesario y suficiente que en todo punto $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$$f_X(\boldsymbol{x}) = f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n).$$

Pero si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un Vct. A.T.D., entonces la condición de independencia de sus componentes se escribe en la forma

$$\mathbf{P}\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = \mathbf{P}\{X_1 = x_1\}\,\mathbf{P}\{X_2 = x_2\} \ldots \mathbf{P}\{X_n = x_n\}$$

para todos los $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Para un vector aleatorio bidimensional (X, Y) se introducen las características numéricas siguientes.

Se denomina *momento inicial de orden* $k + s$ del vector aleatorio (X, Y) el número real $\alpha_{k,s}$ definible por la fórmula

$$\alpha_{k,s} = \mathbf{M} \mid X^k Y^s \mid =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int x^k y^s f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy, & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.C.,} \\ \displaystyle\sum_i \sum_j x_i^k y_j^s p_{ij}, & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.D.} \end{cases}$$

El momento inicial $\alpha_{k,s}$ existe si la integral (respectivamente la serie) en el segundo miembro de la igualdad converge absolutamente. En particular, $\alpha_{k,0} = \mathbf{M}[X^k]$, $\alpha_{0,s} = \mathrm{M} \mid Y^s \mid$ son los momentos iniciales respectivos de distintas componentes.

El vector de coordenadas no aleatorias $(m_X, m_Y) = (\alpha_{1,0}, \alpha_{0,1})$ se llama *esperanza matemática* del vector aleatorio (X, Y) o *centro de dispersión*. Se llama *momento central de orden* $k + s$ del vector aleatorio (X, Y) el número real $\mu_{k,s}$ definible por la fórmula

$$\mu_{k,s} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty}\int (x-m_X)^k (y-m_Y)^s f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy, \\ \qquad\qquad \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.C.} \\ \sum_i \sum_j (x_i-m_X)^k (y_j-m_Y)^s p_{ij}, \\ \qquad\qquad \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.D.} \end{cases}$$

El momento central $\mu_{k,s}$ existe si la integral (respectivamente la serie) en el segundo miembro de la igualdad converge absolutamente. En particular, $\mu_{2,0} = D_X$, $\mu_{0,2} = D_Y$. El momento central $\mu_{1,1}$ se denomina *covarianza* y se designa con K_{XY}. Así, por definición

$$K_{XY} = \mu_{1,1} = \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \mathbf{M}[XY] - m_X m_Y.$$

La covarianza normalizada $\rho_{XY} = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$ se llama *coeficiente de correlación* de dos componentes aleatorias X e Y del vector aleatorio.

El coeficiente de correlación satisface la condición $\| \rho_{XY} \| \leqslant 1$ y determina el grado de dependencia lineal entre X e Y. Las variables aleatorias para las cuales $\rho_{XY} = 0$ se denominan *incorrelacionadas*. De la independencia de las variables aleatorias X e Y se desprende la no correlatividad de las mismas (lo contrario, hablando en rigor, no es justo).

Sea (X, Y) un Vct. A.T.D. Se llama *esperanza matemática de la variable aleatoria* X, *a condición de que* Y *haya tomado uno de sus valores posibles* y_j, el número real $\hat{y}_j$ designable también con $\mathbf{M}[X/Y = y_j]$ y definible por la fórmula

$$\hat{y}_j = \mathbf{M}[X/Y = y_j] = \sum_i x_i \mathbf{P}\{X = x_i / Y = y_j\}, \tag{5}$$

donde $\mathbf{P}\{X = x_i/Y = y_j\}$ es la probabilidad condicional definible por la fórmula (2) y la sumación en el segundo miembro se extiende a todos los valores posibles del índice i.

Se denomina *esperanza matemática condicional de la variable aleatoria* X *a condición de* Y la variable aleatoria $\hat{Y}$, que se designa también con $\mathbf{M}[X/Y]$, cuyos valores posibles $\hat{y}_j$ se definen por la fórmula (5) y las probabilidades respectivas son iguales a

$$\mathbf{P}\{\hat{Y} = \hat{y}_j\} = \mathbf{P}\{Y = y_j\}.$$

Tiene lugar la siguiente *fórmula de la esperanza matemática total*:

$$\mathbf{M}[X]=\mathbf{M}[\mathbf{M}[X/Y]]=\sum_j \mathbf{M}[X/Y=y_j]\,\mathbf{P}\{Y=y_j\}. \qquad (6)$$

Sea (X, Y) un Vct. A.T.C. Se llama *esperanza matemática condicional de la variable aleatoria X, a condición de que* $Y = y$, el número real que se designa con $\mathbf{M}[X/Y = y]$ y se define por la fórmula

$$\mathbf{M}[X/Y=y]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x/y)\,dx,$$

donde $f_X(x/y)$ es la densidad condicional que se define por la fórmula (4). *La fórmula de la esperanza matemática total* es análoga a (6) y tiene la forma

$$\mathbf{M}[X]=\mathbf{M}[\mathbf{M}[X/Y]]=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathbf{M}[X/Y=y]\,dy.$$

Las fórmulas citadas anteriormente para las características numéricas del vector aleatorio (X, Y) se generalizan fácilmente para el caso de un vector aleatorio n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Así, por ejemplo, el vector de coordenadas no aleatorias $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$, donde m_i es la esperanza matemática de la variable aleatoria X_i que se define por la fórmula

$$m_i=\mathbf{M}[X_i]=\int\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots \ldots x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n$$

y se llama *centro de varianza* del vector aleatorio $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Se denomina *matriz covariante* del vector aleatorio n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la matriz real simétrica cuyos elementos no son más que las covarianzas de los pares respectivos de componentes

$$K=\begin{pmatrix} K_{11}K_{12}\ldots K_{1n} \\ K_{22}\ldots K_{2n} \\ \ldots\ldots \\ K_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $K_{ij} = M[\mathring{X}_i\mathring{X}_j] = K_{ij}$ es la covarianza de las componentes i-ésima y j-ésima. Es evidente que $K_{ij} = \mathbf{M}[\mathring{X}_i^2] = D_i$ es la varianza de la i-ésima componente.

Se llama *matriz de correlación* del vector aleatorio n-dimensional a matriz covariante normalizada

$$R=\begin{pmatrix} 1\rho_{12}\rho_{13}\ldots\rho_{1n} \\ 1\ \ \rho_{23}\ldots\rho_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $\rho_{ij}=\dfrac{K_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}$ es el coeficiente de correlación de las componentes i-ésima y j-ésima,

EJEMPLO 1. Se lanza tres veces un dado. Las variables aleatorias son las siguientes: X, el número de apariciones del seis; Y, el número de apariciones de una cifra impar.

a) Describir la ley de distribución del vector aleatorio (X, Y).

b) Determinar si son dependientes o independientes las componentes X e Y.

c) Describir las leyes de distribución de las componentes tomadas por separado.

d) Describir la ley condicional de la variable aleatoria X a condición de que $Y = 2$ y, quedando vigente esta condición, calcular la esperanza matemática condicional $\mathbf{M}[X/Y = 2]$.

e) Calcular las probabilidades $\mathbf{P}\{X \geqslant Y\}$, $\mathbf{P}\{X + Y \geqslant 2\}$.

f) Calcular las características principales del vector aleatorio: m_X, m_Y, D_X, K_{XY}, ρ_{XY}.

◀ Para describir la ley de distribución del vector aleatorio discreto (X, Y) es necesario determinar el conjunto de todos los pares posibles de valores (x_i, y_j) y las probabilidades correspondientes. Es cómodo representar el resultado en forma de la tabla siguiente:

x_i \ y_j	0	1	2	3	$\mathbf{P}\{X=x_i\}$
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{125}{216}$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{25}{72}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{24}$	0	0	$\frac{5}{72}$
3	$\frac{1}{216}$	0	0	0	$\frac{1}{216}$
$\mathbf{P}\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

En la primera columna se indican los valores posibles de la variable aleatoria X y en la primera fila, los valores posibles de Y; en la última columna y en la última fila se indican las probabilidades incondicionales de los valores posibles de X e Y, respectivamente. En cada casilla de la tabla que está en la intersección de la i-ésima fila y la j-ésima columna se señalan las probabilidades de aparición compatible del suceso

$$\{X = x_i,\ Y = y_j\},\ \text{o sea}\ p_{ji} = \mathbf{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\}.$$

El conjunto Ω para el experimento dado se compone de casos equiprobables que tienen la forma siguiente:

$$\Omega = \{(i, j, k) \mid i, j, k = 1, \ldots, 6\};$$

el número de elementos del conjunto dado $N(\Omega) = 6^3 = 216$ (esquema de elección de tres elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 6\}$ con devolución y ordenación). Nótese también que el experimento en cuestión puede considerarse como repetición de tres pruebas independientes con un mismo conjunto de casos elementales en cada ensayo $\Omega_i = \{1, 2, \ldots, 6\}$ para $i = 1, 2, 3$. Por eso el conjunto Ω es el producto directo $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ lo que corresponde a la notación citada anteriormente.

Las variables aleatorias X e Y están definidas en el conjunto Ω y asignan a cada caso elemental uno de sus valores posibles 0, 1, 2, ó 3 (conjuntos de valores posibles para ambas componentes coinciden).

Para el experimento dado es más fácil describir primeramente las leyes de distribución de las componentes X e Y tomadas por separado, o sea, responder a la pregunta c).

Al suceso $\{X = i\}$, $i = 0, 1, 2, 3$ le corresponde el conjunto de tales casos de Ω en los cuales se encuentran exactamente i veces el seis. La probabilidad del suceso en cuestión es igual a la de obtener i casos favorables en tres ensayos según el esquema de Bernoulli con la probabilidad igual a $p = 1/6$ de que en un ensayo suceda el caso favorable, por eso por la fórmula (7) § 2

$$\mathbf{P}\{X=i\} = P_{3,\,i}\left(\frac{1}{6}\right) = C_3^i\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{3-i}, \quad i=0, 1, 2, 3.$$

Análogamente, utilizando el esquema de Bernoulli respectivo para el cálculo de las probabilidades de los sucesos $\{Y = j\}$, $j = 0, 1, 2, 3$, obtenemos

$$\mathbf{P}\{Y=j\} = P_{3,\,j}\left(\frac{1}{2}\right) = C_3^j\left(\frac{1}{2}\right)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{3-j} = C_3^j \cdot \frac{1}{8}, \quad j=0, 1, 2, 3.$$

Ahora bien, llenamos la última columna y la última fila de la tabla.

a) La descripción de la ley de distribución del vector aleatorio del tipo discreto (X, Y) se puede efectuar en la sucesión siguiente. Obsérvese, ante todo, que

$$p_{31} = p_{32} = p_{33} = p_{13} = p_{23} = p_{22} = 0,$$

ya que las probabilidades dadas se refieren a los sucesos imposibles (los conjuntos de casos elementales que corresponden a estos sucesos son vacíos). Luego, de la condición de normalización (fórmula 1), encontramos:

$$p_{30} = \mathbf{P}\{x=3,\ y=0\} = \frac{1}{216}.$$

Utilizando la fórmula de multiplicación y el método del experimento auxiliar, obtenemos:

$$p_{20} = \mathbf{P}\{x=2,\ y=0\} = \mathbf{P}\{y=0\}\,\mathbf{P}\{x=2/y=0\} = \frac{1}{8}\cdot\mathbf{P}$$

{apariciones de dos seis en la prueba de elegir tres elementos, con devolución y ordenación, a partir del conjunto $E=\{2, 4, 6\}\}=$ $=\frac{1}{8}\cdot p_{3,2}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{36}$.

Volviendo a utilizar la condición de normalización, obtenemos

$$p_{21}=\frac{5}{72}-\frac{1}{36}=\frac{1}{24}.$$

Procediendo al igual que en caso de calcular la probabilidad p_{20}, hallamos:

$$p_{10}=\mathbf{P}\{y=0\}\cdot\mathbf{P}\{x=1/y=0\}=\frac{1}{8}\cdot p_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}.$$

Acto seguido, de la condición de normalización, tenemos:

$$p_{00}=\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}\right)=\frac{1}{27}.$$

Luego, con ayuda de la fórmula de multiplicación, obtenemos

$$p_{01}=\mathbf{P}\{x=0\}\cdot P\{y=1/x=0\}=\frac{125}{216}\cdot p_{3,1}\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{6}.$$

Las demás probabilidades quedadas se determinan partiendo de la condición de normalización en la sucesión siguiente:

$$p_{11}=\frac{1}{6},\quad p_{12}=\frac{1}{8},\quad p_{02}=\frac{1}{4},\quad p_{03}=\frac{1}{8}.$$

b) Las componentes X e Y son dependientes, ya que, por ejemplo,

$$p_{11}=\mathbf{P}\{X=1,\ Y=1\}=\frac{1}{6}\neq\mathbf{P}\{X=1\}\,\mathbf{P}\{Y=1\}=\frac{25}{192}.$$

c) La ley condicional de distribución de la componente aleatoria X a condición de que la componente Y tome el valor igual a 2 se determina por la fórmula (2):

$$\mathbf{P}\{X=i/Y=2\}=\frac{\mathbf{P}\{X=i,\ Y=2\}}{\mathbf{P}\{Y=2\}}=\frac{p_{i2}}{p_{\cdot 2}}=\frac{8}{3}p_{i2},\quad i=0,1,2,3.$$

Presentemos el resultado en forma de la tabla:

x_i	0	1	2	3	$\sum_{i=0}^{3}\mathbf{P}\{X=x_i/Y=2\}$
$\mathbf{P}\{X=x_i/Y=2\}$	2/3	1/3	0	0	1

Con esta condición la esperanza matemática condicional $\mathbf{M}[X/Y=2]=$ $=1/3$.

d) Las probabilidades buscadas se determinan como probabilidades de encontrarse en las regiones respectivas que en el caso del vector aleatorio bidimensional discreto no son más que conjuntos finitos (o infinitos) de puntos sobre el plano. En nuestro caso

$$\mathbf{P}\{X \geqslant Y\} = \sum_{i=0}^{3} \sum_{\substack{j=0 \\ j \leqslant i}}^{3} p_{ij},$$

lo que es igual a la suma de las probabilidades limitadas en la tabla por la línea de puntos, o sea, $\mathbf{P}\{X \geqslant Y\} = \frac{1}{3}$. De un modo análogo encontramos

$$\mathbf{P}\{X+Y \geqslant 2\} = 1 - \mathbf{P}\{X+Y < 2\} = 1 - p_{00} - p_{01} - p_{10} = \frac{20}{27}.$$

e) las características buscadas se calculan con ayuda de las fórmulas conocidas

$$m_X = \sum_{k=0}^{3} kp_{\cdot k} = 0{,}5, \quad m_Y = \sum_{k=0}^{3} kp_{\cdot k} = 1{,}5,$$

$$D_X = \alpha_{2,0} - m_X^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \approx 0{,}4167,$$

$$D_Y = \alpha_{0,2} - m_Y^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

$$K_{XY} = \alpha_{1,1} - m_x m_Y = -\frac{1}{4}, \quad \rho_{XY} \approx -0{,}447. \blacktriangleright$$

3.1. Se producen dos disparos contra un blanco en las condiciones invariables. La probabilidad de acertar el blanco con un disparo es igual a p. Las variables aleatorias son siguientes: X, el número de disparos hasta el primer impacto (inclusivamente), Y, el número de tiros fallados.

a) Describir la ley de distribución del vector aleatorio (X, Y) y las leyes de distribución de cada componente.

b) Calcular la probabilidad $\mathbf{P}\{X = Y\}$.

c) Calcular el coeficiente de correlación ρ_{XY}.

d) Determinar si son dependientes o independientes las componentes X e Y.

f) Hallar la esperanza matemática condicional de la variable aleatoria X a condición de que Y tome el valor 2.

3.2. Se lanzan dos dados iguales. Las variables aleatorias son las siguientes: X, el indicador de paridad de la suma de los puntos salidos (o sea, $X = 1$ si esta suma es par y $X = 0$ en el caso contrario); Y, el indicador de paridad del producto de los puntos salidos (o sea, $Y = 1$ si este producto es par e $Y = 0$ en el caso contrario).

a) Describir la ley de distribución del vector aleatorio (X, Y).

b) Calcular la función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$.

c) Calcular la covarianza de las componentes.

3.3. El número X se escoge al azar a partir de un conjunto de números enteros $\{1, 2, 3\}$. Luego de este mismo conjunto se elige a la suerte el número Y que es mayor que el primero o igual a éste.

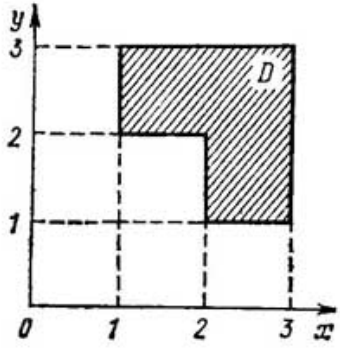


Fig. 121

a) Describir la ley de distribución del vector aleatorio (X, Y).

b) Determinar si son dependientes o independientes las variables aleatorias (X, Y).

c) Construir la ley condicional de distribución de la componente X a condición de que Y tome el valor igual a 2.

d) Calcular las características principales: m_X, m_Y, D_X, D_Y, K_{XY}, ρ_{XY}.

3.4. El vector aleatorio (X, Y) está distribuido por la ley con la función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$. Determinar: a) $\mathbf{P}\{(X, Y) \in D\}$ si la región D viene dada en la fig. 121; b) $\mathbf{P}\{X \geqslant 3,\ Y \geqslant 3\}$.

3.5*. En una fábrica los productos desechados debido al defecto α constituyen el 3% y debido al defecto β, el 4,5%. La producción útil es del 95%. Hallar el coeficiente de correlación de los defectos α y β.

3.6*. En una fábrica los desechos debido al defecto α constituyen el 6% con la particularidad de que entre los artículos desechados por el síntoma α en el 4% de los casos se encuentra el defecto β y en los artículos exentos del defecto α el defecto β se encuentra en el 1% de los casos. Hallar la probabilidad de encontrar el defecto β en toda la producción y el coeficiente de correlación entre los síntomas α y β.

3.7. La densidad de distribución de las probabilidades del vector aleatorio (X, Y) tiene la forma siguiente:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{para } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante c.

b) Determinar si son dependientes o no las componentes X e Y.

c) Calcular $\mathbf{P}\{X + Y < 1\}$.

d) Determinar la densidad incondicional de distribución de la componente Y.

e) Calcular el centro de varianza.

f) Calcular la función de distribución $F_X(x)$.

3.8. La densidad de distribución de las probabilidades de un vector aleatorio bidimensional (X, Y) tiene la forma siguiente:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c(xy + y^2) & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Calcular: a) el valor de la constante c; b) la probabilidad $\mathbf{P}\{X + Y < 2\}$; c) el centro de varianza.

3.9. Las coordenadas X, Y de un punto aleatorio sobre un plano tienen la distribución uniforme compatible dentro del rectángulo $G = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$.

a) Escribir la expresión general de la densidad de probabilidad de la distribución compatible de coordenadas del punto aleatorio (X, Y).

b) Escribir la expresión general de la función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$.

c) Calcular $p_i = \mathbf{P}\{(X, Y) \in G_i\}$, $i = 1, 2$, donde

$$G_1 = \{(x, y) \mid 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5;\ 1{,}5 \leqslant y \leqslant 2{,}5\},$$

$$G_2 = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1{,}5)^2 \leqslant 0{,}25\}.$$

d) Calcular el centro de dispersión (m_X, m_Y), así como las varianzas D_X y D_Y.

e) Determinar si son dependientes o no las coordenadas del punto aleatorio.

3.10. Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en un cuadrado cuyo lado es igual a a y cuyas diagonales coinciden con los ejes de coordenadas.

a) Escribir la expresión para la densidad de probabilidad $f_{X,Y}(x, y)$ de la distribución compatible de coordenadas del vector (X, Y).

b) Calcular las densidades incondicionales de cada una de las componentes y determinar si son dependientes o independientes estas componentes.

c) Calcular el coeficiente de correlación ρ_{XY}.

d) Calcular la esperanza matemática condicional $\mathbf{M}[Y/X = x]$.

3.11. Las variables aleatorias X e Y son independientes y están distribuidas cada una según la ley exponencial con los parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Hallar $\mathbf{P}\{X \geqslant \geqslant \lambda_1^{-1},\ Y \geqslant \lambda_2^{-1}\}$.

3.12*. En el esquema polinomial de sucesión de las pruebas con tres casos (véase § 2, p. 3) introduzcamos las designaciones siguientes: $p_1 = p$, $p_2 = q$, $p_3 = 1 - p - q$, $X_{n,1} = X$, $X_{n,2} = Y$, donde $X_{n,1}$ es el número de realizaciones exitosas del primer caso y $X_{n,2}$ es el número de realizaciones exitosas del segundo caso; obsérvese que como $k + m + l = n$, los sucesos $\{X = k, Y = m\}$ y $\{X = k, Y = m, X_{n,3} = l\}$ son equivalentes. Por eso al esquema indicado se le puede asignar la distribución bidimensional

$$\mathbf{P}\{X = k,\ Y = m\} = \frac{n!}{k!m!(n-k-m)!} p^k q^m (1 - p - q)^{n-k-m},$$

donde $k + m \leqslant n$; $k, m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Calcular m_X, m_Y, D_X, D_Y y ρ_{XY}.

3.13. La función de distribución compatible de dos variables aleatorias X e Y tiene la forma siguiente:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \min(x, y) < 0, \\ \min(x, y), & \text{si} \quad 0 \leqslant \min(x, y) < 1, \\ 1, & \text{si} \quad \min(x, y) \geqslant 1. \end{cases}$$

Hallar las leyes unidimensionales de distribución de las componentes y determinar si son dependientes o independientes estas últimas.

3.14. Las variables aleatorias X e Y son independientes y están distribuidas del modo siguiente: X, según la ley $N(1, 2)$; Y, según la ley $R(0, 2)$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{(X, Y) \in D\}$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$; $B = \{X > Y\}$.

3.15. Las coordenadas de los puntos sobre un plano son independientes y están distribuidas según las leyes $N(a, \sigma)$ y $N(b, \sigma)$.

a) Hallar el radio del círculo que tiene por centro el punto (a, b), siendo igual a 0,997 la probabilidad de encontrarse en este círculo.

b) Hallar las probabilidades de encontrarse en las regiones

$$D_1 = \{X - a > Y - b\},\ D_2 = \{\mid Y - b \mid < X - a\}.$$

2. Ley normal sobre un plano. Se dice que un vector aleatorio bidimensional (X, Y) *está distribuido según la ley normal* si la densidad compatible de distribución de las probabilidades de componentes aleatorias tiene la forma

$$f_{X,Y}(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right]\right\}, \quad (7)$$

donde (m_X, m_Y) es el centro de dispersión; σ_X, σ_Y, las desviaciones estándar de las componentes aleatorias del vector (X, Y); ρ_{XY}, el coeficiente de correlación.

Para la ley normal (¡y sólo para esta ley!) es válida la regla siguiente:

Si las componentes de un vector normal bidimensional no están correlacionadas ($\rho_{XY}=0$), *ellas son también independientes*, ya que en este caso

$$f_{X,Y}(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\left[\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\}=f_X(x)\,f_Y(y). \quad (8)$$

Los ejes de coordenadas Ox y Oy se llaman *ejes principales de varianza*. Además, si $\sigma_X=\sigma_Y=\sigma$ la varianza se llama *circular*. En el caso general ($\rho_{XY}\neq 0$, $\sigma_X\neq\sigma_Y$) se llama *elipse de dispersión* la elipse en cada punto de la cual la densidad tiene un mismo valor constante. La elipse en los puntos de la cual la densidad es constante e igual a

$$f_{X,Y}(x, y)=\text{const}=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}e^{-\frac{\rho^2}{2(1-\rho_{XY}^2)}},$$

se describe por la ecuación

$$\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}-\frac{2\rho_{XY}(x-m_X)(y-m_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}=\rho^2.$$

Con ayuda de la transformación del giro del sistema de coordenadas la densidad de distribución normal siempre puede ser reducida a la *forma canónica* (8) *con la elipse de principal varianza* que se describe por la ecuación

$$\frac{(x-m_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-m_Y)^2}{\sigma_Y^2}=\rho^2.$$

EJEMPLO 2. El vector aleatorio (X, Y) se subordina a la distribución normal canónica con los parámetros $m_X=m_Y=0$, σ_Y, σ_Y. Calcular la probabilidad de que el punto aleatorio (X, Y) se encuentre en la región $D\rho$ limitada por la elipse de varianza principal con los semiejes

$$a=\rho\sigma_Y,\ b=\rho\sigma_Y.$$

◀ La ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{(\rho\sigma_X)^2}+\frac{y^2}{(\rho\sigma_Y)^2}=1,$$

$$\mathbf{P}\{(X, Y)\in D_\rho\}=\iint\limits_{D_\rho} f_{X, Y}(x, y)\,dx\,dy.$$

Para calcular la integral pasemos al sistema polar de coordenadas

$$x=\sigma_X r\cos\varphi, \quad y=\sigma_Y r\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

El jacobiano de esta transformación $I=\sigma_X\sigma_Y r$. En este caso la ecuación de la elipse se transforma en la ecuación de la circunferencia de radio ρ. Por eso

$$\mathbf{P}\{(X, Y)\in D_\rho\}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\rho} re^{-\frac{r^2}{2}}\,dr=1-e^{-\frac{\rho^2}{2}}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 3. Un vector aleatorio bidimensional está distribuido según la ley normal con la densidad compatible de probabilidades que se define por la fórmula (7). Hallar la densidad incondicional de probabilidades de la componente X, la densidad condicional $f_Y(y/x)$ y la esperanza matemática condicional $\mathbf{M}[Y/X=x]$.

◀ Por la fórmula (3)

$$f_X(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X, Y}(x, y)\,dy.$$

Hagamos la sustitución de las variables: $\frac{x-m_X}{\sqrt{2}\sigma_X}=u$, $\frac{y-m_Y}{\sqrt{2}\sigma_Y}=v$.

Entonces

$$f^X(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left(-\frac{u^2}{1-\rho_{XY}^2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{1-\rho_{XY}^2}v^2+\frac{2\rho_{XY}uv}{1-\rho_{XY}^2}\right)dv.$$

Añadiendo hasta el cuadrado perfecto en el índice de la función exponencial bajo el signo de la integral, obtenemos la integral de Poisson:

$$f^X(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma_X\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left(-\frac{u^2-u\rho_{XY}^2}{1-\rho_{XY}^2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\left(\frac{v-u\rho_{XY}}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\right)^2\right\}dv=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-u^2}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Encontramos la densidad condicional por la fórmula (4):

$$f_Y(y/x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)\sigma_Y^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[y-m_Y-\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X)\right]^2\right\}.$$

Esto significa que $f_Y(y/x)$ es la densidad gausiana con los parámetros que tienen el sentido de la esperanza matemática condicional y de la varianza condicional:

$$\mathbf{M}[Y/X=x]=m_Y+\rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-m_X),$$

$$\mathbf{D}[Y/X=x]=\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2). \blacktriangleright$$

3.16. Un punto aleatorio sobre un plano (X, Y) está distribuido según la ley normal canónica con el centro de varianza $(m_X, m_Y) = (0, 1)$ y las desviaciones estándar $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$. Calcular la probabilidad de que el punto aleatorio se encuentre en el rectángulo que tiene por vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ y $(-1, 3)$.

3.17. Un punto aleatorio sobre un plano (X, Y) está distribuido según la ley normal circular ($\rho_{XY} = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma = 1$) que tiene por centro de varianza el origen de coordenadas. Calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{Y > X\}$, $B = \{|Y| > X\}$, $C = \{Y < 3X\}$, $D = \{|X| < 1\}$, $E = \{X < 1, Y < 2\}$.

3.18. Un punto aleatorio (X, Y) está distribuido según la ley normal circular con los parámetros $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 2$. Hallar la probabilidad de que el punto aleatorio se encuentre en las regiones G_i, $i = 1, 2, 3$, donde

$G_1 = \{(x, y) \mid 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ (anillo),

$G_2 = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leqslant 3\}$ (cuadrado),

$G_3 = \{(r, \varphi) \mid 0 < r \leqslant 2, \quad 0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}\}$ (sèctor),

(r, φ) son las coordenadas polares del punto.

3.19*. Un punto aleatorio sobre un plano (X, Y) está distribuido según la ley normal circular con los parámetros $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Hallar la probabilidad de que el punto aleatorio se encuentre en las regiones G_i, $i = 1, 2, 3, 4$, donde G_1 es un triángulo que tiene por vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, G_2 es un triángulo que tiene por vér-

tices (0,0), (1,1), (2,1), G_3 es un trapecio que tiene por vértices (1, 0), (2,0), (2,2) (1,1), G_4 es un triángulo que tiene por vértices (2, 0), (2,2), (1,1).

3.20. Se dan las siguientes características de un vector normal binomial: $m_X = -2$, $m_Y = 3$ y la matriz covariante

$$K = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Escribir la expresión para la densidad de distribución de las probabilidades $f_{X,Y}(x, y)$ y calcular la probabilidad de que se encuentre en la elipse principal de varianza que tiene por semiejes $a = 2\sigma_X$, $b = 2\sigma_Y$.

3.21. Un vector aleatorio (X, Y) se subordina a la distribución normal con los parámetros $m_X = -1$, $m_Y = 1$, $\sigma_X = 1$, $\sigma_Y = 2$, $\rho_{XY} = 0$. Escribir la ecuación de la elipse principal que limita la región G si la probabilidad de que el punto aleatorio (X, Y) se encuentre en esta región es igual a 0,9.

3.22. La ley de distribución de un vector aleatorio bidimensional se describe por la densidad de distribución de las probabilidades que tiene la forma siguiente:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}.$$

Escribir la expresión para la densidad incondicional $f_X(x)$ e indicar los valores de los parámetros principales de la distribución compatible.

3.23. Se efectúa un tiro contra un blanco puntiforme (de pequeño tamaño) cuya zona de destrucción no es más que un círculo de radio r que tiene por centro el origen de coordenadas. La varianza del punto de impacto del proyectil es normal circular con los parámetros $m_X = m_Y = 0$, $\sigma_X = \sigma_Y = 2r$. ¿Cuántos disparos es necesario producir para acertar al blanco con una probabilidad que no sea menor que 0,95?

§ 4. Funciones de variables aleatorias

1. Características numéricas de las fuciones de variables aleatorias. Si X es una variable aleatoria discreta o continua cuya ley de distribución es conocida e $Y = \varphi(X)$, donde φ es la función no aleatoria, entonces la esperanza matemática y la varianza de la variable

aleatoria Y, en el caso de que existan, pueden ser halladas con ayuda de las fórmulas

$$m_Y = \mathbf{M}[Y] =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.,} \\ \sum\limits_k \varphi(x_k) \mathbf{P}\{X = x_k\}, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.;} \end{cases}$$

$$D_Y = \mathbf{M}[\mathring{Y}^2] =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi(x) - m_Y)^2 f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.,} \\ \sum\limits_k (\varphi(x_k) - m_Y)^2 \mathbf{P}\{X = x_k\}, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.} \end{cases}$$

Las fórmulas análogas tienen lugar también para todos los demás momentos iniciales y centrales de distribución de la variable aleatoria Y que es una función no aleatoria de X. Ahora bien, para calcular las características numéricas de una función no aleatoria de una variable aleatoria no es necesario conocer la ley de distribución de la variable aleatoria Y que depende de X sino basta conocer la ley de distribución del argumento aleatorio X. La regla que hemos enunciado se generaliza, naturalmente, para las funciones de un mayor número de variables aleatorias. Por ejemplo, si $Z = \varphi(X, Y)$, entonces

$$m_Z = \mathbf{M}[Z] =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy, & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.C.,} \\ \sum\limits_i \sum\limits_j \varphi(x_i, y_j) \mathbf{P}\{X = x_i,\ Y = y_j\}, & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.D.} \end{cases}$$

En los casos en que la dependencia funcional se describe por el polinomio de n variables aleatorias cuyas características están conocidas, para calcular las esperanzas matemáticas y varianzas de tales funciones es útil usar unas u otras propiedades citadas posteriormente de la esperanza matemática y la varianza.

1) *Para cualesquiera variables aleatorias* X_k *con* $\mathbf{M}[X_k]$ *finitas* $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\mathbf{M}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{M}[X_k] + b \text{ (propiedad de linealidad).}$$

2) *Si* $X \geqslant 0$ y $\mathbf{M}[X]$ *existe, entonces* $\mathbf{M}[X] \geqslant 0$.

3) *Si* $X \geqslant 0$ y $\mathbf{M}[X] = 0$, *entonces* $\mathbf{P}\{X = 0\} = 1$.

4) *Para cualesquiera variables aleatorias* X_k *con* $\mathbf{D}[X_k]$ *finitas* $(k =$

$= 1, 2, \ldots, n)$

$$\mathbf{D}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k + b\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbf{D}[X_k] + 2 \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i<j}}^{n} a_i a_j K_{ij},$$

donde $K_{ij} = M[\mathring{X}_i \mathring{X}_j]$. *En particular,*

$$\mathbf{D}[aX + bY + c] = a^2 \mathbf{D}[X] + b^2 \mathbf{D}[Y] + 2ab K_{XY}.$$

5) $\mathbf{M}[XY] = \mathbf{M}[X]\,\mathbf{M}[Y] + K_{XY}$.

6) $\mathbf{M}^2[XY] \leqslant \mathbf{M}[X^2]\,\mathbf{M}[Y^2]$ (*desigualdad de Cauchy—Buniakovski*).

7) *Si X e Y son independientes y tienen las varianzas finitas, entonces*

$$\mathbf{D}[XY] = \mathbf{D}[X]\,\mathbf{D}[Y] + m_X^2\,\mathbf{D}[Y] + m_Y^2\,\mathbf{D}[X].$$

La propiedad 1) puede ser notada en una forma más general, utilizando las designaciones matriciales:

$$1^*)\ \mathbf{M}[AXB + C] = A\mathbf{M}[X]\,B + C,$$

donde X es el vector columna aleatorio n-dimensional; $\mathbf{M}[X]$ es el vector columna n-dimensional no aleatorio cuyas componentes son iguales a las esperanzas matemáticas de las componentes aleatorias del vector X; A, B y C son las matrices constantes de órdenes $m \times n$, $n \times p$ y $m \times p$, respectivamente. (La propiedad 1) es un caso particular de la propiedad 1^*) cuando $m = p = 1$.)

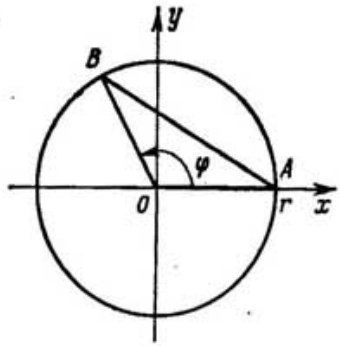


Fig. 122

EJEMPLO 1. En una circunferencia de radio r se ponen al azar dos puntos que luego se unen entre sí y con el centro de la circunferencia. Hallar la esperanza matemática del área del triángulo obtenido.

◀ Puesto que en la prueba dada es importante sólo la disposición recíproca de los puntos en la circunferencia, se puede considerar que el primer punto tiene las coordenadas fijas $(r, 0)$. Entonces la posición del segundo punto, puesto al azar en la circunferencia, se determina por completo por el ángulo aleatorio Φ entre el sentido positivo del eje Ox y el radio vector trazado al segundo punto según se muestra en la fig. 122. Como todos los valores del ángulo Φ son igualmente posibles dentro de los límites de 0 a 2π, se puede considerar que la variable aleatoria Φ está distribuida por la ley R $(0, 2\pi)$. Por eso

$$f_\Phi(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{si } \varphi \notin (0, 2\pi), \\ \dfrac{1}{2\pi}, & \text{si } \varphi \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Para los puntos fijos A y B el área del triángulo OAB se escribe en la forma

$$S = \frac{r^2}{2} |\operatorname{sen} \Phi|.$$

Por la fórmula válida para una V.A.T.C. tenemos

$$\mathbf{M}[S]=\frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}|\operatorname{sen}\varphi|\,\frac{1}{2\pi}\,d\varphi=\frac{r^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=\frac{r^2}{\pi}.\ \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. A la entrada de un aparato de medida se suministra un vector aleatorio (X, Y) que tiene las características siguientes: $m_X=-1$, $m_Y=1$, $\sigma_X=2$, $\sigma_Y=3$, $\rho_{XY}=0{,}5$. A la salida del aparato se mide la magnitud $Z=(X-Y)^2$. Determinar la esperanza matemática de la variable aleatoria Z.

◀ Puesto que la dependencia funcional de Z de las componentes X e Y se describe por el polinomio, hagamos uso de las propiedades 1) y 5) de la esperanza matemática:

$$\mathbf{M}[Z]=\mathbf{M}[X^2+Y^2-2XY]=\mathbf{M}[X^2]+\mathbf{M}[Y^2]-2\mathbf{M}[XY]=$$
$$=D_X+m_X^2+D_Y+m_Y^2-2\,(m_Xm_Y+K_{XY})=11.\ \blacktriangleright$$

4.1. En una circunferencia de radio r se ponen al azar dos puntos. Hallar la esperanza matemática y la varianza de la longitud aleatoria L de la cuerda que une estos puntos.

4.2. En un segmento AB de longitud l se pone al azar un punto M y se traza la circunferencia de radio AM. Hallar $\mathbf{M}[L]$ y $\mathbf{D}[L]$, $\mathbf{M}[S]$ y $\mathbf{D}[S]$, donde L es la longitud de la circunferencia, S es el área del círculo.

4.3. En un segmento $[0, l]$ se ponen al azar dos puntos A y B. Hallar $\mathbf{M}[R]$ y $\mathbf{M}[S]$, donde R es la distancia aleatoria entre los puntos A y B, S es el cuadrado de lado igual a R.

4.4. En la pantalla del indicador de un radar panorámico el impulso reflejado por un blanco se representa en forma del punto luminoso que tiene por coordenadas (x, y). Al explorar un objetivo de turno el punto luminoso aparece de un modo aleatorio en cualquier sitio del círculo de radio a. Hallar la esperanza matemática y la varianza de la distancia R entre el punto y el centro de la pantalla.

4.5. En dos lados contiguos de un rectángulo, cuyos lados son a y b $(a>b)$, se pone al azar e independientemente un punto en cada uno. Hallar la esperanza matemática y la varianza del cuadrado de la distancia R^2 entre estos puntos.

4.6. En una circunferencia de radio a se ponen al azar tres puntos A, B y C. Hallar la esperanza matemática del área del triángulo ABC.

4.7. Un punto aleatorio (X, Y) se caracteriza por el centro de dispersión $(-1, 1)$ y por la matriz covariante

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar la varianza de la variable aleatoria $Z = 2X - 4Y + 3$.

4.8. En un rectángulo que tiene por vértices (0, 0), (2, 0), (2, 1) y (0, 1) se pone al azar un punto. Designemos con (X, Y) las coordenadas aleatorias de este punto. Calcular $\mathbf{M}[X \pm Y]$, $\mathbf{D}[X \pm Y]$, $\mathbf{M}[X^2 + Y^2]$, $\mathbf{M}[XY]$ y $\mathbf{D}[XY]$.

4.9*. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las variables aleatorias normalizadas que están igualmente correlacionadas entre sí (o sea, $\rho_{ij} = \rho$ para todos los $i \neq j$). Mostrar que $\rho \geqslant -\frac{1}{n-1}$

4.10*. Sean X e Y dos variables aleatorias normalizadas que tienen por coeficiente de correlación $\rho_{XY} = \rho$. Demostrar que

$$1 \leqslant \mathbf{M}[\max(X^2, Y^2)] \leqslant 1 + \sqrt{1-\rho^2}.$$

4.11*. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(-1, 2)$ y una variable aleatoria Y, que es independiente de la primera, está distribuida según la ley $R(-1, 3)$. Calcular $\mathbf{M}[Z]$ y $\mathbf{D}[Z]$, donde $Z = X + Y - XY$.

4.12*. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(1, 1)$. Calcular la matriz covariante del vector aleatorio $Y = (X, X^2, X^3)$.

4.13*. La variable aleatoria Φ, o sea el ángulo de giro del limbo azimutal de un aparato, puede tomar una colección finita de valores $\varphi_k = k \cdot \frac{2\pi}{n} (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ con probabilidades iguales. En la salida del aparato se mide la variable aleatoria $Y = \operatorname{sen} \Phi$. Hallar $\mathbf{M}[Y]$ y $\mathbf{D}[Y]$.

4.14. Una variable aleatoria Φ toma los valores discretos $\varphi_k = \frac{k\pi}{2}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ con probabilidades que decrecen en progresión geométrica. Hallar $\mathbf{M}[Y]$ y $\mathbf{D}[Y]$, $\mathbf{M}[Z]$ y $\mathbf{D}[Z]$, donde $Y = \operatorname{sen} \Phi$, $Z = \cos \Phi$.

4.15. En una urna hay 6 bolas blancas y 4 negras. De la urna se sacan consecutivamente y sin devolución 5 bolas. Designemos con X_k $(k = 1, 2, \ldots, 5)$ el indicador de aparición de una bola blanca en la k-ésima extracción contada (corresponde a un caso favorable en la k-ésima prueba), X es el número de bolas blancas en la muestra.

a**) Mostrar que las variables aleatorias X_k son depen-

dientes en conjunto, pero tienen una misma distribución incondicional de las probabilidades. Calcular la covarianza de las variables aleatorias X_1 y X_2.

b) Calcular directamente $\mathbf{M}[X]$, utilizando el hecho de que la variable aleatoria X tiene una distribución hipergeométrica (véase § 2, p. 2, pág. 82) con los parámetros $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $n = 5$.

c) Calcular $\mathbf{M}[X]$ y $\mathbf{D}[X]$, utilizando las propiedades de la esperanza matemática y de la varianza de la suma y el resultado a).

4.16*. La prueba consiste en que el punto X_1 se escoge al azar en el segmento (0, 1), luego el punto X_2 se escoge al azar en el segmento $(X_1, 1)$, . . . , el punto X_n se escoge al azar en el segmento $(X_{n-1}, 1)$. Hallar $\mathbf{M}[X_n]$.

4.17*. Una línea automática fabrica piezas que satisfacen la norma con la probabilidad igual a p y no satisfacen la norma con la probabilidad $q = 1 - p$. El reajuste de la línea se lleva a cabo después de obtenidas k piezas no tipificadas. La variable aleatoria X es el número de piezas salidas de la línea automática entre dos reajustes. Describir la ley de distribución de la variable aleatoria X y determinar m_X y D_X, utilizando las propiedades de la esperanza matemática y de la varianza de la suma.

4.18*. Se realizan pruebas independientes sucesivas según el esquema de Bernoulli con la probabilidad de producirse el caso favorable, en una prueba, igual a p. Llamemos «serie de los casos favorables» una cadena finita de pruebas sucesivas en la cual cada prueba termina con un caso favorable, mientras que la prueba que precede la cadena y la prueba que le sigue terminan con un caso desfavorable. Sea Z_n el número de series de los casos favorables en n pruebas. Hallar $\mathbf{M}[Z_n]$.

4.19. Las bolas para cojinetes se fabrican de un acero cuya densidad $\rho = 7{,}8$ g/cm^3. Se consideran útiles si pasan a través del orificio de diámetro $d_2 = 10{,}1$ mm y no pasan a través del orificio de diámetro $d_1 = 9{,}9$ mm. La tecnología de producción de las bolas es tal que el diámetro de la bola puede considerarse como variable aleatoria normalmente distribuida con los parámetros $m_X = \frac{d_1 + d_2}{2}$, $\sigma_X = \frac{d_2 - d_1}{5}$. Hallar la esperanza matemática y la desviación estándar de la masa de la bola Z en gramos con tres signos justos después de la coma.

4.20. En las condiciones del problema precedente supongamos que el diámetro de las bolas está distribuido uniformemente dentro de los límites del campo de tolerancia (según la ley $R(d_1, d_2)$) con los mismos valores de d_1, d_2 y ρ. Hallar la esperanza matemática y la desviación estándar de la masa de la bola Z con tres signos justos después de la coma.

4.21*. Una variable aleatoria Z es representable en la forma

$$Z = \sum_{k=1}^{Y} X_k,$$

donde X_k ($k = 1, 2, \ldots$) son las variables aleatorias independientes de dos en dos, igualmente distribuidas según la ley $N(a, \sigma)$, mientras que la variable aleatoria Y está distribuida según la ley geométrica con el parámetro $p > 0$ (véase el problema 2.41). Hallar m_Z y D_Z.

4.22. Dos ajedrecistas del mismo rango han convenido en jugar un match en las condiciones siguientes. El número total de partidas no se limita, por cada partida ganada el afortunado obtiene un punto, las tablas no se toman en consideración. El vencedor del match será el que sea el primero en obtener 6 puntos. Determinar el número medio de las partidas jugadas en el match dado si la probabilidad de que uno de los jugadores gane una partida de turno es igual a p ($p < 1/2$) y la probabilidad de que sean las tablas es igual a $1 - 2p$.

◀ Designemos con X el número de partidas jugadas en el match, X_k ($k = 1, 2, \ldots, 11$) es el número de partidas jugadas a partir de la victoria $(k-1)$ de cualquiera de los participantes hasta la k-ésima victoria de cualquiera de los mismos (inclusivamente), Z_m ($m = 1, 2, \ldots, 11$) es el número de partidas jugadas antes de que tenga lugar la m-ésima partida no empatada, inclusivamente. Es evidente que $Z_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$. Puesto que la probabilidad de una partida no empatada es igual a $2p$, X_k (para cualquiera k) se subordina a la distribución geométrica (véase el problema 2.41) con el parámetro $2p$, por eso $\mathbf{M}[X_k] = \frac{1}{2p}$. En consonancia con la propiedad 1) de la esperanza matemática $\mathbf{M}[Z_m] = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{M}[X_k] = \frac{m}{2p}$. Designemos con Y el número de partidas no empatadas del match. El conjunto de posibles valores de la variable aleatoria Y: $\{6, 7, \ldots, 11\}$. Es evidente que el suceso $\{Y = 6 + k\}$ ($k = 0, 1, \ldots, 5$) significa que uno de los participantes ha ganado el match, obteniendo 6 puntos, y el número total

de partidas no empatadas es igual a $6 + k$. Ahora bien, $\mathbf{P}\{Y = 6 + k\} = \mathbf{P}$ {el primer participante ha ganado el match, siendo igual a $6 + k$ el número de partidas no empatadas} + $\mathbf{P}$ {el segundo participante ha ganado el match, siendo igual a $6 + k$ el número total de partidas no empatadas} = $2\mathbf{P}$ {componer a la ventura una palabra de $(6 + k)$ letras con ayuda del aflabeto constituido por dos letras $\{P, S\}$ (P quiere decir que ha ganado el primero; S, ha ganado el segundo) y la palabra debe contener 6 letras P y terminar en la letra P} = $= \frac{C_5^k + k}{2^{5+k}}$ $(k = 0, .1. \ldots, 5)$. Determinemos la esperanza matemática condicional

$$\mathbf{M}[X/Y = 6 + k] = \mathbf{M}[Z_{6+k}] = \frac{6+k}{2p}.$$

Conforme a la fórmula (6), el § 3, de la esperanza matemática total

$$\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[\mathbf{M}[X/Y]] =$$

$$= \sum_{k=0}^{5} \mathbf{P}\{Y = 6+k\}\, \mathbf{M}[X/Y = 6+k] = \sum_{k=0}^{5} \frac{C_{5+k}^k}{2^{k+5}} \frac{6+k}{2p} = \frac{4{,}6465}{p}.$$

Puesto que posibles valores de X son los números naturales, en calidad de $\mathbf{M}[X]$ es necesario tomar el número natural más próximo, pero no menor que $\frac{4{,}6465}{p}$. Por ejemplo, para $p = \frac{1}{4}$ tenemos $\mathbf{M}[X] = 19$. ▶

4.23*. En n buzones que hay en el distrito dado de la ciudad se depositan cartas, una carta en cada buzón, durante un lapso prolongado.

a) Hallar la esperanza matemática $\mathbf{M}[X_n]$ del número total de cartas depositadas hasta el instante en que no queden buzones vacíos.

b) Obtener los valores numéricos para $n = 2; 5; 10; 100$.

2. Funciones características de variables aleatorias. Si $Z = X + iY$ es una variable aleatoria de valor complejo, donde X e Y son variables aleatorias reales, entonces $\mathbf{M}[Z] = \mathbf{M}[X] + i\mathbf{M}[Y]$.

Se llama *función característica* $E_X(t)$ de una variable aleatoria X la función no aleatoria de valor complejo del argumento real t, que es definida por la igualdad

$$E_X(t) = \mathbf{M}[e^{itX}] =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_k e^{itx_k} \mathbf{P}\{X = x_k\}, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.D.,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx, & \text{si } X \text{ es una V.A.T.C.} \end{cases}$$

Las propiedades de la función característica son las siguientes:

1. $E_X(0) = 1$, $|E_X(t)| \leqslant 1$.

2. Si $E_X(t)$ es la función característica de la variable aleatoria X e $Y = aX + b$, entonces

$$E_Y(t) = e^{itb} E_X(at).$$

3. Si existe el m-ésimo momento $\mathbf{M}[|X|^m]$, entonces para $t = 0$ existen las derivadas de la función característica $E_X(t)$ hasta el m-ésimo orden, inclusivamente, con la particularidad de que

$$\left.\frac{d^k E_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k \alpha_k, \text{ donde } \alpha_k = \mathbf{M}[X^k],\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

4. Si $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ y además $\{X_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ son independientes en conjunto, entonces $E_Y(t) = E_{X_1}(t)\, E_{X_2}(t) \ldots E_{X_n}(t)$.

5. $\overline{E_X(t)} = E_X(-t) = E_{-X}(t)$, donde la raya significa la operación de la unión compleja. En particular, de aquí se deduce que si $E_X(t)$ es una función real, entonces será obligatoriamente par.

6. Por la función característica $E_X(t)$ se reconstruye unívocamente la función de distribución $F_X(X)$. Si x es una V.A.T.C. (o sea para ella existe la densidad) y la función $E_X(t)$ es absolutamente integrable, entonces

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} E_X(t)\, dt.$$

Se denomina *función característica del vector aleatorio* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ la función no aleatoria de valor complejo de n variables reales $t_1, t_2, \ldots, t_n$, que es definida por la igualdad

$$E_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbf{M}\left[e^{i \sum_{k=1}^{n} t_k X_k}\right].$$

EJEMPLO 3. Una variable aleatoria X se subordina a la ley de distribución $N(m, \sigma)$. Hallar la función característica de esta variable.

◀ Introduzcamos la variable aleatoria $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$. De acuerdo con las propiedades de la esperanza matemática y la varianza tenemos

$$\mathbf{M}[Y] = \frac{1}{\sigma} \mathbf{M}[X - m] = 0, \quad \mathbf{D}[Y] = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{M}[(X - m)^2] = 1.$$

Ahora bien, Y es una variable aleatoria estandarizada. Además, puesto que la operación de estandarización no cambia la forma de la ley de distribución (véase el problema 4.36), entonces Y está distribuida según

la ley N (0, 1). Por definición de la función característica

$$E_Y(t)=\mathbf{M}[e^{itY}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-it}^{+\infty-it}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

(El paso de la integración sobre el contorno $L=(-\infty,\ -it,\ +\infty\ -it)$ a la integración sobre el eje real se justifica por la analiticidad de la función subintegral en la parte del semiplano inferior, limitada por el eje real y la recta L, y por la posibilidad de deformar el contorno de integración en la región de analiticidad de acuerdo con el teorema de Cauchy.) Puesto que $X=\sigma Y+m$, entonces conforme a la propiedad 2 de la función característica

$$E_X(t)=e^{itm}e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 4. Indicar, cuáles de las funciones citadas posteriormente de la variable real t no son funciones características y por qué:

$$E_1(t)=\frac{1}{1+t},\quad E_2(t)=\frac{1}{1+t^2},\quad E_3(t)=\operatorname{sen} bt,$$

$$E_4(t)=\cos bt,\quad E_5(t)=1-it.$$

◀ No son funciones características $E_1(t)$, $E_3(t)$ (no se cumple la propiedad 5) y $E_5(t)$ (no se cumple la propiedad 1). ▶

EJEMPLO 5. Hallar la función característica de una variable aleatoria X distribuida según la ley de Poisson con el parametro λ y con la ayuda de esta función calcular m_X y D_X.

◀ Por definición de la función característica

$$E_X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

De acuerdo con la propiedad 3 tenemos

$$i\alpha_1=E_X'(t)\,|_{t=0}=e^{\lambda(e^{it}-1)}\lambda ie^{it}\,|_{t=0}=\lambda i,$$

por consiguiente,

$$m^X=\alpha_1=\lambda.$$

Luego, según la misma propiedad

$$i^2\alpha_2 = E''_X(t)\,|_{t=0} = i\lambda(1+\lambda ie^{it})\,e^{it+\lambda(e^{it}-1)}\,|_{t=0} =$$

$$= i^2\lambda(1+\lambda), \text{ o sea, } \alpha_2 = \lambda(1+\lambda).$$

Así pues,

$$D_X = \alpha_2 - m_X^2 = \lambda+\lambda^2-\lambda^2 = \lambda. \blacktriangleright$$

4.24. Se llevan a cabo pruebas independientes sucesivas con dos casos. Las variables aleatorias son las siguientes: I_k, el indicador del caso favorable en la k-ésima prueba; X, el número de casos favorables en n pruebas. Construir la función característica para I_k y, utilizando las propiedades de la misma, hallar la función característica de la variable aleatoria X, si

a) la probabilidad de que se produzca un caso favorable no varía de una prueba a otra y es igual a p;

q) la probabilidad de que suceda un caso favorable en la k-ésima prueba es igual a p_k.

4.25. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley binomial con los parámetros n y p. Con ayuda de la función característica hallar las características principales: m_X, D_X, a_X y e_X.

4.26. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley de Pascal con el parámetro $a > 0$ (véase el problema 2.10). Determinar la función característica $E_X(t)$ y con su ayuda hallar m_X y D_X.

4.27*. Una variable aleatoria X se subordina a la *ley de Cauchy con los parámetros* $c \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$, siendo la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{(x-c)^2+a^2}.$$

Hallar la función característica de esta variable.

4.28. Una variable aleatoria X se subordina a la distribución exponencial con el parámetro λ. Con ayuda de la función característica calcular las características principales: m_X, D_X, a_X.

4.29. Una variable aleatoria X se subordina a la ley uniforme de distribución en el segmento $[a, b]$ (a la ley $R(a, b)$). Utilizando la función característica, hallar m_X y D_X.

4.30. Se da la función característica de una variable aleato-

ria continua X:

$$E_X(t) = \frac{e^{itm}}{1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Hallar la expresión para la densidad de distribución de las probabilidades y determinar la forma de la ley de distribución y la relación de las características principales de distribución m_X y σ_X con los parámetros m y σ.

4.31.** Demostrar la siguiente propiedad de la función característica:

$$|E_X(t+\tau) - E_X(t)| \leqslant \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} E_X(\tau))},$$

donde

$$\operatorname{Re} E_X(\tau) = \operatorname{Re} \mathbf{M}[e^{itX}] = \mathbf{M}[\cos tX].$$

4.32*. Supongamos que para cierto valor del argumento $t = T \neq 0$ la función característica $E_X(T) = 1$. Demostrar que en este caso $E_X(t)$ es una función periódica con el período T.

4.33*. La ley de distribución de una variable aleatoria discreta X se llama *reticulada* con el paso h si el conjunto de valores de esta variable forma una progresión aritmética, o sea, $x_k = a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Demostrar que para que la variable aleatoria X sea reticulada es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad

$$E_X\left(\frac{2\pi}{h}\right) = 1.$$

4.34. Sea X la variable aleatoria del tipo continuo con la función de distribución $F_X(x)$. Hallar la función característica de la variable aleatoria $Y = aF_X(X) + b$. ¿A qué distribución corresponde la forma de esta función característica?

4.35. Sea X la variable aleatoria del tipo continuo con la función de distribución $F_X(x)$. Hallar la función característica de la variable aleatoria $Y = -\ln F_X(X)$ e indicar, a qué distribución esta función corresponde.

3. Leyes de distribución de las funciones de variables aleatorias. Si X es una V.A.T.D. e $Y = \varphi(X)$, donde φ es una función no aleatoria, entonces Y es también una V.A.T.D. y los valores posibles de ésta $y_k = \varphi(x_k)$. Si en este caso todos los y_k son diferentes (por ejemplo, la función $\varphi(x)$ es estrictamente monótona), entonces $\mathbf{P}\{Y = y_k\} = \mathbf{P}\{X = x_k\}$. Además, si entre y_k hay valores iguales, en-

tonces

$$\mathbf{P}\{Y=y_k\}=\sum_{i:\varphi(x_i)=y_k}\mathbf{P}\{X=x_i\}$$

(o sea, es necesario sumar las probabilidades de los valores de x_i para los cuales $\varphi(x_i)=y_k$).

Si X es una V.A.T.C. e $Y=\varphi(X)$, y además, $\varphi(x)$ es una función continuamente derivable monótona creciente, entonces

$$F_Y(y)=\mathbf{P}\{Y<y\}=\int_{-\infty}^{\varphi^{-1}(y)} f_X(x)\,dx,$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=f_X(\varphi^{-1}(y))\left|\frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}\right|,$$

donde $\varphi^{-1}(y)$ es la función inversa respecto a $\varphi(x)$. Además, si $\varphi(x)$ es una función no monótona, entonces

$$F_Y(y)=\sum_i\int_{\Delta_i(y)} f_X(x)\,dx,$$

donde $\Delta_i(y)$ designa el i-ésimo intervalo sobre el eje Ox en el cual $\varphi(x)<y$. La densidad $f_Y(y)$ se obtiene derivando $F_Y(y)$ respecto a y.

Si (X, Y) es un vector aleatorio con la ley de distribución dada y $Z=\varphi(X, Y)$, donde $\varphi(x, y)$ es una función no aleatoria arbitraria, entonces

$$F_Z(z)=\mathbf{P}\{Z<z\}=\begin{cases}\displaystyle\sum_i\sum_j p_{ij}, & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.D.,}\\ \varphi(x_i, y_j)<z & \\ \displaystyle\iint_{\varphi(x, y)<z} f(x, y)\,dx\,dy, & \\ & \text{si } (X, Y) \text{ es un Vct.A.T.C.}\end{cases}$$

Enconrada la función de distribución $F_Z(z)$, luego con ayuda de las reglas conocidas se puede hallar la ley de distribución de la variable aleatoria Z. En particular, la densidad de probabilidad $f_Z(z)$ para el caso de un vector continuo (X, Y) se encuentra derivando $F_Z(z)$ respecto a z si en el punto z la función $F_Z(z)$ es derivable.

EJEMPLO 6. Una variable aleatoria Φ toma con igual probabilidad cualquier valor de un número finito de $\varphi_k=\frac{k\pi}{n}$, $k=0, 1, \ldots, n$. Hallar la ley de distribución de la variable aleatoria $Y=\operatorname{sen}\Phi$.

◀ En virtud de la equiprobabilidad de posibles valores de Φ tenemos $\mathbf{P}\{\Phi=\varphi_k\}=\frac{1}{n+1}$. Según los datos $y_k=\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}$. Puesto que al valor $y_0=0$ le corresponden dos valores posibles de Φ: $\varphi_0=0$ y $\varphi_n=\pi$, entonces $\mathbf{P}\{Y=y_0\}=\mathbf{P}\{\Phi=0\}+\mathbf{P}\{\Phi=\pi\}=\frac{2}{n+1}$.

Análogamente, $\mathbf{P}\left\{Y=y_1=\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}\right\}=\mathbf{P}\left\{\Phi=\frac{\pi}{n}\right\}+\mathbf{P}\left\{\Phi=\right.$ $\left.=\frac{n-1}{n}\pi\right\}=\frac{2}{n+1}$, etc. Así pues, para n impar la ley de distribución de la variable aleatoria Y se describe del modo siguiente:

$$\mathbf{P}\left\{Y=\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right\}=\frac{2}{n+1}, \quad k=0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

Para n par

$$\mathbf{P}\left\{Y=\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right\}=\begin{cases}\frac{2}{n+1}, & \text{si } k=0, 1, \ldots, \frac{n-2}{2}.\\ \frac{1}{n+1}, & \text{si } k=\frac{n}{2}. \blacktriangleright\end{cases}$$

EJEMPLO 7. Una variable aleatoria X se subordina a la ley de distribución $N(m, \sigma)$. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de las variables aleatorias $Y=(X-m)^3$ y $Z=(X-m)^2$. ◀ Según los datos la densidad de distribución de las probabilidades de la variable aleatoria X es normal, o sea,

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

La función $y=\varphi(x)=(x-m)^3$, es monótona creciente por doquier, por eso es válida la fórmula para $f_Y(y)$ representada en la pág. 128. La función inversa $\varphi^{-1}y$ y su derivada tienen la forma

$$\varphi^{-1}(y)=m+\sqrt[3]{y}, \quad \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}.$$

Sustituyendo esto en la fórmula para determinar $f_Y(y)$, obtenemos

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}\exp\left\{-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{2\sigma^2}\right\}, \quad -\infty<y<+\infty.$$

Determinemos la densidad de distribución de las probabilidades de la variable aleatoria $Z=(X-m)^2$. La función $z=\varphi(x)=(x-m)^2$ tiene dos intervalos de monotonía: $(-\infty, m)$ y (m, ∞) en cada uno de los cuales está determinada la función inversa $x=m-\sqrt{z}$, cuando $x<m$ $(z>0)$, y $x=m+\sqrt{z}$, cuando $x>m$ $(z>0)$. Por eso es más cómodo hallar primeramente la función de distribución (véase la fórmula representada en la pág. 128).

$$F_Z(z)=\mathbf{P}\{Z<z\}=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \int\limits_{x_1(z)}^{m} f_X(x)\,dx+\int\limits_{m}^{x_2(z)} f_X(x)\,dx, & z>0,\end{cases}$$

donde $x_1(z)$ y $x_2(z)$ son los puntos de intersección de la recta $z = \text{const}$ con las ramas de la parábola $z = (x-m)^2$, o sea, $x_1(z) = m - \sqrt{z}$, $x_2(z) = m + \sqrt{z}$, por consiguiente, para $z > 0$

$$F_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m-\sqrt{z}}^{m} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{m}^{m+z} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Aplicando la fórmula de derivación de la integral definida respecto al parámetro (fórmula de Leibnitz), obtenemos la expresión para la densidad de distribución de las probabilidades cuando $z > 0$:

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = -\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \frac{d}{dz}(m-\sqrt{z}) +$$

$$+ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}} \frac{d}{dz}(m+\sqrt{z}).$$

Finalmente obtenemos:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi z}} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}, & \text{si } z > 0. \blacktriangleright \end{cases}$$

La familia de leyes de distribución que se describen por las funciones de distribución $F\left(\frac{x-a}{b}\right)$, donde $F(x)$ es la función fija de distribución, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, se llama *tipo de distribución*. En este caso el parámetro a se denomina *parámetro de desplazamiento* y b, *factor de escala*.

De esta definición se deducen dos corolarios simples:

COROLARIO 1. *La familia de leyes de distribución que se describen por las densidades* $\frac{1}{b} f\left(\frac{x-a}{b}\right)$, *donde* $f(x)$ *es la densidad fija de distribución de las probabilidades,* $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, *es un tipo de distribución.*

COROLARIO 2. *La familia de leyes de distribución que se describen por las funciones características* $e^{ita}E(bt)$, donde $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $E(t)$ *es la función característica fija, es un tipo de distribución.*

4.36*. Demostrar que dos variables aleatorias continuas X e Y, relacionadas entre sí por la dependencia lineal $Y = aX + b$, se subordinan a la ley de distribución de un mismo tipo. En particular, indicar la ley de distribución de la variable aleatoria $Y = (X - m)/\sigma$ y determinar m_Y y σ_Y si X se subordina a la ley $N(m, \sigma)$.

4.37. Una variable aleatoria X toma los valores $x_k = k\pi/8$, $k = 0, 1, \ldots, 8$, con las probabilidades $\mathbf{P}\{X = x_k\} = (k+1)/45$, $k = 0, 1, \ldots, 8$. Describir la ley de distribución de la variable aleatoria $Y = \cos 2X$.

4.38.** Sea X la variable aleatoria del tipo continuo con la función de distribución $F_X(x)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = F_X(X)$ está distribuida uniformemente en el segmento $(0, 1)$.

4.39. Sobre un plano Oxy se traza al azar por el punto $(a, 0)$, $(a > 0)$ una línea recta. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la ordenada Y del punto de intersección de la recta con el eje Oy.

4.40. Por un punto escogido al azar en una circunferencia de radio 1 que tiene por centro el origen de coordenadas se traza la tangente a la circunferencia. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la longitud que tiene el segmento de la tangente, encerrado entre los ejes de coordenadas.

4.41. Indicar la ley de distribución de la variable aleatoria $Y = \ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$ si la variable aleatoria X se subordina a la ley de distribución de Pareto (véase el ejemplo 2 del § 2) con los parámetros $a > 0$ y $x_0 > 0$.

4.42. Una variable aleatoria X se subordina a la ley de distribución de Cauchy con los parámetros $c = 0$, $a = 1$ (véase el problema 4.27). Hallar las densidades de distribución de las probabilidades que tienen las variables aleatorias siguientes:

$$Y_1 = 3X - 2,\quad Y_2 = \frac{1}{3X-2},\quad Y_3 = 4X^2,\quad Y_4 = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} X.$$

4.43. Una variable aleatoria X está distribuida uniformemente en el intervalo $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Hallar las densidades de distribución de las probabilidades de las funciones $Y_1 = 3X^3$, $Y_2 = a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{a}X\right)$.

4.44. Calcular la función de distribución y describir la ley de distribución de la variable aleatoria $Z = XY$ si el vector aleatorio (X, Y) está distribuido por la ley definida por la tabla

x_i \ y_j	−1	0	1
0	0,1	0,2	0,1
1	0,2	0,3	0,1

4.45. En un círculo de radio r se pone al azar un punto. Describir la ley de distribución de la distancia entre este punto y el centro del círculo.

4.46. Un punto aleatorio (X, Y) está distribuido según la ley normal con los parámetros $m_X = m_Y = 0$, σ_X, σ_Y, $\rho_{XY} = 0$. Describir la densidad de distribución compatible de las probabilidades de las coordenadas polares del punto (R, Φ).

4.47. Las variables aleatorias X e Y son independientes y están distribuidas según las leyes $N(0, \sigma_1)$ y $N(0, \sigma_2)$, respectivamente. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la variable aleatoria $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

4.48. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley exponencial con el parámetro λ. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de las variables aleatorias

$$Y = \sqrt{X},\ Z = X^2,\ U = 1 - e^{-\lambda X}.$$

4.49. Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido según la ley que se define por la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x+y) & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

a) Hallar las densidades de distribución de las probabilidades de las funciones $Z = X + Y$, $U = XY$.

b) Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de $g_{U,V}(u, v)$, donde $U = X^2$, $V = Y^2$.

4.50*. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes del tipo continuo. Demostrar que las variables aleatorias X^n e Y^n $(n \in \mathbb{N})$ también son independientes.

4.51*. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son in-

dependientes y están igualmente distribuidas con la función de distribución $F_X(x)$. Hallar:

a) las funciones de distribución de las variables aleatorias $Y = \text{mín}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ y $Z = \text{máx}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$;

b) la función de distribución $F_{Y,Z}(y, z)$.

4.52*. Las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes y están distribuidas cada una según la ley $R(a, b)$. Hallar la densidad $f_{Y,Z}(y, z)$ de distribución compatible de las probabilidades de las variables aleatorias $Y = \text{mín}\ \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $Z = \text{máx}\ \{X_1, X_2, \ldots X_n\}$.

4.53*. Supongamos que X se subordina a la ley $N(0, 1)$. Mostrar que $Y = X^2$ se subordina a la ley de distribución ji-cuadrado con un grado de libertad.

4.54. a)* Hallar la función característica de la variable aleatoria $Z_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$, donde todas las X_k se subordinan a la ley $N(0, 1)$ y son independientes en conjunto y con ayuda de esta función mostrar que Z_n se subordina a la ley $\chi^2(n)$.

b) Hallar las características principales de distribución de $\chi^2(n)$, o sea, la esperanza matemática y la varianza.

Una variable aleatoria X tiene la *distribución de Student con* $n \in \mathbb{N}$ *grados de libertad* (X está distribuida según la ley $St(n)$) si es del tipo continuo y su densidad de distribución tiene la forma

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

La distribución de Student desempeña importante papel en la estadística matemática merced al teorema siguiente:

Supongamos que la variable aleatoria X está distribuida según la ley $N(0, 1)$ y la variable aleatoria Y, independiente de la primera, está distribuida según la ley $\chi^2(n)$. Entonces la variable aleatoria

$$Z = X\sqrt{\frac{n}{Y}} \tag{2}$$

está distribuida según la ley St (n).

4.55*. Demostrar la afirmación del teorema enunciado anteriormente sobre la ley de distribución de la variable aleatoria $Z = X\sqrt{\frac{n}{Y}}$, donde X e Y son independientes, con

la particularidad de que

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

4.56. Mostrar que la distribución de Cauchy con los parámetros $c=0$, $a=1$ es un caso particular de la distribución de Student cuando $n=1$.

4.57.** Una variable aleatoria X está distribuida según la ley St (n). Demostrar que para $n\to\infty$ la densidad de distribución de las probabilidades de la variable X converge, cualquiera que sea el valor del argumento x, a la densidad de distribución de las probabilidades según la ley $N(0, 1)$ para el mismo valor de x.

4.58. Una variable aleatoria X se subordina a la ley de distribución St (n). Determinar el mayor valor natural de m para el cual existe el momento $\mathbf{M}[|X|^m]$.

4. Problema de composición. En uno de los casos particulares importantes concernientes a la dependencia funcional $Z=\varphi(X, Y)=X+Y$ surge el problema de definir la ley de distribución de la suma de las componentes de un vector aleatorio según la ley conocida de distribución compatible de las mismas. Si, por ejemplo, (X, Y) es un Vct.A.T.C. con la densidad conocida de distribución compatible de las componentes $f_{X,Y}(x, y)$ y $Z=X+Y$, entonces

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x, z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(z-y, y)\,dy. \qquad (1)$$

Si (X, Y) es un Vct.A.T.D., entonces la ley de distribución de la V.A.T.D. $Z=X+Y$ se escribe en la forma

$$\mathbf{P}\{Z=z_k\}=\sum_i\sum_j \mathbf{P}\{X=x_i, Y=y_j\},$$

$$x_i+y_j=z_k$$

donde la sumación se extiende a todos los valores de los índices i y j para los cuales se cumple la condición $x_i+y_j=z_k$.

En particular, si (X, Y) es un Vct.A.T.D. con las componentes independientes, entonces

$$\mathbf{P}\{Z=z_k\}=\sum_i \mathbf{P}\{X=x_i\}\,\mathbf{P}\{Y=z_k-x_i\}. \qquad (2)$$

Si (X, Y) es un Vct.A.T.C. cuyas componentes son independientes entonces la fórmula (1) se reduce a la convolución de dos densidades:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-y)\, f_Y(y)\, dy. \qquad (3)$$

El problema de definir la ley de distribución de la suma de dos variables aleatorias independientes lleva el nombre de *problema de composición*. Las fórmulas (2) y (3) descritas anteriormente ofrecen la solución directa del problema de composición. Es cómodo aplicar la fórmula (3) en los casos en que las densidades de distribución de las probabilidades de las componentes se describen por una fórmula en todo el eje (lo que, por ejemplo, es válido para la ley normal, la ley de Cauchy, etc.). Otro enfoque de resolver el problema de composición se basa en la aplicación de las propiedades 4 y 6 de la función característica. Puesto que $E_Z(t) = E_X(t)\, E_Y(t)$, entonces, hallando $E_Z(t)$ con ayuda de la función característica se puede reconstruir la ley de distribución de la variable aleatoria Z (conforme a la propiedad 6).

La ley de distribución W de un tipo determinado se llama *compositivamente estable* si del hecho de que dos variables aleatorias independientes X e Y se subordinan a la ley de distribución del tipo dado resulta que su suma $X + Y$ se subordina a la ley de distribución W del mismo tipo (véase la definición del tipo de distribución en la pág. 130).

4.59. Demostrar la estabilidad de composición de la ley de Poisson y hallar m_Z y D_Z, donde $Z = X + Y$, X e Y son las variables aleatorias independientes de Poisson con los parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente.

4.60. X e Y son dos variables aleatorias independientes que se subordinan a una misma ley de distribución geométrica (véase el problema 2.41) con el parámetro p. Hallar la ley de distribución de la suma de estas variables $Z = X + Y$.

4.61. Resolver el problema de composición de dos distribuciones exponenciales con los parámetros iguales a λ_1 y λ_2, respectivamente. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la suma $Z = X + Y$:

a) directamente, calculando primero la función de distribución y luego la densidad;

b) utilizando el aparato de funciones características;

c)* en el caso particular en que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (composición de dos iguales distribuciones exponenciales).

La variable aleatoria X del tipo continuo está distribuida según la *ley de Erlang de n-ésimo orden* ($n \in \mathbb{N}$) *con el parámetro* $\lambda > 0$ si su densidad de distribución de las probabilidades se describe por la

fórmula

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0, \\ \dfrac{\lambda(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

De la solución del problema 4.61 c) se deduce que la composición de dos iguales distribuciones exponenciales con el parámetro λ es la distribución de Erlang de primer orden.

4.62.* Mostrar que la composición de n iguales distribuciones exponenciales con el parámetro λ es la distribución de Erlang de orden $(n-1)$ con el parámetro λ.

4.63*. Demostrar la estabilidad de composición de la distribución de $\chi^2(n)$. En particular, mostrar que la suma de dos distribuciones independientes ji-cuadrado con n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, es también la distribución ji-cuadrado con $n_1 + n_2$ grados de libertad.

4.64*. Resolver el problema de composición de dos distribuciones uniformes en el segmento $[-1, 1]$. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la suma e indicar a qué ley ella corresponde.

4.65. Las variables aleatorias X e Y son magnitudes normales independientes y estandarizadas.

a) ¿Son dependientes o independientes las variables aleatorias $X - Y$ y $X + \frac{X}{Y}$?

b) * ¿Por qué ley está distribuida la variable aleatoria $Z = \frac{X}{Y}$?

4.66. Se sabe que X es una variable aleatoria del tipo continuo con la función de distribución $F_X(x)$ e Y es una variable aleatoria, independientes de X, que se subordina a la ley de distribución $R(a, b)$. Hallar la densidad de distribución de las probabilidades de la variable aleatoria $Z = X + Y$.

4.67*. Se mide cierta magnitud física X que está distribuida uniformemente en el segmento $[-3, 3]$. El proceso de medición se realiza en las condiciones en que influye una perturbación Y, independiente de X, que está distribuida según la ley normal con los parámetros $m_Y = 0$, $\sigma_Y = 2$. Escribir la densidad de distribución de las probabilidades de la variable $Z = X + Y$, que se mide de hecho.

4.68*. Una variable aleatoria Z es representable en la forma $Z = \sum_{k=1}^{Y} X_k$, donde X_k son las variables aleatorias in-

dependientes de dos en dos y están distribuidas igualmente según la ley exponencial con el parámetro λ, e Y se subordina a la ley geométrica de distribución con el parámetro igual a p. Indicar la ley de distribución de la variable aleatoria Z.

§ 5. Ley de los grandes números y teoremas límite de la teoría de las probabilidades

1. Ley de los grandes números. Las afirmaciones y teoremas siguientes constituyen el contenido de un grupo de leyes reunidas por el nombre común de *ley de los grandes números.*

Si una variable aleatoria X tiene el primer momento absoluto finito $\mathbf{M}[|X|]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[|X|]}{\varepsilon}.$$

En particular, si $X \geqslant 0$ y existe m_X, entonces

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{m_X}{\varepsilon}$$

(*primera desigualdad de Chébishev*).

Si existe $\mathbf{M}[X^2]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ son válidas *la segunda desigualdad de Chébishev en la forma no centrada*

$$\mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[X^2]}{\varepsilon^2}$$

y *la segunda desigualdad de Chébishev en la forma centrada*

$$\mathbf{P}\{|X - m_X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D_X}{\varepsilon^2}.$$

La sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ se llama *convergente en probabilidad, para* $n \to \infty$, *hacia la variable aleatoria* X (designación abreviada: $X_n \xrightarrow{p} X$ para $n \to \infty$) si para todos los $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

TEOREMA DE CHÉBISHEV (*ley de los grandes números*). *Si las variables aleatorias en la sucesión* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *son independientes de dos en dos y sus varianzas satisfacen la condición*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k] = 0,$$

entonces para todos los $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}[X_k]\right| \geqslant \varepsilon\right\} = 0. \qquad (2)$$

En otros términos: si se cumplen las condiciones enunciadas, la sucesión de las medias aritméticas de n variables aleatorias converge en probabilidad hacia la media aritmética de sus esperanzas matemáticas. En particular, si las varianzas de las variables aleatorias, independientes de dos en dos, X_k, $k = 1, 2, \ldots$, están limitadas uniformemente (o sea, $\mathbf{D}[X_k] \leqslant \sigma^2$ para $k = 1, 2, \ldots$), entonces se cumple (1) y, por consiguiente, (2).

TEOREMA DE MÁRKOV (*ley de los grandes números enunciada en general*). *Si las varianzas de variables aleatorias arbitrarias en la sucesión* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *satisfacen la condición*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \mathbf{D}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0. \tag{3}$$

entonces tiene lugar la afirmación (2).

EJEMPLO 1. Se da la sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$, que satisfacen las condiciones siguientes:

1) X_k tienen los segundos momentos iniciales finitos con la particularidad de que

$$\mathbf{M}[X_k^2] < \alpha^2 \text{ para todos los } k = 1, 2, \ldots.$$

2) Cada una de las variables aleatorias en la sucesión depende únicamente de las variables aleatorias de números vecinos.

a) Demostrar que para esta sucesión se aplica el teorema de Márkov.

b) Con ayuda de las desigualdades de Chébishev estimar superiormente la probabilidad

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{X_k + X_{k+1}}{2} - \frac{m_k + m_{k+1}}{2}\right| \geqslant \sigma_k + \sigma_{k+1}\right\}.$$

◀ a) Mostremos, ante todo, que del hecho de que es finito el segundo momento inicial resulta que es finita también la esperanza matemática. Sea, para precisar, X una V.A.T.C. Entonces según la desigualdad de Cauchy—Buniakovski (propiedad 6) de la esperanza matemática, pág. 118, tenemos

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{f_X(x)} \sqrt{f_X(x)}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx\right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{M}[X^2]} \leqslant \sqrt{\alpha^2}.$$

Ahora bien, $\mathbf{M}[X_k] \leqslant \alpha$, $k = 1, 2, \ldots$. De aquí resulta que la sucesión de varianzas $\mathbf{D}[X_1]$, $\mathbf{D}[X_2]$, $\ldots$ está limitada uniformemente, ya que

$$\mathbf{D}[X_k] = \mathbf{M}[X_k^2] - \mathbf{M}^2[X_k] \leqslant \mathbf{M}[X_k^2] + \mathbf{M}^2[X_k] = 2\alpha^2.$$

Para demostrar la afirmación de que es aplicable a la sucesión indicada $X_1, X_2, \ldots$, el teorema de Márkov es suficiente comprobar si se cumple o no la condición (3). Según la propiedad (4) de la varianza

(pág. 117) tenemos

$$\frac{1}{n^2}\mathrm{D}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2+2\sum_{i=1}^{n-1}\rho_{i,\,i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{n^2}\left(n\alpha^2+2\alpha^2\sum_{i=1}^{n-1}|\rho_{i,\,i+1}|\right)\leqslant\frac{2\alpha^2}{n^2}(3n-2)\to 0 \text{ si } n\to\infty$$

y, por lo tanto, el teorema de Márkov es aplicable.

b) Puesto que

$$\mathrm{M}\left[\frac{X_k+X_{k+1}}{2}\right]=\frac{m_k+m_{k+1}}{2},$$

$$\mathrm{D}\left[\frac{X_k+X_{k+1}}{2}\right]=\frac{\mathrm{D}[X_k+X_{k+1}]}{4},$$

entonces según la segunda desigualdad de Chébishev en la forma centrada tenemos

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_k+X_{k+1}}{2}-\frac{m_k+m_{k+1}}{2}\right|\geqslant\sigma_k+\sigma_{k+1}\right\}\leqslant\frac{\mathrm{D}[X_k+X_{k+1}]}{4(\sigma_k+\sigma_{k+1})^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{D}[X_k]+\mathrm{D}[X_{k+1}]+2\rho_{k,\,k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}}{4(\sigma_k+\sigma_{k+1})^2}\leqslant\frac{(\sigma_k+\sigma_{k+1})^2}{4(\sigma_k+\sigma_{k+1})^2}=\frac{1}{4}.\ \blacktriangleright$$

5.1. Una variable aleatoria X tiene las características $m_X = 1$, $\sigma_X = 0{,}2$. Estimar inferiormente las probabilidades de los sucesos $A = \{0{,}5 \leqslant X < 1{,}5\}$, $B = \{0{,}75 \leqslant X < 1{,}35\}$, $C = \{X < 2\}$.

5.2. Se mide la velocidad del viento en el punto dado de la Tierra. La variable aleatoria X es la proyección del vector de la velocidad del viento sobre una dirección fija. Estimar la probabilidad del suceso $A = \{X \geqslant 80$ km/h$\}$ para la información inicial siguiente:

a) mediante mediciones realizadas durante muchos años se ha determinado que $\mathrm{M}[X] = 16$ km/h;

b) están realizadas las pruebas adicionales a consecuencia de las cuales se ha determinado que $\sigma_X = 4$ km/h;

c) además de los datos a) y b) se sabe que la ley de distribución de la variable aleatoria X es simétrica respecto a la esperanza matemática m_X.

5.3. Con ayuda de las desigualdades de Chébishev estimar las probabilidades de $p_k = \mathrm{P}\{|X - m_X| \leqslant k\sigma_X$ para $k = 1, 2, 3$ si X se subordina a la ley $N(m_X, \sigma_X)$. Comparar con los valores exactos de estas probabilidades, obtenidos en el problema 2.60.

5.4. Sea $\varphi(x)$ la función monótona creciente con la particularidad de que existe $\mathbf{M}[\varphi(X)]$, donde X es cierta variable aleatoria no negativa. Utilizando la primera desigualdad de Chébishev, mostrar que para todos los $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[\varphi(X)]}{\varphi(\varepsilon)}.$$

5.5*. Mostrar que si para cierta variable aleatoria X existe $\mathbf{M}[e^{\beta X}]$, donde $\beta > 0$, entonces

$$\mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant e^{-\beta\varepsilon}\mathbf{M}[e^{\beta x}].$$

En los problemas 5.6—5.9 se dan las leyes de distribución de las variables aleatorias independientes de dos en dos que forman la sucesión aleatoria $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Aclarar si es aplicable o no para estas sucesiones la ley de los grandes números.

5.6

x_{ni}	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$\mathbf{P}\{X_n = x_{ni}\}$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

5.7

x_{ni}	$-na$	0	na
$\mathbf{P}\{X_n = x_{ni}\}$	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

5.8

x_{ni}	$-na$	0	na
$\mathbf{P}\{X_n = x_{ni}\}$	$\frac{1}{2^n}$	$1-\frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

5.9

x_{ni}	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
$\mathbf{P}\{X_n = x_{ni}\}$	1/2	1/2

5.10. Para un parque automovilístico el número medio de autobuses que se envían a la reparación después de un mes de empleo en las líneas urbanas es igual a 5. Estimar la probabilidad de que, pasado un mes, en este parque se envíen a la reparación menos de 15 autobuses si

a) falta una información sobre la varianza;

b) se sabe que la varianza es igual a 4;

c) se supone que el número de autobuses que se envían a la reparación después de un mes de empleo se subordina a la ley de distribución de Poisson con el parámetro $\lambda = 5$.

2. Teoremas límite de la teoría de las probabilidades.

TEOREMA DE BERNOULLI. *La frecuencia relativa de los casos favorables en n pruebas independientes según el esquema de Bernoulli converge en probabilidad, cuando* $n \to \infty$, *a la probabilidad del caso favorable en una prueba.*

TEOREMA LÍMITE CENTRAL *(en la enunciación simplificada de Liapunov). Si las variables aleatorias en la sucesión* $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *son independientes, están igualmente distribuidas y tienen finitas la esperanza matemática* m_X *y la varianza* σ_X^2, *entonces para cualquier x real*

$$F_{Y_n}(x) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

donde $Y_n = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_n - m_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$ *es la media aritmética estandarizada de n variables aleatorias en la sucesión.*

Los dos siguientes teoremas límite, referentes al esquema de Bernoulli, son corolarios del teorema límite central:

Sea X_n *el número de casos favorables en n pruebas independientes según el esquema de Bernoulli. Entonces, siempre que los valores de npq sean suficientemente grandes.*

$$\mathrm{P}\left\{a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right\} = \Phi(b) - \Phi(a) + O\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right)$$

(teorema integral de Moivre—Laplace) y, además,

$$\mathrm{P}\{X_n = m\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-\frac{x_m^2}{2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{npq}}\right),$$

donde $x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ *(teorema local de Moivre — Laplace).*

EJEMPLO 2. En uno de los experimentos de Pearson de simular en un ordenador las pruebas consistentes en lanzar una moneda perfecta, el escudo salió 12 012 veces, siendo el número total de lanzamientos igual a 24 000.

a) ¿Cuál es la probabilidad a priori de obtener el resultado dado? b) ¿Cómo es probable, al repetir el experimento, obtener una misma, o todavía mayor, desviación de la frecuencia relativa de los casos favorables con respecto a la probabilidad del caso favorable en una prueba?

◀ Sea X_n el número de salidas del escudo al lanzar n veces la moneda perfecta. Según los datos del problema $n = 24\,000$, $p = q = 1/2$. Ya que $npq = 6000 \gg 1$, son válidos ambos teoremas de Moivre—Laplace.

a) Según el teorema local de Moivre—Laplace

$$\mathrm{P}\{X_n = 12\,012\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 6000}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{12}{\sqrt{6000}}\right)^2\right\} \approx$$

$$\approx 5{,}088 \cdot 10^{-3}.$$

b) La variable aleatoria $\frac{1}{n} X_n$ tiene el significado de la frecuencia relativa de los casos favorables en n pruebas, con la particularidad de que

$$\mathrm{D}\left[\frac{1}{n} X_n\right] = \frac{pq}{n}.$$

Puesto que en el experimento de Pearson fue obtenida la desviación de la frecuencia relativa de los casos favorables con respecto a la probabilidad del caso favorable en una prueba, igual a

$$\frac{12\,012}{24\,000} - \frac{1}{2} = 0{,}0005,$$

entonces, según el teorema integral de Moivre—Laplace,

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n} X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant 0{,}0005\right\} = 1 - \mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n} X_n - \frac{1}{2}\right| < 0{,}0005\right\} \approx$$

$$\approx 2 - 2\Phi\left(\frac{0{,}0005}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right) = 2 - 2\Phi(0{,}1549) \approx 0{,}8668. \blacktriangleright$$

5.11. Una variable aleatoria X está distribuida según la ley de Poisson con el parámetro igual a λ. Mostrar que la forma límite de la ley de distribución de la variable aleatoria $Z = \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, cuando $\lambda \to \infty$ es la ley normal $N(0, 1)$.

◀ Puesto que X es la magnitud de Poisson con el parámetro igual a λ, su función característica tiene la forma (véase el ejemplo 5 del § 4) $E_X(t) = \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$. La variable Z se expresa linealmente por X: $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} X - \sqrt{\lambda}$, por eso, según la propiedad 2 de la función

característica

$$E_Z(t)=e^{-it\sqrt{\lambda}}E_X\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right)=e^{-it\sqrt{\lambda}}e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\right)}.$$

Desarrollemos la función exponencial, presente en el exponente de la segunda función exponencial, en serie de Taylor de potencias de $\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$ con exactitud tal que se obtengan los términos de segundo orden de pequeñez:

$$e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}}-1\approx i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}-\frac{t^2}{2\lambda}+o\left(\frac{t^2}{\lambda}\right).$$

Sustituyendo este desarrollo en la expresión para $E_Z(t)$, obtenemos

$$E_Z(t)=e^{-it\sqrt{\lambda}}e^{\lambda\left(i\frac{t}{\sqrt{\lambda}}-\frac{t^2}{2\lambda}+o\left(\frac{t^2}{\lambda}\right)\right)}=e^{-\frac{t^2}{2}}e^{\lambda o\left(\frac{t^2}{\lambda}\right)}\underset{\lambda\to\infty}{\to}e^{-\frac{t^2}{2}},$$

lo que corresponde a la forma de la función característica de la distribución normal estandarizada (véase el ejemplo 3 del § 4). Puesto que la función característica define unívocamente la ley de distribución (propriedad 6), de aquí se deduce la afirmación enunciada en el problema. ▶

De la solución del problema 5.11 resulta que, siempre que sean suficientemente grandes los valores del parámetro λ, la distribución de Poisson puede sustituirse, con aproximación, por la normal.

5.12. El número medio de llamadas enviadas a una central telefónica en 1 minuto es igual a $\lambda = 20 = m_X$. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{X > 20\}$, $B = \{10 \leqslant X < 30\}$.

5.13. Se sabe que, por término medio, el 5% de los estudiantes llevan gafas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 200 estudiantes presentes en el aula el 10%, por lo menos, lleven gafas?

5.14. Se examina la media aritmética Y de una centena de variables aleatorias independientes de Poisson X_n con las parámetros iguales a λ_n. Hallar $\mathbf{P}\{|Y - m_Y| < \lambda_1\}$.

5.15. ¿Cuántas pruebas independientes es necesario realizar según el esquema de Bernoulli para que con una probabilidad no menor que 0,975 se garantice el cumplimiento de la desiguialdad $\left|\frac{1}{n}X_n - p\right| < 0{,}1$, donde X_n es el número de casos favorables en n pruebas, $p = 1/2$ es la probabilidad del caso favorable en una prueba. Obtener la estimación para el número mínimo de pruebas:

a) utilizando la desigualdad de Chébishev;

b) considerando aplicable el teorema límite central.

5.16. Se efectúan pruebas sucesivas según el esquema de Bernoulli. La probabilidad de que se produzca el suceso A en una prueba es igual a $p = 0{,}6$. Suponiendo aplicables los teoremas límite de Moivre — Laplace, calcular la probabilidad de los sucesos siguientes:

$B = \{$el suceso A se produce en la mayoría de las 60 pruebas$\}$, $C = \{$el número de apariciones del suceso A en 60 pruebas está comprendido entre 30 y 42$\}$, $D = \{$el suceso A se produce 36 veces en 60 pruebas$\}$.

5.17. Se suman 10^3 números cada uno de los cuales está redondeado con exactitud hasta 10^{-3}. Se supone que los errores de redondeo son independientes y están distribuidos uniformemente en el intervalo $(-0{,}5 \cdot 10^{-3}, 0{,}5 \cdot 10^{-3})$. Hallar el intervalo, simétrico respecto a la esperanza matemática, en el cual, con una probabilidad igual a 0,998, queda encerrado el error total.

5.18*. La variable aleatoria X es el resultado de medición de cierta magnitud física cuya ley de distribución se desconoce. Determinar qué exactitud de medición relativa máxima posible se puede garantizar, con una probabilidad no menor que 0,95, para los datos siguientes: a) se sabe que $m_X = 0{,}1$, $\sigma_X = 0{,}02$ y se lleva a cabo una sola medición; b) se llevan a cabo 5 mediciones y en calidad de resultado X se toma la media aritmética de los valores medidos; c) se toma la media aritmética de 100 mediciones y se supone admisible hacer uso de la ley límite de distribución de la suma según el teorema límite central.

5.19*. Una urna contiene bolas blancas y negras en razón de 3 : 2. Se llevan a cabo pruebas sucesivas relacionadas con la extracción de una bola, volviendo a meterla en la urna, con la particularidad de que cada vez se fija el color de la bola sacada. ¿Cuál es el número mínimo de extracciones para el cual, con una probabilidad no menor que 0,9948, se puede esperar que la desviación de la frecuencia relativa de aparición de una bola blanca respecto a la probabilidad de su aparición en una sola prueba no sobrepase la magnitud $\varepsilon = 0{,}05$?

5.20. La probabilidad de que nazca un niño es igual a $p = 0{,}512$. Suponiendo aplicables los teoremas local e integral de Moivre — Laplace, calcular las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$entre 100 neonatos hay

exactamente 51 niños}, B = {entre 100 neonatos hay más niños que niñas}, C = {la diferencia entre la cantidad de niños y la de niñas para 100 neonatos no supera 10}.

5.21. El departamento de control técnico comprueba la calidad de 900 piezas escogidas al azar. La probabilidad p de que una pieza corresponda a la norma es igual a 0,9. La variable aleatoria X es el número de piezas en la partida que corresponden a la norma. Hallar el intervalo mínimo, simétrico respecto a m_X, en el cual, con una probabilidad no menor que 0,9544, queda encerrado el número de piezas correspondientes a la norma.

5.22. Supongamos que X_n se subordina a la ley de distribución $\chi^2(n)$. Mostrar que la variable aleatoria

$$Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$$

está distribuida asintóticamente según la ley $N(0, 1)$ (o sea,

$$F_{Y_n}(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \text{ cuando } n \to \infty).$$

◀ Puesto que X_n está distribuida por la ley $\chi^2(n)$, entonces en consonancia con el «origen» de la distribución ji-cuadrado (véase el problema 4.54 a) existen tales variables aleatorias estandarizadas normales independientes en conjunto Z_k ($k = 1, 2, \ldots$) para las cuales $X_n = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k^2$. Ya que Z_k son independientes de dos en dos, entonces Z_k^2 son independientes en conjunto ($k = 1, 2, \ldots$) (véase el problema 4.50). Además, para la varianza de cualquiera de las variables Z_k^2 tenemos

$$\mathrm{D}[Z_k^2] = \mathrm{M}[Z_k^4] - \mathrm{M}^2[Z_k^2] = \mu_4 - \mu_2^2 = 3\sigma_Z^4 - \sigma_Z^4 = 2,$$

o sea, las varianzas de las variables aleatorias Z_k ($k = 1, 2, \ldots$) son finitas. Por consiguiente, para las variables aleatorias X_n ($n = 1, 2, \ldots$) están cumplidas todas las condiciones del teorema límite central de Liapunov, por eso la variable aleatoria Y_n está distribuida asintóticamente según la ley $N(0, 1)$. ▶

5.23. Existe el siguiente método de estimar aproximadamente la cantidad n de peces en un depósito de agua. En el depósito de agua lanzan m peces marcadas. Luego se pesca una candidad k suficientemente grande de peces y se cuenta la porción p_k^* de los peces marcados entre los pescados.

La estimación del número n se basa en la aplicación de dos teoremas: teorema de Bernoulli conforme al cual $p_k^* \xrightarrow{p} p =$

$= \frac{m}{n}$, $k \to \infty$, y por eso grandes desviaciones de la frecuencia relativa p_k^* respecto a la probabilidad del caso favorable en una sola prueba p, siendo grandes los k, son poco probables y del teorema integral de Moivre — Laplace conforme al cual la ley de distribución de la variable aleatoria $Y = \frac{p_k^* - p}{\sqrt{D[p_k^*]}}$ siendo grandes los k, es próxima a la ley $N(0, 1)$. El último teorema permite por la probabilidad dada β (fiabilidad de la estimación) hallar el cuantil simétrico $\hat{t}_\beta$ y con ayuda de éste determinar el intervalo en el cual, con la probabilidad dada β, está encerrado el número buscado n.

En el depósito de agua fueron lanzados 100 peces marcados. Luego, pasado poco tiempo, fueron pescados 400 peces entre los cuales había 5 peces marcados. Determinar la cantidad total de peces en este depósito de agua con la probabilidad igual a 0,9.

5.24. En una compañía de seguros se han asegurado 10 000 automóviles. La probabilidad de que cualquier automóvil quede averiado como resultado de un accidente es igual a 0,006. Cada propietario del automóvil asegurado paga cada año 12 rublos de seguros y en el caso de que el automóvil está dañado en un accidente recibe de la compañía 1000 rublos. Hallar las probabilidades de los sucesos siguientes: $A = \{$al expirar un año de trabajo la compañía de seguros sufrirá pérdidas$\}$, $B_m = \{$la compañía de seguros obtendrá beneficios no menos que m rublos$\}$, si $m = 40\,000$, $60\,000$, $80\,000$.

3. Método de pruebas estadísticas. Los teoremas límite de la teoría de las probabilidades y los corolarios sacados de ellos son la base de un método de cálculo conocido como *método de pruebas estadísticas* (*método de Montecarlo*) que se emplea con frecuencia para un cálculo aproximado de integrales definidas, que no se expresan por funciones elementales, con el fin de resolver los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales de órdenes superiores, los problemas de contorno para las ecuaciones en derivadas parciales y muchos otros problemas del análisis numérico, donde los métodos numéricos ordinarios (tales como método de diferencias) llevan a un volumen de cálculos extraordinariamente grande.

Ilustraremos la idea del método de Montecarlo citando como ejemplo un cálculo aproximado de la integral definida de la función $\varphi(x)$. Sea

$$I = \int_a^b \varphi(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b (b-a)\, \varphi(x)\, dx.$$

El valor de la integral I puede considerarse como esperanza matemática de la función de la variable aleatoria $Y = (b - a)\,\varphi(X)$, donde X está distribuida según la ley $R(a, b)$. Sean X_k $(k = 1, 2, \ldots)$ los números aleatorios independientes distribuidos según la ley $R(a, b)$ (existen en los ordenadores programas estándar que generan los así llamados números «seudoaleatorios» que suelen utilizarse en calidad de X_k). La variable aleatoria

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (b-a)\,\varphi(X_k) \qquad (4)$$

puede considerarse como valor aproximado de la integral I. Si la varianza $\mathbf{D}[\varphi(X)]$ existe, entonces de la ley de los grandes números se deduce que $I_n \xrightarrow{p} I$ cuando $n \to \infty$ (por lo tanto, las probabilidades de considerables desviaciones de I_n de $\mathbf{M}[I_n] = I$ son pequeñas si n son grandes) y del teorema límite central (en virtud de la independencia de $\varphi(X_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y la limitación de las varianzas $\mathbf{D}[\varphi(X_k)]$) rsulta que la variable aleatoria

$$T = \frac{I_n - I}{\sqrt{\mathbf{D}(I_n)}} = \frac{I_n - I}{(b-a)\,\sigma_Y}\sqrt{n}$$

está distribuida asintóticamente (cuando n son grandes) según la ley $N(0, 1)$.

Sea $\delta = \left| \dfrac{I_n - I}{I} \right|$ el error relativo de cálculo de la integral I.

Puesto que la distribución de la variable aleatoria T está conocida (estandarizada normal), se puede hallar tal valor máximo del error relativo el cual sea garantizado con la probabilidad dada p. Designemos este valor con $\delta_{\text{máx}}$. Por definición

$$\mathbf{P}\{\delta < \delta_{\text{máx}}\} = p \text{ o bien } \mathbf{P}\left\{ |T| < \delta_{\text{máx}} \frac{|I|}{\sigma_Y} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(b-a)} \right\} = p.$$

De aquí, por definición del cuantil simétrico, se deduce que

$$\delta_{\text{máx}} = \frac{(b-a)}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma_Y}{|I|}\, \hat{t}_p.$$

Puesto que σ_Y es finita, entonces $\delta_{\text{máx}}$ puede ser hecho tan pequeño como se quiera al aumentar n.

EJEMPLO 3. ¿Qué volumen n de una muestra es necesario tomar en el método de Montecarlo para que en el cálculo del valor de la función gamma de Euler $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$ se pueda suponer, con una probabilidad no menor que 0,95, que el error relativo de cálculo será menos de 1%?

◀ Hagamos uso de la expresión para la función gamma de Euler en forma de la integral definida

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Sustituyendo las variables $e^{-t} = x$, la integral dada se reduce a un intervalo finito:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \ln^{z-1}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Designemos con I el valor buscado de la función gamma:

$$I = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \int_0^1 \ln^{1/4}\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Es evidente que I es representable en la forma $I = \mathbf{M}[Y]$, donde $Y = \varphi(X) = \ln^{1/4}\left(\frac{1}{X}\right)$ y X está distribuida uniformemente en el segmento $[0, 1]$. Calculemos la magnitud $\frac{\sigma_Y}{|I|}$. Utilizando la fórmula conocida para la varianza por el segundo momento inicial, obtenemos

$$D\varphi = \mathbf{D}\left[\ln^{1/4}\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \mathbf{M}[\varphi^2(X)] - \mathbf{M}^2[\varphi(X)] =$$

$$= \int_0^1 \ln^{1/2}\left(\frac{1}{x}\right) dx - I^2.$$

De aquí se deduce que

$$\frac{\sigma_Y}{|I|} = \sqrt{\frac{\mathbf{M}[\varphi^2(X)]}{I^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{I^2}\int_0^1 \ln^{1/2}\left(\frac{1}{x}\right) dx - 1}.$$

Utilizando la propiedad conocida de la función gamma: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y teniendo en cuenta el valor particular de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (integral de Poisson), obtenemos el valor de la integral en el segundo miembro:

$$\int_0^1 \ln^{1/2}\left(\frac{1}{x}\right) dx = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Para hallar el valor exacto de la magnitud $\frac{\sigma_Y}{|I|}$ es necesario conocer el valor exacto de la integral I el cual sólo viene calculándose. Esto presenta cierta dificultad al evaluar el error con ayuda del método de Montecarlo. Generalmente en vez del valor exacto de la magnitud I se utiliza una u otra estimación aproximada inferior de la misma (y para σ_Y con frecuencia se utiliza, por las mismas causas, una estimación superior) y se obtiene un valor un poco elevado de la magnitud $\frac{\sigma_Y}{|I|}$ lo que conduce a estimaciones más «prudentes» para el error relativo.

Haciendo uso de las tablas de la función gamma[1]) para el ejemplo dado, hallemos que con exactitud hasta $5 \cdot 10^{-5}$ el valor buscado de $\Gamma(5/4) = 0{,}9065$ y, por consiguiente, $\frac{\sigma_Y}{|I|} = 0{,}280$. Luego, según los datos del problema $P\{\delta < 0{,}01\} \geqslant 0{,}95$ o bien $P\{|T| < 0{,}01 \sqrt{n}\frac{|I|}{\sigma_Y}\} \leqslant 0{,}95$. De aquí resulta que

$$\sqrt{n} \geqslant \hat{t}_{,0975} \cdot \frac{0{,}280}{0{,}01} = 54{,}88,$$

por lo tanto, el volumen mínimo de la muestra el cual asegura que el error relativo de cálculo de $\Gamma(5/4)$ no sea más de 1%, con una probabilidad no menor que 0,95, es $n_{\text{mín}} = [54{,}88^2 + 0{,}5] = 3012$, donde $[x]$ designa la parte entera del número x. ▶

5.25. El cálculo de la integral $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$ se lleva a cabo con ayuda del método de Montecarlo, basándose en 1000 pruebas. ¿Qué error relativo máximo de cálculo se puede garantizar con una fiabilidad igual al 97,22%?

5.26*. ¿Cuántas pruebas estadísticas es necesario realizar en el cálculo del valor de la función de Laplace $\Phi(1)$ para garantizar, con una probabilidad no menor que 0,95, la magnitud del error relativo dentro de los límites de 2%?

5.27. El cálculo de la integral $I = \int_0^1 x^2\, dx$ se lleva a cabo con ayuda del método de Montecarlo, basándose en 10^4 pruebas independientes. Calcular la probabilidad de que el error relativo de cálculo no exceda 1%.

5.28*. El cálculo del número π se efectúa con ayuda del método de Montecarlo y las pruebas estadísticas consisten en que una aguja de longitud l se lanza al azar n veces independientes sobre un plano en el que están trazadas líneas rectas paralelas alejadas unas de otras a distancia de $2l$ (véase el problema de Buffon 1.127). Se mide el número de intersecciones de cualquiera de las rectas paralelas por la aguja. Hallar el número mínimo de pruebas que han de realizarse para que, con una probabilidad de 0,9996, el error relativo de determinación del π sea no más que un 3%.

---

[1]) Véase, por ejemplo, *Janke E., Emde F., Lösch F.* Tafeln höherer Funktionen. Sechste Auflage. Teubner B. G. Verlagsgesellschaft. Stuttgart, 1960.

§ 6. Funciones aleatorias (teoría de correlación)

1. Leyes de distribución y características medias de funciones aleatorias. Sea G_t cierto conjunto de números reales. Si corresponde a cada valor $t \in G_t$ una variable aleatoria $X(t)$, entonces se dice que sobre el conjunto G_t está asignada la *función aleatoria* $X(t)$. En este caso el conujnto G_t se llama *campo de definición de la función aleatoria*. El nombre de proceso aleatorio pertenece a la clase de funciones aleatorias en las cuales el parámetro t desempeña el papel de tiempo.

La variable aleatoria $X(t_0)$ que corresponde al valor de la función aleatoria para un valor fijo del argumento $t = t_0 \in G_t$ se denomina *sección*. El conjunto de valores $\{x(t)\}$ que toma la función aleatoria dada como resultado de una prueba concreta con todos los valores admisibles de $t \in G_t$ se llama *realización* (*trayectoria*) de la función aleatoria.

Se denomina *ley n-dimensional de distribución de la función aleatoria* $X(t)$, *dependiente de n parámetros reales* $t_1, t_2, \ldots, t_n$, la ley de distribución compatible de n secciones

$$(X(t_1),\ X(t_2),\ \ldots,\ X(t_n)).$$

En la *teoría de correlación* la descripción de las propiedades características de funciones aleatorias se construye basándose en leyes de distribución que son no más que bidimensionales.

La función unidimensional de distribución $F_1(x/t)$ de los valores de la función aleatoria $X(t)$, siendo fijo t, es la función de distribución de la sección $X(t)$:

$$F_1(x/t) = \mathbf{P}\{X(t) < x\}.$$

La densidad unidimensional correspondiente existe si la sección $X(t)$ es una V.A.T.C., en este caso en los puntos de derivabilidad de la función $F_1(x/t)$ es válida la igualdad

$$f_1(x/t) = \frac{\partial F_1(x/t)}{\partial x}.$$

Si la sección $X(t)$ es una V.A.T.D., entonces la ley unidimensional de distribución se describe por la enumeración de las probabilidades

$$\mathbf{P}\{X(t) = x_k(t)\} = p_k(t) = F_1(x_{k+1}/t) - F_1(x_k/t),$$

$$\sum_k p_k(t) = 1, \qquad t \in G_t.$$

Se llama función bidimensional de distribución $F_2(x_1, y/t_1, t_2)$ la función de distribución compatible de dos secciones de la función aleatoria $X(t_1)$, $X(t_2)$, $t_1, t_2 \in G_t$:

$$F_2(x, y/t_1, t_2) = \mathbf{P}\{X(t_1) < x,\ \ X(t_2) < y.\}$$

La densidad bidimensional correspondiente existe si el vector aleatorio $(X(t_1), X(t_2))$ es un Vct.A.T.C., en este caso si en el punto (x, y) la función $F_2(x, y/t_1, t_2)$ es dos veces derivable, entonces

$$f_2(x, y/t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x, y/t_1, t_2)}{\partial x\, \partial y}.$$

Si el vector aleatorio $(X(t_1), X(t_2))$ es un Vct.A.T.D., entonces la ley bidimensional de su distribución se describe por la enumeración de las probabilidades

$$\mathbf{P}\{X(t_1)=x_i(t_1),\ X(t_2)=y_j(t_2)=p_{ij}(t_1, t_2),$$

$$\sum_{i,j} p_{ij}(t_1, t_2)=1,\ t_1, t_2 \in G_t.$$

La esperanza matemática, la varianza y la función autocovariante son características principales de las funciones aleatorias.

Se denominan *esperanza matemática* y *varianza* de una variable aleatoria $X(t)$ tales funciones no aleatorias $m_X(t)$ y $D_X(t) = \sigma_X^2(t)$ las cuales, para cada valor fijo de t, son iguales a la esperanza matemática y la varianza de la sección correspondiente. Así pues, si, por ejemplo, $X(t)$ es una V.A.T.C. para $t \in G_t$ y las integrales escritas a continuación convergen absolutamente, entonces

$$m_X(t)=\mathbf{M}[X(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x/t)\,dx,$$

$$D_X(t)=\sigma_X^2(t)=\mathbf{D}[X(t)]=\mathbf{M}[\mathring{X}^2(t)]=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-m_X(t)]^2 f_1(x/t)\,dx.$$

Se llama *función autocovariante* tal función no aleatoria $K_X(t_1, t_2)$ de dos argumentos reales t_1 y t_2 la cual para cada par de valores fijos de t_1 y t_2 es igual a la covarianza de las secciones correspondientes

$$K_X(t_1, t_2)=\mathbf{M}[(X(t_1)-m_X(t_1))(X(t_2)-m_X(t_2))]=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x_1-m_X(t_1))(x_2-m_X(t_2))\cdot f_2(x_1, x_2/t_1, t_2)\,dx_1\,dx_2.$$

La función autocovariante normalizada

$$\rho_X(t_1, t_2)=\frac{K_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\,\sigma_X(t_2)}$$

se llama *función de autocorrelación*. Las propiedades principales de la función autocovariante (de autocorrelación) son las siguientes:

1. $K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2, t_1)$ $(\rho_X(t_1, t_2) = \rho_X(t_2, t_1))$ (propiedad de simetría).
2. $|K_X(t_1, t_2)| \leqslant \sigma_X(t_1)\,\sigma_X(t_2)$ $(|\rho_X(t_1, t_2)| \leqslant 1)$.
3. La función $K_X(t_1, t_2)$ es una función definida no negativamente. Esto quiere decir que para todo n natural, para todos valores reales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y para toda colección de los valores de argumentos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ tomados del campo de definición de la función

$K_X(t', t'')$ tiene lugar la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_X(t_i, t_j) x_i x_j \geqslant 0.$$

Se denomina *función de ligazón covariante recíproca* de dos funciones aleatorias reales $X(t)$ e $Y(t)$ la función no aleatoria

$$K_{XY}(t_1, t_2) = \mathbf{M}[\mathring{X}(t_1) \mathring{Y}(t_2)],$$

donde $\mathring{X}(t_1)$ e $\mathring{Y}(t_2)$ son secciones centradas de las funciones aleatorias. *La función de ligazón de correlación recíproca (función de ligazón autocovariante normalizada)* se define por la igualdad

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \frac{K_{XY}(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)}.$$

En adelante, para brevedad, omitiremos frecuentemente el prefijo «auto» en la denominación «función autocovariante» en los casos en que se tratará de las características del mismo proceso $X(t)$.

El proceso $X(t)$ definido para $t \in G_t = [a, b]$ se llama *proceso con incrementos independientes* si para cualesquiera $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tales que $a \leqslant t_0, \ldots, t_n \leqslant b$ las variables aleatorias $X(t_0)$, $X(t_1) - X(t_0)$, $\ldots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ son independientes.

El proceso aleatorio con incrementos independientes se denomina *homogéneo* si la ley de distribución de la variable aleatoria $X(t) - X(t_0)$ no depende de t_0 y se determina solamente por la longitud del intervalo.

EJEMPLO 1. (*Proceso de Poisson.*) La función aleatoria $N(t)$ satisface las condiciones siguientes:

1) $N(t)$ está definida para todos los $t \geqslant 0$.

2) $\mathbf{P}\{N(0) = 0\} = 1$.

3) $N(t)$ es un proceso con incrementos independientes.

4) En un instante aleatorio de tiempo el valor de la función $N(t)$ se incrementa en unidad, en este caso para todo instante $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

donde λ es el número constante para el proceso dado.

La fig. 123 muestra una de las realizaciones del proceso de Poisson. Hallar la ley unidimensional de realización de la función aleatoria $N(t)$.

◀ Designemos con $\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$ el incremento aleatorio del proceso durante el tiempo Δt y pongamos $p_n(t) = \mathbf{P}\{N(t) = n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. El problema consiste en hallar los valores de las probabilidades $p_n(t)$ para $n = 1, 2, \ldots$ y todos los $t > 0$.

Para el proceso en cuestión el suceso $\{N(t) = n\}$ significa que «el número de incrementos unitarios durante el tiempo t es igual a n». Experesemos el suceso compuesto $\{N(t + \Delta t) = n\}$ en el álgebra de sucesos del modo siguiente:

$$\{N(t + \Delta t) = n\} = \{N(t) = n\}\{\Delta N(t) = 0\} + \{N(t) = n - 1\}\{\Delta N(t) = 1\}.$$

Según la condición 3) $N(t)$ es un proceso con incrementos independientes. Suponiendo $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $t_2 = t + \Delta t$, obtenemos, por definición, que las variables aleatorias $N(t_1) - N(t_0) = N(t)$ y $N(t_2) - N(t_1) = \Delta N(t)$ son independientes. Por eso los pares de sucesos $\{N(t) = n\}$ y $\{\Delta N(t) = 0\}$, $N(t) = n - 1\}$ y $\{\Delta N(t) = 1\}$ son también independientes.

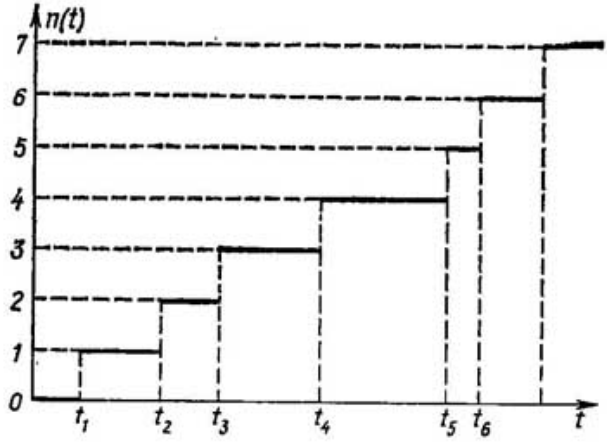


Fig. 123

Teniendo en cuenta que según la condición 4)

$$\mathbf{P}\{\Delta N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}\{\Delta N(t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t - o(\Delta t)$$

y aplicando las fórmulas de adición y de multiplicación de las probabilidades, obtenemos

$$p_n(t + \Delta t) - p_n(t) = -\lambda \Delta t\,(p_n(t) - p_{n-1}(t) + o(\Delta t).$$

Dividiendo ambos miembros entre Δt y pasando al límite para $\Delta t \to 0$, obtenemos la ecuación diferencial para las probabilidades buscadas

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} p_n(0) = 0, & n = 1, 2, \ldots, \\ p_0(0) = 1. \end{cases}$$

Resolvemos recurrentemente la ecuación (1), suponiendo que al n-ésimo paso el valor de $p_{n-1}(t)$ está ya conocido. Si $n = 0$ la solución del problema

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t), \\ p_0(0) = 1 \end{cases}$$

es la función $p_0(t) = e^{-\lambda t}$. Cuando $n \neq 0$, según la integral de Duhamel (véase la parte II, cap. 13, § 1, p. 1)

$$p_n(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} p_{n-1}(\tau)\, d\tau,$$

de donde por inducción obtenemos

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geqslant 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

La última expresión muestra que el proceso de Poisson es homogéneo. El parámetro λ viene interpretado como número medio de los incrementos unitarios en la unidad de tiempo. ▶

Entre los procesos de Poisson figuran el de desintegración radiactiva ($N(t)$ es el número de átomos desintegrados durante el tiempo t; λ,

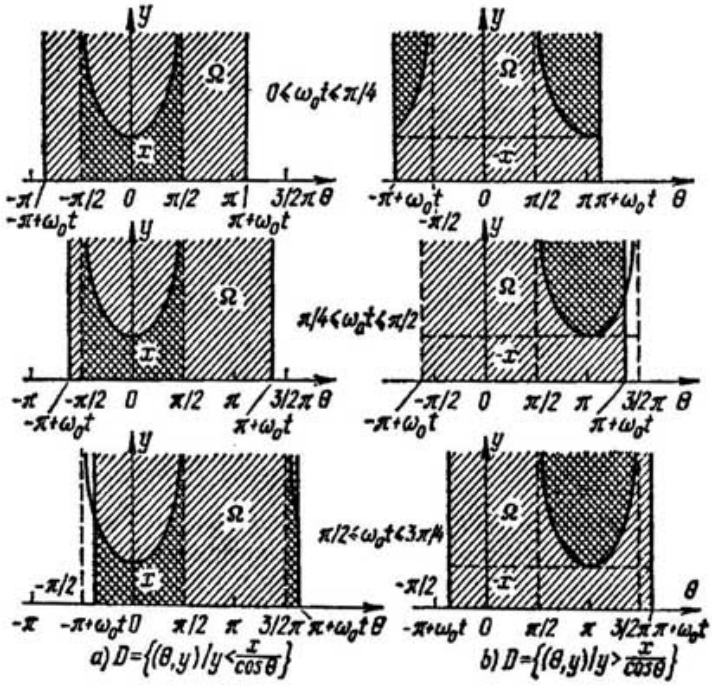


Fig. 124

el número medio de átomos que se desintegran durante el tiempo t), la corriente de llamadas a una central telefónica automática ($N(t)$ es el número de llamadas a la central durante el tiempo t; λ, el número de llamadas en la unidad de tiempo), los fallos de un equipo radioelectrónico ($N(t)$ es el número de elementos del equipo que han fallado durante el tiempo t; λ, el número medio de fallos en la unidad de tiempo), etc.

EJEMPLO 2. El proceso aleatorio $X(t)$ no es más que una *oscilación armónica aleatoria* $X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$, donde ω es la *frecuencia circular no aleatoria*; $A > 0$, la *amplitud aleatoria* con la densidad de distribución de las probabilidades $f_A(a)$ (igual a cero cuando $a < 0$); Φ, la *fase aleatoria de oscilación* que es independiente de A y está distribuida uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$. Hallar la densidad unidimensional $f_1(x, t)$ del proceso aleatorio $X(t)$.

◀ Introduzcamos la variable aleatoria $\Theta = \omega_0 t + \Phi$ y notemos que puesto que para cada t fijo la magnitud $\omega_0 t$ es constante fija, entonces

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta \notin (-\pi + \omega_0 t,\ \pi + \omega_0 t), \\ \dfrac{1}{2\pi}, & \text{si } \theta \in (-\pi + \omega_0 t,\ \pi + \omega_0 t). \end{cases}$$

Escribamos la función de distribución unidimensional:

$$F_1(x/t) = \mathrm{P}\{A\cos\Theta < x\} = \iint\limits_D f_A(y)\, f_\Phi(\theta)\, dy\, d\theta, \qquad (2)$$

donde la integración se efectúa en el dominio $D = \{(\theta, y) \mid y \times \cos\theta < x\}$. En la fig. 124 para tres diferentes valores del parámetro $\omega_0 t$ por el rayado doble está marcado el dominio D, correspondiente a la solución de la inecuación $y\cos\theta < x$, con la particularidad de que la fig. 124, *a* se refiere al caso $x > 0$ y la fig. 124, *b*, al caso $x \leqslant 0$. Para cada uno de estos casos la fig. 124 lleva marcado por el rayado oblicuo el dominio Ω (semifranja), donde la densidad de distribución compatible de las variables aleatorias Φ y A es distinta del cero. En virtud de la distribución uniforme en θ la densidad compatible $f_A(y)\, f_\Phi(\theta)$ en los límites del dominio Ω depende solamente de y, por eso, independientemente del valor del parámetro $\omega_0 t$, la integral doble en la fórmula (2) puede ser escrita, cuando $x > 0$, en la forma

$$F_1(x/t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{x/\cos\theta} f_A(y)\, dy.$$

Derivando respecto a x, obtenemos

$$f_1(x/t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta} f_A\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) d\theta.$$

Con ayuda de la sustitución de las variables

$$u = \frac{x}{\cos\theta}, \qquad d\theta = \frac{x\, du}{u\sqrt{u^2 - x^2}}$$

la integral se reduce a la forma

$$f_1(x/t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_x^{+\infty} \frac{f_A(u)\, du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \quad \text{para } x > 0.$$

Cuando $x \leqslant 0$, como se ve de la fig. 124, *b*,

$$F_1(x/t) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_{x/\cos\theta}^{+\infty} f_A(y)\, dy.$$

Utilizando en la integral interior la misma sustitución de las variables, obtenemos

$$f_1(x/t) = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} f_A\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) \frac{d\theta}{\cos\theta} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^{-\infty} f_A(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \quad \text{para } x \leqslant 0.$$

Ahora bien, para x reales cualesquiera es válida la fórmula

$$f_1(x/t) = \frac{1}{\pi} \int_{|x|}^{+\infty} f_A(u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - x^2}}. \blacktriangleright$$

6.1. Una variable aleatoria es un caso particular de tal función aleatoria en la cual falta la dependencia de t. Sea $X(t) \equiv X$ para todos los $t \in \mathbb{R}$ con la particularidad de que X es una V.A.T.C. que se subordina a la distribución exponencial con el parámetro $\lambda = 2$. Hallar $m_X(t)$, $D_X(t)$ y $F_2(x, y/t_1, t_2)$.

6.2. Una función aleatoria $X(t)$ está representada en la forma $X(t) = U + Vt$, donde U y V son variables aleatorias del tipo continuo con las densidades de distribución de las probabilidades $f_U(u)$ y $f_V(v)$, respectivamente. Escribir la densidad unidimensional $f_1(x/t)$ y las características principales: $m_X(t)$, $D_X(t)$ y $K_X(t_1, t_2)$.

6.3. El proceso aleatorio $X(t)$ tiene la forma

$$X(t) = Vt^2 \qquad (t > 0),$$

donde V es la variable aleatoria que tiene la distribución uniforme en [0, 3]. Hallar la función de distribución unidimensional y la densidad unidimensional de este proceso.

6.4. Una variable aleatoria $X(t)$ está representada en la forma $X(t) = Vt + b$, donde V es una V.A.T.C. que se subordina a la ley $N(m, \sigma)$ y b es una constante no aleatoria. Hallar la densidad unidimensional $f_1(x/t)$ y las características principales del proceso $m_X(t)$, $\sigma_X(t)$, $K_X(t_1, t_2)$.

6.5. Hallar la función de distribución unidimensional

del proceso de Poisson $N(t)$ con el parámetro λ y la probabilidad de que en el transcurso del tiempo τ suceda un número par de saltos.

6.6. Mostrar que si dos variables aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$ no están correlacionadas, entonces la función autocovariante del producto de las mismas es igual al producto de las funciones autocovariantes de los factores aislados.

6.7. Demostrar la propiedad siguiente de la función autocovariante: si $Y(t) = \psi(t) X(t) + \varphi(t)$, donde $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ son las funciones no aleatorias, entonces

$$K_Y(t_1, t_2) = \psi(t_1) \psi(t_2) K_X(t_1, t_2).$$

(De aquí, en particular, se deduce que la adición de una función no aleatoria al proceso aleatorio no varía la función autocovariante.)

6.8. Se da la función covariante de un proceso aleatorio $X(t)$:

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{1+(t_1-t_2)^2}.$$

Hallar la función covariante y la varianza del proceso

$$Y(t) = e^{-t^2} X(t) + \operatorname{sen} 2t.$$

6.9. Un proceso aleatorio $X(t)$ está representado en la forma $X(t) = \varphi(t, Y)$, donde $\varphi(t, y)$ es la función no aleatoria arbitraria de dos argumentos reales: t, el parámetro real (tiempo) e Y, la V.A.T.C. con la densidad de distribución conocida $f_Y(y)$. Escribir las expresiones para las características principales del proceso: $m_X(t)$, $D_X(t)$, $K_X(t_1, t_2)$.

6.10. Hallar la densidad unidimensional de la oscilación armónica aleatoria descrita en el ejemplo 2 si la amplitud aleatoria está distribuida:

a) según la ley de Rayleigh con la densidad de distribución de las probabilidades

$$f_A(y) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & \text{para } y > 0, \\ 0 & \text{para } y \leqslant 0; \end{cases}$$

b) según la ley exponencial con el parámetro λ;

c) uniformemente en el segmento $[0, a]$.

6.11. Hallar la densidad unidimensional, la esperanza matemática y la varianza de la oscilación armónica aleatoria $X(t) = a \cos(\omega t + \Phi)$ con la amplitud constante a y la

frecuencia constante ω y con la fase aleatoria Φ que está distribuida uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$.

6.12. Una oscilación armónica aleatoria está representada en la forma $X(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$, donde ω es la frecuencia no aleatoria y las amplitudes aleatorias A y B son independientes y se subordinan cada una a la ley de distribución $N(0, \sigma)$. Hallar las densidades unidimensional y bidimensional del proceso.

6.13*. Se llama *señal telegráfica* el proceso aleatorio $X(t)$ el cual, con probabilidad igual, puede tomar solamente dos valores $+1$ y -1, con la particularidad de que el número

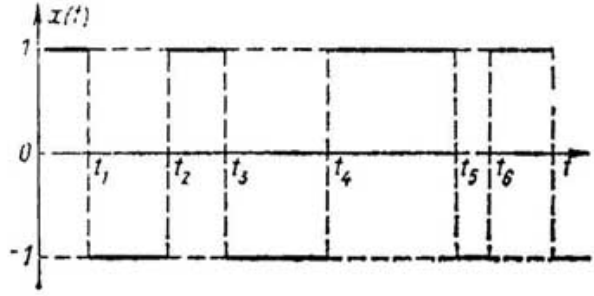


Fig. 125

de cambios del signo durante el tiempo $\tau = t_2 - t_1$ no depende de la prehistoria del proceso hasta el instante t_1 y no es más que el proceso de Poisson $N(\tau)$ con el parámetro λ. Una de las realizaciones de la señal telegráfica se muestra en la fig. 125. Calcular la función autocovariante de la señal telegráfica.

6.14*. Un proceso aleatorio $X(t)$ está definido del modo siguiente: $X(t)$ cambia sus valores en instantes aleatorios con la particularidad de que el número de «saltos» del proceso durante el tiempo τ es un proceso de Poisson con el parámetro λ. En los intervalos entre cada dos saltos los valores del proceso $X(t)$ no varían y no son más que variables aleatorias independientes con la esperanza matemática igual a cero y las varianzas σ^2 iguales. Hallar las características principales del proceso: $m_X(t)$, $D_X(t)$ y $K_X(t_1, t_2)$.

El proceso aleatorio $X(t)$ se llama *normal* (o *gausiano*) si las leyes de distribución unidimensionales y bidimensionales de las secciones del mismo son normales.

6.15*. El ángulo de escora de una nave $\Phi(t)$ es un proceso aleatorio normal con las características $m_X = 0$,

$K_X(t, t+\tau) = \sigma^2 \rho_X(\tau)$. Es sabido que en el instante t_1 el ángulo de escora de la nave constituye $\Phi(t_1) = \alpha$ grados. ¿Cuál es la probabilidad de que en el instante $t_2 = t_1 + \tau$ el ángulo de escora sea mayor que β grados?

6.16*. Mostrar que el proceso aleatorio constituido por una combinación lineal de procesos normales es un proceso normal. En particular, hallar las características del proceso normal $Z(t) = aX(t) + bY(t)$, donde $X(t)$ e $Y(t)$ son los procesos normales con las características

$$m_X(t) = t, \quad m_Y(t) = 1 + t^2, \quad K_X(t_1, t_2) = \frac{4}{1 + 2(t_1 - t_2)^2},$$

$$K_Y(t_1, t_2) = 9e^{-2(t_2 - t_1)^2}, \quad K_{XY}(t_1, t_2) = 4\cos\omega(t_2 - t_1).$$

6.17. Hallar la esperanza matemática y la función covariante del proceso de Poisson $N(t)$ definido en el ejemplo 1.

6.18. El proceso aleatorio $X(t)$ es la magnitud del intervalo de tiempo comprendido entre dos saltos sucesivos del proceso de Poisson $N(t)$ con el parámetro λ. Hallar la densidad unidimensional del proceso aleatorio $X(t)$.

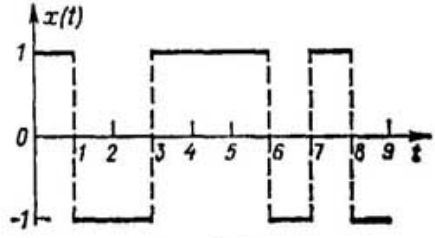


Fig. 126

6.19. El proceso aleatorio $X^{(k)}(t)$ es la magnitud del intervalo de tiempo comprendido entre el n-ésimo salto del proceso de Poisson con el parámetro λ, registrado en el instante t, y el $(n + k)$-ésimo salto del mismo proceso. Hallar la densidad unidimensional del proceso aleatorio $X^{(k)}(t)$. ¿A qué ley de distribución corresponde la densidad obtenida?

6.20. Las realizaciones del proceso aleatorio $X(t)$ se forman del modo siguiente. En el instante inicial el valor de la función es igual, equiprobablemente, a $+1$ ó a -1. El cambio de los valores de la función no puede suceder sino en momentos fijos de tiempo $t_k = k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ en cada uno de los cuales, independientemente de los precedentes valores, tiene lugar un sorteo consecutivo de uno de los dos valores equiprobables: $+1$ ó -1 y el valor escogido se conserva hasta el instante siguiente $t_{k+1} = k + 1$. Una de las realizaciones posibles del proceso está representada en la fig. 126.

Determinar las características principales: $m_X(t)$, $D_X(t)$ y $K_X(t,\ t+\tau)$.

6.21. $X(t)$ es un *impulso rectangular aleatorio de duración* t_0 que es definido por la relación

$$X(t) = A\,(\eta(t-T) - \eta(t-T-t_0)),$$

donde $\eta(u) = \begin{cases} 1, & u > 0, \\ 0, & u \leqslant 0, \end{cases}$ es el escalón unitario; A, la amplitud aleatoria con las características m_A, σ_A^2; T, el tiempo de inicio del impulso, que es el tiempo aleatorio e independiente de A y está distribuido según la ley con la densidad $f_T(t)$; t_0, la duración no aleatoria prefijada del impulso. Hallar $m_X(t)$, $D_X(t)$ y $K_X(t_1,\ t_2+\tau)$ cuando $\tau > 0$.

6.22.** $X(t)$ es el impulso rectangular aleatorio descrito en el problema 6.21. Calcular la varianza del proceso $D_X(t)$ para $t > 0$ si se dan las características siguientes:

a) $t_0 = 1$, A está distribuida según la ley $N(1, 1)$ y T, según la ley $R(0, 1)$;

b) $t_0 = 1$, A está distribuida según la ley $R(0, 1)$ y T, según la ley $N(1, 1)$.

Se llama *descomposición canónica* de una función aleatoria real $X(t)$ la representación de la misma en la forma

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k \varphi_k(t), \tag{3}$$

donde $\varphi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ son las así llamadas *funciones «coordenadas»* reales no aleatorias; V_k $(k = 1, 2, \ldots)$, las variables aleatorias incorrelacionadas centradas de dos en dos con las varianzas D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Si la función aleatoria $X(t)$ está representada por la composición canónica (3), su función autocovariante se escribe en la forma

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} D_k \varphi_k(t_1)\, \varphi_k(t_2). \tag{4}$$

La expresión (4) se denomina también *descomposición canónica de la función autocovariante*. Puesto que en el desarrollo (3) dependen del tiempo únicamente las funciones no aleatorias (esperanza matemática y funciones coordenadas), entonces la cuestión acerca de la derivabilidad o integrabilidad de la descomposición canónica se reduce, de hecho, a la de la derivabilidad o integrabilidad de las funciones coordenadas y de la esperanza matemática en el sentido habitual.

Si en la representación de la función aleatoria

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} U_k \psi_k(t) \tag{5}$$

las variables aleatorias U_k están correlacionadas, entonces tal representación no es una descomposición canónica y por eso la representación (4) para la función autocovariante será inválida. Sin embargo, con ayuda de la transformación lineal se puede reducir la expresión (5) a la forma canónica.

En rasgos generales el problema indicado es análogo a la reducción de la forma bilineal (o cuadrática) a la canónica que se examina en el curso de álgebra lineal.

EJEMPLO 3. El proceso aleatorio $X(t)$ está definido por la expresión (5), donde $\mathbf{M}[U_k] = m_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$K = \begin{pmatrix} D_1 K_{12} \ldots K_{1n} \\ D_2 \ldots K_{2n} \\ \ldots \ldots \\ D_n \end{pmatrix}$$ es la matriz autocovariante,

con la particularidad de que $K_{ij} = \mathbf{M}[\mathring{U}_i \mathring{U}_j] \neq 0$ para $i \neq j$.

Es evidente que la representación (5) no es una descomposición canónica. Se necesita, con ayuda de la transformación lineal, reducir la expresión (5) a la forma canónica.

◀ Ante todo, centremos las variables aleatorias U con ayuda de la transformación idéntica:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k \psi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} (U_k - m_k)\psi_k(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} \mathring{U}_k \psi_k(t).$$

Nótese que la expresión dada puede escribirse en la forma del producto escalar

$$\mathring{X}(t) = \mathring{U}^{\top} \boldsymbol{\psi}(t), \tag{6}$$

donde $\mathring{U}$ y $\boldsymbol{\psi}(t)$ son los vectores columna y el símbolo $\top$ significa la transposición.

En la designación vectorial la matriz autocovariante se escribe del modo siguiente:

$$K_U = \mathbf{M}[\mathring{U}\mathring{U}^{\top}].$$

Sea $V = A\mathring{U}$ un nuevo vector de las variables aleatorias. Escojamos la matriz A de modo que las componentes aleatorias V_k del vector V queden incorrelacionadas de dos en dos. Tenemos

$$K_V = M[VV^{\top}] = \mathbf{M}[A\mathring{U}\mathring{U}^{\top}A^{\top}] = AM[\mathring{U}\mathring{U}^{\top}]A^{\top} = AK_U A^{\top} = D_V, \tag{7}$$

donde D_V es la matriz diagonal de las varianzas de nuevas componentes:

$$D_V = \begin{pmatrix} \mathbf{D}[V_1] & & & \\ & \mathbf{D}[V_2] & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{D}[V_n] \end{pmatrix}.$$

(Para deducir (7) hemos utilizado la propiedad 1°) (el § 4, p. 1) de la esperanza matemática.)

De las igualdades (7) sacamos la conclusión de que la matriz A de transformación de las «coordenadas» reduce la matriz autocovariante K_U a la forma diagonal. Puesto que la matriz K_U es real simétrica (propiedad 1 de la función autocovariante), entonces, según se demuestra en el curso de álgebra lineal, existe la matriz real ortogonal A que satisface las igualdades (7) y se construye del modo siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

(la k-ésima fila de la matriz A es el k-ésimo vector propio ortonormalizado de la matriz K_U el cual corresponde al valor propio de λ_k). Los valores propios λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) de la matriz K_U son raíces de la ecuación

$$\det (K_U - \lambda I) = 0,$$

donde I es la matriz unidad, con la particularidad de que todos los $\lambda_k \geqslant 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), puesto que la matriz K_U es real simétrica. Si la matriz indicada A ya está construida, entonces

$$D_V=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y el orden de disposición de los valores propios de λ_k corresponde al de notación de los vectores propios a_k en la matriz A. Queda escoger un nuevo vector de las funciones coordenadas $\varphi(t)$, partiendo de la condición de invariabililidad del producto escalar (6). Teniendo en cuenta que la matriz ortogonal es regular, obtenemos

$$\mathring{X}(t)=\mathring{U}^{\top}\psi(t)=(A^{-1}A\mathring{U})^{\top}\psi(t)=(A\mathring{U})^{\top}(A^{-1})^{\top}\psi(t)=V^{\top}\varphi(t),$$

donde $V = A\mathring{U}$ es el vector transformado y

$$\varphi(t)=(A^{-1})^{\top}\psi(t)=(A^{\top})^{\top}\psi(t)=A\psi(t). \qquad (8)$$

Aquí hemos tenido en cuenta que $A^{-1} = A^{\top}$ en virtud de la ortogonalidad de la matriz A. Nótese que el problema tiene no única solución. El resultado depende del método de formación de la matriz ortogonal A. Además, se puede poner $\mathbf{D}[V_k] = 1$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) si se escogen nuevas funciones coordenadas en la forma $\varphi'_k(t) = \sqrt{\lambda_k}\varphi_k(t)$.▶

EJEMPLO 4. Una función aleatoria $X(t)$ está definida por la expresión

$$X(t) = U_1 t + U_2 \cos t, \quad \mathbf{M}[U_1] = 1, \quad \mathbf{M}[U_2] = -1,$$

$$K_U=\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Reducir esta función aleatoria a la forma canónica.

◀ Centremos la función: $X(t) = t - \cos t + \mathring{U}_1 t + \mathring{U}_2 \cos t = m_X(t) + \mathring{U}^\top \psi(t)$, donde $\mathring{U} = (\mathring{U}_1, \mathring{U}_2)^\top$, $\psi(t) = (t, \cos t)$. En el ejemplo dado es más cómodo utilizar no la transformación ortogonal sino el método de Lagrange (es análogo al método de Lagrange de reducción de las formas bilineales a la canónica). Para esto transformemos idénticamente la expresión para la función covariante: $K_X(t_1, t_2) = \sigma_1^2 t_1 t_2 + \sigma_1\sigma_2\rho t_1 \cos t_2 + \sigma_1\sigma_2 t_2 \cos t_1 + \sigma_2^2 \cos t_1 \cos t_2 = (\sigma_1 t_1 + \sigma_2\rho \cos t_1)(\sigma_1 t_2 + \sigma_2\rho \cos t_2) + \sigma_2^2(1-\rho^2)\cos t_1 \cos t_2$. Nótese que $\rho = \frac{K_{12}}{\sigma_1\sigma_2} = -\frac{4}{5}$. Designemos

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \sigma_1 t + \sigma_2\rho \cos t, \\ \varphi_2(t) = \sigma_2 \sqrt{1-\rho_2} \cos t \end{cases} \tag{9}$$

y pongamos $D[V_1] = D[V_2] = 1$. La matriz de transformación A que se deduce del sistema (9) tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} \sigma^1 & \sigma^2\rho \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, a distinción del caso examinado en el ejemplo 3, la matriz A no es ortogonal. Exijamos que el producto escalar $\mathring{U}\psi$ no varíe con la transformación lineal. Entonces, análogamente a las fórmulas (8), obtenemos que si $\varphi(t) = A\psi(t)$, entonces $V = (A^\top)^{-1}\mathring{U}$. Calculando la matriz inversa, encontramos

$$(A^\top)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix};$$

así pues, el nuevo vector de las variables aleatorias

$$V = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathring{U}_1 \\ \mathring{U}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3\mathring{U}_1 \\ 4\mathring{U}_1 + 3\mathring{U}_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Comprobemos la no correlatividad de V_1 y V_2:

$$M[V_1V_2] = \frac{1}{81}(12M[\mathring{U}_1^2] + 9M[\mathring{U}_1\mathring{U}_2]) = 0.$$

Ahora bien, obtenemos la descomposición canónica

$$X(t) = t - \cos t + V_1\varphi_1(t) + V_2\varphi_2(t),$$

donde V_1 y V_2 se definen por las ecuaciones (10) y las funciones coordenadas $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$, por las ecuaciones (9). ▶

6.23*. Un proceso aleatorio $X(t)$ se define por la expresión siguiente: $X(t) = U^\top\psi(t)$, donde $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ es el vector aleatorio con el vector de las esperanzas matemáticas

$m_U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y con la matriz covariante $K_U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; el vector de las funciones coordenadas es $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}$. Hallar la descomposición canónica del proceso $X(t)$ y escribir la función autocovariante.

6.24*. Un proceso aleatorio $X(t)$ se define por la representación $X(t) = t + U_1 \cos t + U_2 \operatorname{sen} t$, donde $\mathbf{M}[U_1] = 1$, $\mathbf{M}[U_2] = 2$, $K_U = \begin{pmatrix} 25 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 36 \end{pmatrix}$.

Hallar las descomposiciones canónicas del proceso y de la función autocovariante.

6.25*. Un proceso aleatorio se define por expresión

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{3} U_k \psi_k(t),$$

donde U_k son las variables aleatorias centradas con la matriz covariante

$$K_U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hallar las descomposiciones canónicas del proceso $X(t)$ y de la función autocovariante de éste.

2. Derivación e integración de funciones aleatorias. Se dice que *la función aleatoria $X(t)$ converge en media cuadrática, cuando $t \to t_0$, a la variable aleatoria X_0* (designación breve: $X_0 = \underset{t \to t_0}{\text{l.i.m.}}\ X(t)$) si

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{M}\{[X(t) - X_0]^2\} = 0.$$

La función aleatoria $X(t)$ se llama *continua en media cuadrática en el punto t_0* si

$$\underset{t \to t_0}{\text{l.i.m.}}\ X(t) = X_0 = X(t_0).$$

Para que la función $X(t)$ sea continua en media cuadrática sobre el intervalo $t \in (a, b)$ es necesario y suficiente que $m_X(t)$ sea continua para $t \in (a, b)$ y la función autocovariante $K_X(t_1, t_2)$ sea continua sobre la diagonal $t_2 = t_1 = t \in (a, b)$.

De la convergencia en media cuadrática resulta la convergencia en probabilidad. La afirmación inversa no es justa.

Se llama *derivada de la función aleatoria* $X(t)$ la función aleatoria $Z(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$ que se define como límite en media cuadrática de la relación entre el incremento de la función aleatoria y el del argumento no aleatorio:

$$Z(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{l.í.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}. \tag{11}$$

Para que la función aleatoria $X(t)$ sea derivable en el intervalo (a, b) es necesario y suficiente que la esperanza matemática $m_X(t)$ sea derivable en (a, b) y la función covariante $K_X(t_1, t_2)$ tenga la segunda derivada mixta respecto a t_1 y t_2 en la diagonal $t_1 = t_2 = t \in (a, b)$.

Se denomina *integral en media cuadrática de la función aleatoria* $X(t)$ *entre los límites* t_1 y t_2 la magnitud

$$\int_{t_1}^{t_2} X(t)\, dt = \underset{\substack{n \to \infty \\ \max_k |\Delta s_k| \to 0}}{\text{l.í.m.}} \sum_{k=1}^{n} X(s_k)\, \Delta s_k,$$

donde $s_0 = t_1, s_1, s_2, \ldots, s_n = t_2$ son los puntos de división del segmento (a, b), $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$. Si uno de los límites de la integración es variable, entonces el resultado de la integración será la función aleatoria de este límite variable. Por ejemplo,

$$Y(t) = \int_a^t X(s)\, ds = \underset{\substack{n \to \infty \\ \max_k |\Delta s_k| \to 0 \\ s_0 = a,\ s_n = t}}{\text{l.í.m.}} \sum_{k=1}^{n} X(s_k)\, \Delta s_k. \tag{12}$$

Si $m_X(t)$ y $K_X(t_1, t_2)$ son, respectivamente, la esperanza matemática y la función autocovariante del proceso aleatorio $X(t)$, entonces

$$\mathbf{M}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \frac{dm_X(t)}{dt}, \quad \mathbf{M}\left[\int_a^t X(s)\, ds\right] = \int_a^t m_X(s)\, ds;$$

$$K_Z(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1, t_2);$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_a^{t_1} ds_1 \int_a^{t_2} K_X(s_1, s_2)\, ds_2,$$

donde las funciones aleatorias $Z(t)$ e $Y(t)$ se definen por las fórmulas (11) y (12), respectivamente.

Las expresiones citadas anteriormente para la función autocovariante pueden ser escritas del modo universal en las designaciones siguientes.

· Sea $Y(t) = L_t^0 X(t)$, donde L_t^0 es el operador homogéneo lineal (esto quiere decir que L_t^0 satisface dos condiciones:

$$L_t^0(x_1(t)+x_2(t)) = L_t^0 x_1(t) + L_t^0 x_2(t) \quad \text{(aditividad)},$$

$$L_t^0(cx_1(t)) = cL_t^0 x_1(t) \quad \text{(homogeneidad)},$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son todas funciones no aleatorias (realizaciones del proceso aleatorio) y c es la constante no aleatoria). Entonces

$$m_Y(t) = L_t^0 m_X(t), \quad K_Y(t_1, t_2) = L_{t_1}^0 L_{t_2}^0 K_X(t_1, t_2). \qquad (13)$$

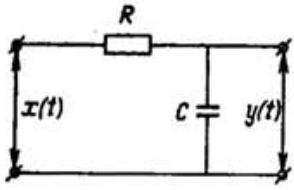


Fig. 127

EJEMPLO 5. Al circuito RC representado en la fig. 127 se aplica una tensión aleatoria $X(t)$ con las características $m_X(t) = 2t$ y $K_X(t_1, t_2) = 4t_1 t_2$. Hallar la esperanza matemática, la función autocovariante y la varianza de la tensión $Y(t)$ en la salida del circuito RC.

◀ La ecuación diferencial que describe la relación entre las tensiones de entrada y de salida del circuito RC se plantea sobre la base de las leyes de Kirchhoff y tiene la forma

$$\frac{dy(t)}{dt} + \beta y(t) = \beta x(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0.$$

Resolviendo la ecuación diferencial dada para la condición inicial nula con ayuda del método de variación de la constante, obtenemos

$$y(t) = \beta e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} x(\tau)\, d\tau.$$

Así pues, el proceso aleatorio $Y(t)$ es el resultado de aplicación del operador homogéneo lineal $L_t^0 x = \beta e^{-\beta\tau} \int_0^t e^{\beta\tau} x\, d\tau$ al proceso aleatorio $X(t)$. Por eso, de acuerdo con las fórmulas (13),

$$m_Y(t) = \beta e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta\tau} m_X(\tau)\, d\tau =$$

$$= \beta e^{-\beta t} \cdot 2 \int_0^t \tau e^{\beta\tau}\, d\tau = 2\left[t - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\right];$$

$$K_Y(t_1, t_2) = 4\beta^2 e^{-\beta(t_1+t_2)} \int_0^{t_1} e^{\beta s_1} s_1 \, ds_1 \cdot \int_0^{t_2} e^{\beta s_2} s_2 \, ds_2 =$$

$$= 4\left[t_1 - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t_1})\right]\left[t_2 - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t_2})\right].$$

La varianza del proceso en la salida

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = 4\left[t - \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\right]^2. \blacktriangleright$$

6.26. Una función aleatoria se define por la descomposición canónica

$$X(t) = t + V_1 \cos t + V_2 \operatorname{sen} t, \quad \mathrm{D}[V_1] = 1, \mathrm{D}[V_2)] = 2.$$

Calcular las esperanzas matemáticas, las varianzas y las funciones autocovariantes de las funciones aleatorias siguientes:

$$X(t), \quad Z(t) = \frac{dX(t)}{dt}, \qquad Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds.$$

6.27*. Investigar la cuestión sobre la continuidad y la derivabilidad en el proceso medio cuadrático de Poisson que está definido en el ejemplo 1 y tiene las características obtenidas al resolver el problema 6.17.

6.28*. Investigar la cuestión sobre la continuidad y la derivabilidad en media cuadrática de la señal telegráfica definida en el problema 6.13.

6.29. A la salida de un diferenciador se suministra un proceso aleatorio con la esperanza matemática $m_X(t) = 3t^2 + t$ y la función autocovariante

$$K_X(t_1, t_2) = \sigma^2 e^{-\alpha|t_1 - t_2|}(1 + \alpha|t_1 - t_2|).$$

¿Es derivable en media cuadrática este proceso? Hallar la varianza del proceso en la salida del diferenciador.

6.30*. Una función aleatoria $X(t)$ se define por la expresión

$$X(t) = V \cos \omega t,$$

donde V es la variable aleatoria con las características $m_V = 2$, $\sigma_V = 3$. Hallar las características de la función

aleatoria

$$Y(t) = X(t) + 3\frac{dX(t)}{dt}.$$

6.31. La función covariante de un proceso aleatorio $X(t)$ tiene la forma

$$K_X(t_1, t_2) = D_X e^{-\alpha(t_2 - t_1)^2} \cos \beta (t_2 - t_1),$$

$$\alpha > 0, \ \beta > 0.$$

Determinar la varianza de la derivada del proceso $X(t)$.

6.32. Se conocen las características de un proceso aleatorio:

$$m_X(t) = 3t^2 + 2t + 1, \quad K_X(t_1, t_2) = 2e^{-(t_2 - t_1)^2}.$$

Hallar la esperanza matemática y la varianza del proceso

$$Y(t) = t\frac{dX(t)}{dt} + t^2.$$

6.33. A la entrada de un integrador que funciona según el principio $y(t) = \int_0^t x(s)\, ds$, donde $x(s)$ es la realización arbitraria del proceso aleatorio en la entrada, se suministra el proceso aleatorio $X(t)$ con la función autocovariante $K_X(t_1, t_2) = 4 \cos \omega t_1 \cos \omega t_2$ y la esperanza matemática $m_X(t) = 1 + \operatorname{sen}^2 \omega t$. Hallar la esperanza matemática y la varianza del proceso aleatorio $Y(t)$ en la salida del integrador.

6.34. A la entrada del integrador descrito en el problema precedente se aplica un impulso rectangular aleatorio (véase el problema 6.21) con las características siguientes: la duración del impulso es igual a t_0; A está distribuida según la ley $N(0, \sigma)$ y T, según la ley $\mathrm{Ex}(\lambda)$. Hallar la varianza del proceso $Y(t)$ en la salida del integrador en un instante arbitrario.

6.35. Se da la función covariante $K_X(t_1, t_2)$ de un proceso aleatorio $X(t)$. Mostrar que la función covariante recíproca de los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds$ puede ser representada en la forma de $K_{XY}(t_1, t_2) =$

$= \int_0^{t_2} K_X(t_1, s)\, ds$ y la función covariante recíproca de los procesos $X(t)$ y $Z(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. en la forma de $K_{XZ}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} K_X(t_1, t_2)$.

6.36. La función covariante de un proceso aleatorio $X(t)$ se da en la forma $K_X(t_1, t_2) = t_1^2 + t_1 t_2 + 2t_2^2$. Hallar:

a)* la función covariante recíproca $K_{XY}(t_1, t_2)$ de los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t) = \int_0^t X(s)\, ds$;

b) la función covariante del proceso $Y(t)$.

6.37. La función covariante de un proceso aleatorio $X(t)$ se da al igual que en el problema 6.36. Hallar: a) la función covariante del proceso $Z(t) = \frac{dX(t)}{dt}$; b) la función covariante recíproca de los procesos $X(t)$ y $Z(t)$.

6.38. Una función aleatoria $X(t)$ se define por la expresión

$$X(t) = Ve^{\alpha t} \cos \omega t,$$

donde V es la variable aleatoria con $m_V = 2$ y $\sigma_V = 3$. Hallar la esperanza matemática y la varianza de la función aleatoria $Y(t) = \beta X(t) + \gamma \int_0^t X(s)\, ds$, donde α, β, γ y ω son las constantes.

3. Funciones aleatories estacionarias. La función aleatoria $X(t)$ se llama *estrictamente estacionaria* (*estacionaria en el sentido estrecho*) si sus n-dimensionales leyes de distribución son invariantes con respecto al desplazamiento en el tiempo en una variable aleatoria τ. Por ejemplo, si una función aleatoria del tipo continuo $X(t)$ es estrictamente estacionaria, entonces

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n/t_1 + \tau, \quad t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = \\ = f_n(x_1, \ldots, x_n/t_1, \ldots, t_n).$$

Si la función aleatoria es estrictamente estacionaria, su esperanza matemática y varianza no dependen del tiempo y su función autocovariante $K_X(t, t + \tau)$ depende solamente de la diferencia de instantes de tiempo, o sea, de τ. La conclusión inversa es, en el caso general, errónea. La función aleatoria $X(t)$ se denomina *estacionaria en el sentido ancho* si su esperanza matemática y varianza no dependen de t y la función autocovariante $K_X(t, t + \tau)$ depende únicamente de la diferencia de argumentos: $K_X(t, t + \tau) = K_X(\tau)$. Para los procesos

aleatorios normales ambos conceptos de carácter estacionario coinciden. La función autocovariante de una función aleatoria estacionaria en el sentido ancho posee las propiedades siguientes (corolarios de las propiedades generales de la función autocovariante):

1. $K_X(\tau) = K_X(-\tau)$, $K_X(0) \geqslant 0$.
2. $|K_X(\tau)| \leqslant K_X(0) = D_X$.
3. La función $K_X(t_1 - t_2)$ está definida no negativamente. Si $X(t)$ es una función aleatoria derivable y estacionaria en el sentido ancho $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$, entonces $Y(t)$ es también una función aleatoria estacionaria en el sentido ancho con la particularidad de que

$$m_Y = 0, \qquad K_Y(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} K_X(\tau).$$

Para la derivabilidad de una función aleatoria estacionaria en el sentido ancho es necesario y suficiente la existencia de la segunda derivada de la función autocovariante cuando $\tau = 0$. Puesto que para una función aleatoria $X(t)$ estacionaria en el sentido ancho tenemos

$$\mathrm{D}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = K_Y(0) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_X(\tau)|_{\tau=0},$$

la condición de derivabilidad es de hecho equivalente a la condición de que la varianza de la derivada de la función aleatoria estacionaria sea finita.

Se denomina *media en intervalo finito de tiempo*, obtenido de la realización del proceso aleatorio estacionario $X(t)$, el número (hablando en general, aleatorio) que se define por la relación

$$\langle x(t)\rangle_0^T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt.$$

El proceso aleatorio estacionario $X(t)$ se llama *estrictamente ergódico respecto a la esperanza matemática* si se cumple la condición

$$\lim_{T\to\infty} \langle x(t)\rangle_0^T = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x/t)\,dx,$$

donde el límite en el primer miembro se entiende en el sentido habitual (o sea, si la media en intervalo infinito de tiempo obtenida de una realización (cualquiera) es igual a la media en conjunto de realizaciones (media en conjunto)). La condición de ergodicidad estricta es demasiado rígida. Menos restrictiva es la condición de ergodicidad *débil*. El proceso aleatorio estacionario se llama *débilmente ergódico respecto a la esperanza matemática* si la media en tiempo obtenida de una realización (cualquiera) converge en media cuadrática a la esperanza matemática, o sea,

$$\lim_{T\to\infty} \langle x(t)\rangle_0^T = m_X.$$

Análogamente se define la ergodicidad débil respecto a la función autocovariante.

El proceso aleatorio estacionario se denomina *débilmente ergódico respecto a la función autocovariante* si se cumple la condición

$$\text{l.i.m.}_{t\to\infty} \overset{\circ}{x}(t)\,\overset{\circ}{x}(t+\tau)_0^T = K_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_X)(x_2 - m_X) f_2(x_1,\ x_2/t,\ t+\tau)\,dx_1\,dx_2.$$

TEOREMA DE SLUTSKI. *La condición necesaria y suficiente de que el proceso estacionario $X(t)$ sea débilmente ergódico respecto a la esperanza matemática es la condición*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T K_X(\tau)\left(1 - \frac{\tau}{T}\right) d\tau = 0.$$

La condición suficiente de ergodicidad débil respecto a la esperanza matemática es la condición

$$K_X(\tau) \to 0 \text{ cuando } \tau \to \infty.$$

Dos funciones aleatorias estacionarias $X(t)$ e $Y(t)$ se llaman *estacionariamente conexas* si la función covariante recíproca de las mismas depende sólo de la diferencia de argumentos.

EJEMPLO 6. El proceso aleatorio $X(t)$ es una oscilación armónica aleatoria definida al igual que en el ejemplo 2:

$$X(t) = A\cos(\omega t + \Phi),$$

donde $A > 0$ es la amplitud aleatoria, con la densidad de distribución de las probabilidades $f_A(a)$ (es igual a cero cuando $a < 0$) tal que existe el segundo momento inicial $\mathbf{M}[A^2]$; Φ es la fase de la oscilación aleatoria, independiente de A, que está distribuida uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$. Hallar la función autocovariante del proceso y responder a las preguntas siguientes:

1) ¿Es el proceso en cuestión estacionario en el sentido ancho?

2) ¿Es derivable una vez el proceso dado?

3) ¿Es este proceso ergódico o débilmente ergódico respecto a la esperanza matemática?

◀ 1) Escribamos $X(t)$ del modo siguiente:

$$X(t) = A\cos\Phi\cos\omega t - A\,\text{sen}\,\Phi\,\text{sen}\,\omega t = V_1\cos\omega t - V_2\,\text{sen}\,\omega t. \qquad (14)$$

Tomando en consideración la independencia de A y Φ, tenemos

$$\mathbf{M}[V_1] = \mathbf{M}[A\cos\Phi] = \mathbf{M}[A]\,\mathbf{M}[\cos\Phi] = m_A \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

donde $m_A = \int_{-\infty}^{\infty} a f_A(a)\,da$.

Análogamente se determina que también $\mathbf{M}[V_2] = 0$. Hallemos la covarianza de las variables aleatorias V_1 y V_2:

$$K_{12} = \mathbf{M}[V_1 V_2] = \mathbf{M}[A^2 \cos \Phi \operatorname{sen} \Phi] = \mathbf{M}[A^2] \cdot \frac{1}{2} \mathbf{M}[\operatorname{sen} 2\Phi] = 0.$$

Por eso la expresión (14) es una descomposición canónica. Por consiguiente, según la fórmula (4)

$$K_X(t_1, t_2) = \mathbf{D}[V_1] \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \mathbf{D}[V_2] \operatorname{sen} \omega t_1 \operatorname{sen} \omega t_2.$$

Aplicando la propiedad 7) de la varianza del producto de variables aleatorias, podemos escribir

$$\mathbf{D}[V_1] = \mathbf{D}[A \cos \Phi] = \mathbf{D}[A]\,\mathbf{D}[\cos \Phi] + m_A^2 \mathbf{D}[\cos \Phi] +$$

$$+ \mathbf{M}^2[\cos \Phi]\,\mathbf{D}[A] = \mathbf{D}[\cos \Phi]\,(\mathbf{D}[A] + m_A^2) = \mathbf{M}[A^2]\,\mathbf{D}[\cos \Phi].$$

Pero

$$\mathbf{D}[\cos \Phi] = \mathbf{M}[\cos^2 \Phi] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}$$

y

$$\mathbf{M}[A^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_A(a)\, da.$$

Así pues, $\mathbf{D}[V_1] = \frac{1}{2} \mathbf{M}[A^2]$. Análogamente se obtiene $\mathbf{D}[V_2] = \frac{1}{2} \mathbf{M}[A^2]$. Por eso la función autocovariante $K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \mathbf{M}[A^2] \cos \omega (t_2 - t_1)$ depende únicamente de la diferencia de los instantes. Además, $\mathbf{M}[X(t)] = 0$ en virtud de la centralidad demostrada de las variables aleatorias V_1 y V_2. De aquí resulta que el proceso $X(t)$ es estacionario en el sentido ancho.

2) Comprobemos las condiciones suficientes de derivabilidad:

$$K_X''(\tau)|_{\tau=0} = -\frac{\mathbf{M}[A^2]}{2} \omega^2 \cos \omega\tau|_{\tau=0} = \frac{\mathbf{M}[A^2]}{2} \omega^2$$

es una magnitud finita, por eso el proceso es derivable.

3) Calculemos la media en intervalo finito de tiempo obtenida de una realización

$$\langle x(t) \rangle_0^T = \frac{1}{T} \int_0^T a_1 \cos(\omega t + \varphi_1)\, dt = \frac{a_1}{\omega T} (\operatorname{sen} \omega T + \varphi_1) - \operatorname{sen} \varphi_1).$$

De aquí

$$\lim_{T \to \infty} \langle x(t) \rangle_0^T = 0 = m_X,$$

por eso el proceso es estrictamente ergódico (y, por lo tanto, también débilmente ergódico) respecto a la esperanza matemática. ▶

6.39. ¿Es derivable el proceso aleatorio estacionario con la función autocovariante $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$?

6.40. Un proceso aleatorio $X(t)$ está representado por la descomposición canónica siguiente:

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} U_k \cos \omega_k t + V_k \operatorname{sen} \omega_k t,$$

donde U_k y V_k son las variables aleatorias incorrelacionadas centradas con la particularidad de que $\mathbf{M}[U_i U_j] = \mathbf{M}[V_i V_j] = D_i \delta_{ij}$, $\mathbf{M}[U_i V_j] = 0$ para todos los $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Mostrar que el proceso dado es estacionario en el sentido ancho y hallar la función autocovariante y la varianza del proceso.

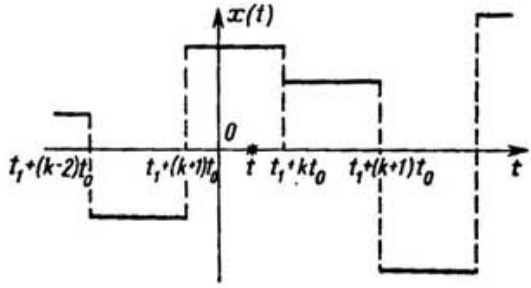


Fig. 128

6.41. Un proceso aleatorio $X(t)$ es superposición de oscilaciones armónicas de la forma

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos(\omega_k t + \Phi_k),$$

donde $\{A_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son las amplitudes aleatorias incorrelacionadas centradas ($\mathbf{M}[A_i A_j] = D_i \delta_{ij}$); $\{\Phi_k\}$, las fases aleatorias, independientes de cualquiera de las variables aleatorias A_i, que están distribuidas según una misma ley con la densidad $f_\Phi(\varphi)$ e incorrelacionadas entre sí. Calcular las varianzas de los procesos $X(t)$, $\frac{dX(t)}{dt}$ y $\int_0^t X(\tau) d\tau$.

6.42. Se llama *señal fototelegráfica* el proceso aleatorio $X(t)$ cuyas realizaciones se construyen del modo siguiente. En cierto instante aleatorio T_1 aparece un impulso rectangular de duración t_0 con la amplitud aleatoria A_1, distribuida independientemente de T_1, que tiene las características

$m_{A_1} = 0$, $\sigma_{A_1} = \sigma$. En el instante $T_1 + t_0$ el impulso dado se termina y aparece el impulso siguiente de duración t_0 con la amplitud aleatoria A_2 distribuida al igual que A_1, pero independientemente de A_1 y T_1, etc. Una de las realizaciones de este proceso se muestra en la fig. 128 (en este caso suponemos que el inicio del proceso (instante T_1) en un modelo perfecto de la señal telegráfica se encuentra en $-\infty$). Hallar las características del proceso: $m_X(t)$ y $K_X(t_1, t_2)$. ¿Es estacionario en el sentido ancho este proceso?

◀ Fijemos el instante de observación t. Sea $t \in (t_k, t_k + t_0)$, donde t_k es el instante del inicio del k-ésimo impulso. Con estos valores de t se observa la variable aleatoria A_k la cual, según los datos, está centrada para cualesquiera $k \in \mathbb{N}$. Por eso $\mathbf{M}[X(t)] = 0$. Sea $t_2 = t + \tau$ ($\tau > 0$). En virtud de la arbitrariedad del instante de observación t y de la casualidad de los instantes t_k se puede considerar que el intervalo de tiempo T entre el instante t y el de terminación del k-ésimo impulso ($t_k + t_0$) es una variable aleatoria distribuida según la ley $R(0, t_0)$. Por eso

$$\mathbf{M}[X(t)\,X(t+\tau)] = \begin{cases} \sigma^2 \mathbf{P}\{\tau < T\} + 0 \cdot \mathbf{P}\{\tau \geqslant T\}, & 0 < \tau < t_0, \\ 0, & \tau \geqslant t_0. \end{cases}$$

En virtud de la distribución uniforme de T obtenemos

$$K_X(t, t+\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \dfrac{\tau}{t_0}\right), & 0 < \tau < t_0, \\ 0, & \tau \geqslant t_0. \end{cases}$$

El hecho de que la función covariante depende únicamente de la diferencia de instantes evidencia que el proceso $X(t)$ es estacionario en el sentido ancho. ▶

6.43. Determinar cuántas veces es derivable el proceso aleatorio estacionario $X(t)$ con la función autocovariante

a) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$, $\alpha > 0$;

b) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \dfrac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$, $\alpha > 0$;

c) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \dfrac{\alpha}{\beta}\operatorname{sen}\beta|\tau|\right)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Escribir la función autocovariante de la segunda derivada del proceso dado, si ésta existe, y hallar la varianza de la misma.

6.44. A la entrada de un circuito radiotécnico compuesto por la conexión en serie de diferenciadores y el sumador (fig. 129) se suministra una señal estacionaria aleatoria $X(t)$ con la esperanza matemática nula y la función autocovarian-

te $K_X(\tau)$. Hallar la función autocovariante de la señal aleatoria $Y(t)$ en la salida del sumador.

6.45. Mostrar que la función covariante recíproca $K_{XY}(t, t')$ de la función aleatoria estacionaria $X(t)$ y de la derivada de ésta $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ satisface la condición

$$K_{XY}(t, t') = -K_{XY}(t', t).$$

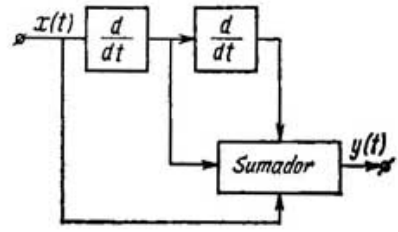


Fig. 129

6.46*. Mostrar que si $X(t)$ es un proceso aleatorio derivable normal y estacionario en el sentido ancho, entonces el proceso $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ es también normal y estacionario en el sentido ancho. Hallar las características m_Y, $K_Y(\tau)$ y D_Y si $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sen}\beta\,|\tau|\right)$, donde α y β son las constantes positivas.

6.47. Un proceso aleatorio estacionario normal $X(t)$ tiene las características

$$m_X = 1,\ K_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}\left(\cos 3\tau + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3|\tau|\right).$$

Calcular $\mathbf{P}\left\{\left|\frac{dX(t)}{dt}\right| < \sqrt{13}\right\}$.

6.48. Mostrar que dos oscilaciones armónicas aleatorias $X(t) = A\cos(\omega t + \Phi)$ e $Y(t) = B\cos(\omega t + \Phi)$, donde A y B son dos amplitudes aleatorias centradas con la covarianza K, y Φ es la fase aleatoria, independiente de A y B y distribuida uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, son estacionariamente conexos.

6.49. Mostrar que si un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ es derivable, entonces es estacionariamente conexo con su derivada. Hallar la función covariante de conexión $K_{XY}(t_1, t_2)$, donde $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

6.50*. El proceso normal estacionario $X(t)$ tiene las características $m_X = 0$, $K_X(\tau) = \delta_X^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$ ($\alpha > 0$ es la magnitud constante). Hallar la densidad bidimensional de distribución compatible de las probabilidades de los procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ en un mismo instante.

6.51*. Un proceso aleatorio normal estacionario $X(t)$ tiene la función autocovariante

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos \omega\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \omega\,|\tau|\right).$$

Hallar la función covariante de conexión de los procesos

$$X(t) \text{ e } Y(t) = \frac{dX(t+t_0)}{dt}.$$

6.52*. Un proceso aleatorio estacionario normal $X(t)$ tiene las características $m_X = m$, $\sigma_X = \sigma$, $\rho_X(\tau) = \rho(\tau)$. Hallar la función característica del vector aleatorio bidimensional $(X(t), X(t'))$ y con ayuda de ésta calcular $\mathbf{M}[X^2(t)X^2(t')]$.

6.53*. $X(t)$ es un proceso estacionario normal con las características $m_X = m$, $\sigma_X = \sigma$, $\rho_X(\tau) = \rho(\tau)$. Hallar la función autocovariante del proceso $Z(t) = X^2(t)$.

6.54. A la entrada de un integrador que funciona según el principio $y(t) = \int_0^t x(s)\,ds$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son las realizaciones de los procesos de entrada y de salida, respectivamente, llega un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ con la función autocovariante $K_X(\tau)$. Mostrar que

a)* $\sigma_Y^2(t) = 2\int_0^t (t-\tau)\,K_X(\tau)\,d\tau$;

b) $K_{XY}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} K_X(t_1-\tau)\,d\tau$.

6.55*. Se da la función autocovariante de un processo aleatorio estacionario $X(t)$: $K_X(\tau) = 4e^{-2|\tau|}$. Hallar la varianza de la función aleatoria $Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds$.

6.56*. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ tiene la función autocovariante $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$. Aclarar si este proceso está estacionariamente conexo con el proceso $Y(t) = \int_0^t X(s)\,ds$.

6.57. Se conoce la función autocovariante del proceso aleatorio estacionario $X(t)$:

$$K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

Determinar la función covariante de conexión entre $X(t)$ e $Y(t) = \frac{d^2X(t)}{dt^2}$.

6.58. Aclarar si son débilmente ergódicos respecto a la esperanza matemática los procesos aleatorios siguientes:

a) la señal telegráfica definida en el problema 6.13;

b) la señal fototelegráfica definida en el problema 6.42;

c) el proceso de Poisson examinado en el problema 6.17.

6.59. Mostrar que la magnitud $\langle x(t)\rangle_0^T$ es una estimación insesgada y conciliable [1]) para la esperanza matemática de un proceso aleatorio $X(t)$ estacionario en el sentido amplio y débilmente ergódico respecto a la función autocovariante.

6.60. Mostrar que la media en intervalo finito de tiempo $\langle \mathring{x}(t)\,\mathring{x}(t+\tau)\rangle_0^T$ para una realización arbitraria $x(t)$ del proceso $X(t)$, estacionario en el sentido ancho, es una estimación insesgada para la función autocovariante $K_X(\tau)$. Calcular esta estimación para la oscilación armónica aleatoria examinada en los ejemplos 2 y 6.

6.61. Mostrar que si un proceso $X(t)$ estacionario en el sentido ancho es débilmente ergódico respecto a la función autocovariante, entonces la magnitud $\langle \mathring{x}(t)\,\mathring{x}(t+\tau)\rangle_0^T$, donde $x(t)$ es la realización arbitraria del proceso, es una estimación conciliable de la función autocovariante $K_X(\tau)$.

6.62. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ es la oscilación armónica aleatoria definida en el ejemplo 2. ¿Es este proceso estrictamente ergódico o débilmente ergódico respecto a la función autocovariante?

6.63. ¿Es la función armónica aleatoria $X(t) = a\cos(\omega t + \Phi)$, donde a es la amplitud constante y Φ, la variable aleatoria distribuida uniformemente en el segmento $[-\pi, \pi]$, un proceso débilmente ergódico respecto a la función autocovariante?

6.64*. $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario normal con la esperanza matemática nula, la varianza σ^2 y la fun-

---

[1]) Las definiciones de estos términos véanse en el cap. 15, § 2, p. 2.

ción autocorrelativa $\rho(\tau)$. Calcular la función autocovariante del proceso aleatorio $Y(t) = \operatorname{sign} X(t)$, donde la función

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

4. Descomposición espectral de funciones aleatorias estacionarias. Una función aleatoria $X(t)$ estacionaria en el sentido ancho que está prefijada en todo el campo de definición de $t \in G_t$ por la descomposición canónica que tiene la forma

$$X(t) = m_X + \sum_{k=0}^{n} U_k \cos \omega_k t + V_k \operatorname{sen} \omega_k t, \tag{15}$$

donde U_k y V_k son las variables aleatorias centradas que satisfacen las condiciones

$$\mathbf{M}[V_i V_j] = \mathbf{M}[U_i U_j] = D_i \delta_{ij},$$

$$\mathbf{M}[V_i U_j] = 0 \quad \text{para todos los} \quad i, j = 0, 1, \ldots, n,$$

se llama *función aleatoria con espectro discreto*. La función autocovariante de tal proceso tiene la forma (véase el problema 6.40)

$$K_X(\tau) = \sum_{k=0}^{n} D_k \cos \omega_k \tau. \tag{16}$$

Las representaciones (15) y (16) se denominan *descomposiciones espectrales del proceso aleatorio* y *de la función autocovariante*, respectivamente. La varianza del proceso es la suma de las varianzas de distintos armónicos en las frecuencias ω_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$:

$$D_X = K_X(0) = \sum_{k=0}^{n} D_k .$$

Si el número de sumandos n es infinitamente grande y las frecuencias ω_k son múltiples de la frecuencia fundamental $\left(\text{o sea, } \omega_k = k\omega_1 = \frac{k\pi}{T} \right)$, entonces la descomposición (16) es, de hecho, una serie de Fourier de los cosenos de arcos múltiples de la función $K_X(\tau)$ en el segmento $[-T, T]$ (en virtud de la paridad de la función $K_X(\tau)$, prolongada periódicamente a todo el eje, la serie contiene sólo los cosenos).

Las funciones aleatorias estacionarias, que se examinan únicamente en el intervalo finito $t \in [-T, T]$, siempre pueden ser representadas en forma de las descomposiciones espectrales (15) y (16).

Si la función autocovariante $K_X(\tau)$ no es periódica, entonces el proceso aleatorio estacionario $X(t)$ no puede representarse sobre todo en el eje $-\infty < t < \infty$ en forma de las descomposiciones (15) y (16)

y, por consiguiente, no es un proceso con espectro discreto para todos los t reales.

La función aleatoria estacionaria $X(t)$ se llama *función aleatoria con espectro continuo* si existe tal función no negativa real $S_X(\omega)$, definida sobre todo el eje de frecuencias $-\infty < \omega < +\infty$ y llamada *densidad espectral*, que sean válidas las *fórmulas* integrales *de Wiener — Jinchin*

$$K_X(\tau) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \tag{17}$$

$$S_X(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \tag{18}$$

Para que las representaciones (17) y (18) sean válidas es suficiente que la función covariante $K_X(\tau)$ sea integrable absolutamente sobre el semieje. Ahora bien, la función autocovariante y la densidad espectral de una función aleatoria estacionaria con espectro continuo están ligadas entre sí por las *cosenos transformaciones recíprocamente inversas de Fourier*. De las fórmulas (17) — (18) y las propiedades de la función covariante $K_X(\tau)$ se desprende que $S_X(\omega)$ es una función par: $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$. En virtud de la paridad de las funciones subintegrales en las fórmulas de Wiener — Jinchin, estas últimas pueden ser escritas también en la forma exponencial:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \tag{19}$$

$$S_X(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \tag{20}$$

Como se deduce de (17) y (19), la varianza de un proceso estacionario con espectro continuo puede expresarse en forma de la integral de la densidad espectral:

$$D_X = K_X(0) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\, d\omega. \tag{21}$$

Las condiciones de que $S_X(\omega) \geqslant 0$ y $S_X(-\omega) = S_X(\omega)$ para todos los ω reales son condiciones necesarias de carácter estacionario en el sentido ancho de un proceso aleatorio $X(t)$. Para las funciones aleatorias estacionarias con espectro continuo son útiles características llamadas *anchura efectiva del espectro* $\Delta\omega$ *e intervalo medio de correlación* $\Delta\tau$ (*duración efectiva de la función de autocorrelación*) que se

definen del modo siguiente:

$$\Delta\omega=\frac{1}{\max\limits_{\omega} S_X(\omega)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\,d\omega=\frac{2\sigma_X^2}{\max\limits_{\omega} S_X(\omega)},$$

$$\Delta\tau=2\int\limits_{0}^{+\infty}|\rho_X(\tau)|\,d\tau=\frac{2}{\sigma_X^2}\int\limits_{0}^{+\infty}|K_X(\tau)|\,d\tau.$$

El intervalo medio geométrico de correlación $\Delta\tau$ (la anchura efectiva del espectro $\Delta\tau$, respectivamente) es igual a la base de un rectángulo de altura $\rho_X(0)=1\cdot(\max\limits_{\omega} S_X(\omega))$ cuya área es igual al área debajo de la curva $|\rho_X(\tau)|$ para $-\infty<\tau<+\infty$ (al área debajo de la curva $S_X(\omega)$ para $-\infty<\omega<+\infty$). De estas definiciones y de la fórmula (20) se deduce que las magnitudes $\Delta\tau$ y $\Delta\omega$ están ligadas entre sí por la desigualdad

$$\Delta\tau\cdot\Delta\omega\geqslant 2\pi \qquad (22)$$

(que suele denominarse «relación de indeterminación»). El sentido de la relación (22) puede ser expresado brevemente en la forma de la regla siguiente: *cuanto más estrecha sea la anchura del espectro de un proceso estacionario, tanto mayor será el intervalo de correlación de las secciones del mismo y al contrario.*

EJEMPLO 7. La función autocovariante de una función aleatoria estacionaria $X(t)$ se da en la forma de $K_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $-\infty<\tau<+\infty$, $\alpha>0$. Hallar la densidad espectral $S_X(\omega)$ y las características efectivas $\Delta\tau$ y $\Delta\omega$.

◀ Para calcular $S_X(\omega)$ es más cómodo, en el caso dado, utilizar la fórmula (20):

$$S_X(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau)\,e^{i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sigma_X^2\left[\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau+i\omega\tau}\,d\tau+\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau+i\omega\tau}\,d\tau\right]=\frac{\sigma_X^2}{\pi}\cdot\frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Haciendo uso de las definiciones, encontramos la anchura efectiva del espectro

$$\Delta\omega=\frac{2\sigma_X^2}{\max\limits_{\omega} S_X(\omega)}=\frac{2\sigma_X^2}{S_X(0)}=\pi\alpha$$

y el intervalo medio de correlación

$$\Delta\tau=\frac{2}{\sigma_X^2}\sigma_X^2\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{2}{\alpha}.$$

Así pues, en el ejemplo dado la desigualdad (22) se transforma en igualdad. ▶

EJEMPLO 8. Se llama *ruido blanco* el proceso aleatorio y estacionario en el sentido ancho que tiene la densidad espectral constante en todas las frecuencias $-\infty < \omega < +\infty$. El ruido blanco no es realizable físicamente, puesto que su varianza es infinita en consonancia con la fórmula (19). Sea $X(t)$ un proceso estacionario en el sentido ancho con la densidad espectral $S_X(\omega)$ que tiene la forma siguiente:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{D_X}{\omega_0}, & |\omega| < \omega_0, \\ 0 & |\omega| \geqslant \omega_0 \end{cases}$$

(*ruido blanco de baja frecuencia*).
Hallar la función autocovariante del proceso dado y aclarar si es el ruido blanco de baja frecuencia: a) derivable; b) débilmente ergódico respecto a la esperanza matemática.

◀ Según la fórmula (17) tenemos

$$K_X(\tau) = \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega =$$

$$= \frac{D_X}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} \cos \omega\tau d\omega = D_X \frac{\operatorname{sen} \omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

a) Puesto que $|K_X''(\tau)|_{\tau=0} = \dfrac{D_X\omega_0^2}{3} < +\infty$, el proceso es derivable.

b) Puesto que $K_X(\tau) \to 0$ cuando $\tau \to +\infty$, el ruido blanco de baja frecuencia es un proceso aleatorio débilmente ergódico respecto a la esperanza matemática (se cumple la condición suficiente de ergodicidad débil). ▶

6.65. a) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio arbitrario que es estacionario en el sentido ancho. Demostrar la «relación de indeterminación» (22).

b) Un proceso $X(t)$ estacionario en el sentido ancho es tal que su función autocovariante toma únicamente los valores positivos. Mostrar que para semejante proceso la desigualdad (2) se convierte en igualdad.

6.66*. Mostrar que un proceso aleatorio $X(t)$ con la función de covariación

$$K_X(\tau) = \begin{cases} a & \text{para } |\tau| \leqslant T, \\ 0 & \text{para } |\tau| > T \end{cases}$$

no es estacionario en el sentido ancho.

6.67.** ¿Puede la función

$$K_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\tau^2}{\tau_0^2} & \text{para } |\tau| \leqslant \tau_0, \\ 0 & \text{para } |\tau| > \tau_0 \end{cases}$$

ser una función covariante de cierto proceso aleatorio estacionario?

6.68. La densidad espectral de un proceso aleatorio $X(t)$, estacionario en el sentido ancho, tiene la forma siguiente:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_X^2}{\omega_2 - \omega_1} & \text{para } \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \ (\omega_2 > \omega_1 > 0), \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

(*ruido blanco de banda*).

a) Calcular la función autocovariante $K_X(\tau)$.

b) Examinar el caso $\omega_2 \to \omega_1$. ¿A qué proceso aleatorio corresponde este caso límite?

6.69*. Determinar la función covariante, la varianza y la magnitud $\Delta\tau \cdot \Delta\omega$ de un proceso aleatorio estacionario que tiene la densidad espectral dada:

a) $S_X(\omega) = \dfrac{b}{\pi} \dfrac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$, $b > 0$, $\alpha > 0$;

b) $S_X(\omega) = \dfrac{b}{\pi} \dfrac{\alpha}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}$, $b > 0$, $\alpha > 0$.

6.70. Hallar la densidad espectral, la anchura efectiva del espectro y el intervalo medio de correlación de un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ con la función covariante

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha^2 \tau^2}, \quad \alpha > 0.$$

6.71. Hallar la densidad espectral y la anchura efectiva del espectro de un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ con la función covariante $K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$.

6.72. Mostrar que la varianza del proceso $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$, donde $X(t)$ es un proceso aleatorio derivable y estacionario en el sentido ancho, con la densidad espectral $S_X(\omega)$, puede ser escrita en la forma

$$D_Y = \int_0^{+\infty} \omega^2 S_X(\omega)\, d\omega.$$

6.73*. Demostrar que la condición

$$\int_0^{+\infty} \omega^2 S_X(\omega)\, d\omega < c < +\infty$$

es la condición necesaria y suficiente de la derivabilidad de un proceso aleatorio $X(t)$, estacionario en el sentido ancho, que tiene la densidad espectral $S_X(\omega)$. Resolver el problema 6.43, utilizando la condición dada de derivabilidad.

6.74. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ tiene la densidad espectral

$$S_X(\omega) = \frac{b}{\pi} \frac{\alpha}{(\omega^2+\alpha^2)^2}, \quad b>0, \quad \alpha>0.$$

Hallar la varianza del proceso

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

después de cerciorarse previamente que $X(t)$ es derivable.

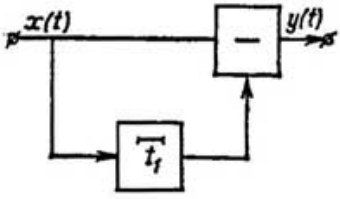


Fig. 130

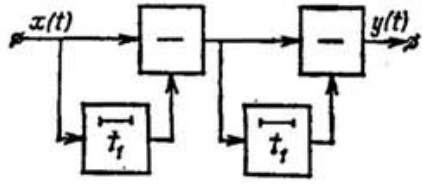


Fig. 131

6.75. Hallar la densidad espectral y el intervalo de correlación de un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ que tiene la función covariante $K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha |\tau|)$, $\alpha > 0$.

6.76. Hallar la densidad espectral y la anchura efectiva del espectro que caracterizan un proceso aleatorio estacionario $X(t)$, así como comprobar la condición de derivabilidad del proceso si:

a) $X(t)$ es una señal fototelegráfica de duración t_0 (véase el problema 6.42);

b) $X(t)$ es un proceso aleatorio estacionario con la función covariante $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} (\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \operatorname{sen} \beta |\tau|)$.

6.77. A la entrada de un dispositivo lineal, compuesto por la línea de retardo en tiempo t_1 y el dispositivo de sustracción (fig. 130), se suministra un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ que tiene la esperanza matemática m_X y la función covariante $K_X(\tau)$. Hallar la esperanza matemática y la función covariante del proceso $Y(t) = X(t + t_1) - X(t)$ en la salida del dispositivo. ¿Se conservará o no el carácter estacionario del proceso en la salida?

6.78. A la salida del dispositivo lineal descrito en el problema precedente se suministra un proceso aleatorio estacionario que es caracterizado por la densidad espectral $S_X(\omega)$. Hallar la densidad espectral $S_Y(\omega)$ del proceso en la salida del dispositivo.

6.79*. A la entrada de un filtro, compuesto por dos dispositivos lineales descritos en el problema 6.77 (fig. 131) se aplica una señal estacionaria $X(t)$ que tiene la densidad espectral $S_X(\omega)$. Hallar la varianza del proceso $Y(t)$ en la salida del filtro si

$$\text{a) } S_X(\omega) = \frac{D_X}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}};$$

b) $X(t)$ es una señal fototelegráfica de duración t_0.

6.80. Un proceso estacionario $X(t)$ tiene la densidad espectral $S_X(\omega)$. Hallar la densidad espectral del proceso $Y(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt}$.

6.81*. Hallar la densidad espectral del proceso aleatorio estacionario $Z(t) = X^2(t)$, donde $X(t)$ es un proceso estacionario normal con la esperanza matemática m y con la función autocovariante que tiene la forma

a) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0,$

b) $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha^2\tau^2}, \quad \alpha > 0.$

6.82*. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ es un ruido blanco normal de baja frecuencia que tiene la esperanza matemática nula, el corte de frecuencia ω_0 y la varianza σ_X^2. Hallar la densidad espectral y la varianza del proceso

$$Z(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt}.$$

5. Transformación de funciones aleatorias estacionarias por medio de los sistemas lineales dinámicos de coeficientes constantes. Se llama *sistema dinámico lineal de coeficientes constantes* el sistema que va descrito por la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$\left(a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0\right) y(t) = \left(b_m\frac{d^m}{dt^m} + \cdots + b_0\right) x(t), \quad (23)$$

donde $x(t)$ es la realización del proceso aleatorio estacionario *de entrada* e $y(t)$ es la realización del proceso *en la salida* del proceso.

Se denomina *función de transferencia de un sistema dinámico lineal* la función de la variable compleja p que se define por la fórmula

$$H(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n p^n+a_{n-1}p^n+\ldots+a_0}. \qquad (24)$$

La función $H(p)$, como se ve de la definición, es la relación de la señal de salida a la de entrada, transformadas según Laplace, que se determinan de la ecuación (23) a condiciones iniciales nulas. Las propiedades de la señal en la salida de un sistema dinámico lineal se determinan por completo por medio de la función de transferencia $H(p)$ y por las propiedades de la señal de entrada. Se dice que un sistema dinámico lineal satisface la *condición de estabilidad* si la función $H(p)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano complejo p.

Si a la entrada de un sistema dinámico lineal de coeficientes constantes se aplica una señal estacionaria de entrada, entonces, pasado un tiempo bastante grande a partir del instante en que comienza la influencia (precisamente, para $t \gg \tau_0$, donde τ_0 es el tiempo característico de relajación de los procesos transitorios), la señal en la salida del sistema será próxima al proceso estacionario en el sentido ancho.

Si $X(t)$ es una señal estacionaria de entrada con las características m_X y $S_X(\omega)$, entonces las características respectivas del proceso de salida $Y(t)$ en el régimen estacionario (o sea, cuando $t \gg \tau_0$) serán

$$m_Y=\frac{b_0}{a_0}m_X,$$

$$S_Y(\omega)=|H(i\omega)|^2 S_X(\omega). \qquad (25)$$

La función $|H(i\omega)|^2$ se llama *característica amplitud-frecuencia del sistema.*

En virtud de la fórmula (25) la varianza del proceso estacionario en la salida del sistema es igual a

$$D_Y=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega)\,d\omega=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(i\omega)|^2 S_X(\omega)\,d\omega. \qquad (26)$$

Para que la varianza sea finita, es necesario y suficiente que en la fórmula (26) la integral impropia converja. Por ejemplo, es suficiente la condición de que el orden del operador de derivación de la señal de entrada en la fórmula (23) sea no superior que el orden de derivación de la señal de salida (o sea, la condición de que $m \leqslant n$).

EJEMPLO 9. A la entrada de un sistema dinámico lineal, que se describe por la ecuación diferencial

$$y''(t)+5y'(t)+4y(t)=x'(t)+4x(t),$$

llega un proceso aleatorio estacionario con la esperanza matemática $m_X=m$ y con la función covariante

$$K_X(\tau)=\sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|} \qquad (\alpha>0).$$

a) Comprobar las condiciones de que la varianza sea finita en la salida y de que el sistema sea estable.

b) Hallar la esperanza matemática, la función covariante y la varianza del proceso estacionario en la salida del sistema.

◀ a) Puesto que $m = 1 < n = 2$, la condición de que la varianza sea finita está cumplida. Transformando según Laplace la ecuación diferencial dada con las condiciones nulas, encontramos la función de transferencia del sistema:

$$H(p) = \frac{p+4}{p^2+5p+4}.$$

Los polos de la función de transferencia $p_1 = -4$ y $p_2 = -1$ tienen las partes reales negativas, por consiguiente, la condición de estabilidad del sistema está cumplida.

b) Teniendo en cuenta que $H(p)$ es una función racional fraccional, encontramos la característica amplitud-frecuencia del sistema con ayuda de la fórmula

$$|H(i\omega)|^2 = H(i\omega)\,H(-i\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}.$$

Tomando en consideración que para el proceso con la función covariante $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}$ la densidad espectral $S_X(\omega) = \sigma_X^2 \frac{2\alpha}{\pi} \times$ $\times \frac{1}{\omega^2+\alpha^2}$ (véase el ejemplo 7), tenemos según la fórmula (25)

$$S_Y(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{\omega^2+1} = \sigma_X^2 \frac{2\sigma}{\pi} \frac{1}{(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+1)}.$$

Encontramos la función covariante de la señal de salida con ayuda de la transformación directa de Fourier:

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega = \sigma_X^2 \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+1)}.$$

Calculamos la última integral con ayuda de la teoría de los residuos, cerrando el contorno de integración en el semiplano superior (cuando $\tau > 0$) o en el plano inferior (cuando $\tau < 0$). Por ejemplo, cuando $\tau > 0$

$$K_Y(\tau) = \sigma_X^2 \frac{\alpha}{\pi} 2\pi i \left\{ \operatorname{res}\left[\frac{e^{ip\tau}}{(p^2+\alpha^2)(p^2+1)}; i\alpha\right] + \right.$$

$$\left. + \operatorname{res}\left[\frac{e^{ip\tau}}{(p^2+\alpha^2)(p^2+1)}; i\right]\right\} = \frac{\sigma_X^2}{1+\alpha} e^{-\alpha\tau}.$$

En virtud de la paridad de la función autocovariante obtenemos finalmente

$$K_Y(\tau) = \frac{\sigma_X^2}{1+\alpha} e^{-\alpha|\tau|}.$$

La varianza de la señal en la salida es igual a

$$D_Y = K_Y(0) = \frac{\sigma_X^2}{1+\alpha}.$$

Ahora bien, la varianza en la salida del sistema es $1 + \alpha$ veces menor que en la entrada. Esto se explica por el hecho de que el sistema dinámico lineal dado es, en realidad, un circuito integrador y la operación de integración del proceso atenúa el ruido. ▶

6.83. A la entrada del sistema dinámico lineal descrito por la ecuación

$$2y'(t) + y(t) = 3x(t)$$

se aplica una señal estacionaria con las características $m_X = 1$, $K_X(\tau) = e^{-2|\tau|}$. Hallar m_Y y D_Y en la salida del sistema.

6.84. A la entrada del circuito integrador RC (fig. 127) que es descrito por la ecuación diferencial

$$y'(t) + \beta y(t) = \beta x(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0$$

se suministra un ruido blanco estacionario de baja frecuencia $X(t)$ que tiene las características $m_X = 0$, $\sigma_X^2 = 2$ y la frecuencia de corte ω_0.

a) Hallar la esperanza matemática y la varianza del proceso en la salida del sistema.

b)* Hallar la varianza D_Y en el caso de que en la entrada está presente el ruido blanco perfecto (o sea, considerando el proceso de entrada como caso límite del ruido blanco de baja frecuencia con la densidad espectral constante $S_X(\omega) = c^2$ para todos los ω).

6.85*. La tensión existente en la entrada del circuito integrador RC descrito en el problema 6.84 no es más que un proceso aleatorio estacionario con la densidad espectral $S_X(\omega) = \sigma_X^2 e^{-\alpha^2\omega^2}$. Hallar la relación entre la varianza de la tensión de salida $Y(t)$ y la de la señal de entrada. ¿A qué equivale esta relación en el caso particular en que $\beta = \alpha = 1$?

6.86. Un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ con la densidad espectral $S_X(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$ $(a > 0, \alpha > 0)$ se suministra a la entrada de un circuito diferenciador. Considerando el circuito diferenciador como ejemplo elemental de un sistema lineal estacionario, hallar la varianza del proceso estacionario $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ y la relación de las varianzas σ_Y^2/σ_X^2.

6.87. A la entrada del sistema dinámico lineal que es descrito por la ecuación

$$y'(t) + 5y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

se suministra un proceso aleatorio estacionario que tiene la función covariante

$$K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-|\tau|}$$

y la esperanza matemática $m_X = 5$. Hallar la esperanza matemática, la densidad espectral y la varianza del proceso aleatorio estacionario en la salida del sistema.

6.88. A la entrada de un *filtro de banda perfecto* con la característica amplitud-frecuencia

$$|H(i\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_1 \leqslant |\omega| \leqslant \omega_2, \\ 0, & \text{si } |\omega| < \omega_1 \text{ o } |\omega| > \omega_2, \end{cases}$$

se suministra un proceso aleatorio estacionario $X(t)$ cuya función covariante $K_X(\tau) = e^{-|\tau|}$. Hallar la varianza del proceso en la salida del filtro.

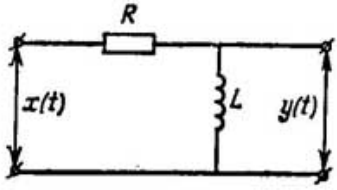


Fig. 132

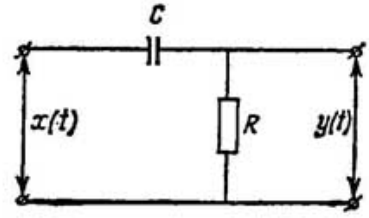


Fig. 133

6.89. A la entrada del sistema dinámico lineal que es descrito por la ecuación $y(t) = \beta x(t) + \frac{dX(t)}{dt}$ se aplica una señal estacionaria con la función covariante $K_X(\tau) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$. Hallar la densidad espectral, la anchura efectiva del espectro y la varianza que caracterizan la señal estacionaria en la salida del sistema.

6.90. El funcionamiento del circuito eléctrico (fig. 132) se describe por la ecuación diferencial

$$y'(t) + \frac{R}{L} y(t) = x'(t).$$

A la entrada del circuito se suministra un proceso aleatorio estacionario con la densidad espectral

$$S_X(\omega) = \frac{1}{(\lambda^2 + \omega^2)^2}.$$

Hallar la función covariante y la varianza del proceso aleatorio en la salida al funcionar el circuito en el régimen estacionario.

6.91. A la entrada de un radar llega la señal cuya componente aleatoria no es más que un proceso estacionario con la función covariante

$$K_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau \quad (\alpha > 0).$$

El error del radar es el resultado de transformación de la señal del sistema dinámico lineal que es descrito por la ecuación diferencial

$$y'(t) + ay(t) = bx'(t) + cx(t) \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Hallar la varianza de la componente aleatoria $Y(t)$ en la salida del radar.

6.92. La señal aleatoria $Y(t)$ que aparece al pasar una señal aleatoria estacionaria $X(t)$ a través del filtro RC (fig. 133) se define por la ecuación diferencial

$$y'(t) + \beta y(t) = x'(t), \quad \beta = \frac{1}{RC} > 0.$$

Hallar la varianza del proceso $Y(t)$ si a la entrada del filtro RC se aplica la señal fotoeléctrica definida en el problema 6.42.

6.93. A la entrada del filtro RC descrito en el problema 6.92 se suministra el proceso aleatorio estacionario que tiene la función covariante $K_X(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}(1 + \lambda|\tau|)$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq \beta$. Hallar la varianza del proceso $Y(t)$ en la salida del filtro.

6.94. A la entrada de un circuito resonante que se describe por la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2\beta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = x(t) \quad (\omega_0 > \beta)$$

se suministra el ruido blanco perfecto ($S_X(\omega) = c^2$ para $-\infty < \omega < +\infty$). Determinar la varianza de la señal aleatoria estacionaria $Y(t)$ en la salida del sistema.

6.95. A la entrada del sistema dinámico lineal que es descrito por la ecuación diferencial

$$y''(t) + 8y'(t) + 7y(t) = x(t)$$

llega un proceso aleatorio estacionario que tiene la esperanza matemática $m_X = 0$ y la función covariante $K_X(\tau) = 4e^{-\alpha^2\tau^2}$. Hallar la esperanza matemática y la densidad espectral del proceso aleatorio estacionario en la salida de este sistema.

6.96. Un sistema dinámico lineal se decsribe por le ecuación diferencial

$$y''' (t) + 6y'' (t) + 11y' (t) + 6y (t) = 7x''' (t) + 5x (t).$$

A la entrada de este sistema llega un proceso aleatorio estacionario $X (t)$ con la esperanza matemática m_X y la función covariante

$$K_X (\tau) = 2e^{-|\tau|} (1 + |\tau|).$$

Hallar la esperanza matemática, la densidad espectral y la varianza del proceso de salida en el régimen estacionario.

RESPUESTAS

1.1. $\Omega = \{(k, m) \mid 1 \leqslant k, m \leqslant 6\}$, $A = \{(3, 3), (6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$, $B = \{(k, m) \mid 1 \leqslant k, m \leqslant 5\}$, $C = \{(k, m) \mid 4 \leqslant k, m \leqslant 6\}$, $D = \{(k, k) \mid 1 \leqslant k \leqslant 6\}$. **1.2.** $\Omega = \{(eee), (cee), (ece), (eec), (ecc), (cec), (cce), (ccc)\}$, $A = \{(ecc), (cec), (cce)\}$, $B = \{(eee)\}$, $C = \{(eee), (cee), (ece), (cce)\}$, $D = \{(eee), (cee), (eec)\}$. **1.3.** $\Omega = \{n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{3\}$, $B = \{n \mid n = 3, 4, \ldots\} = \Omega \setminus \{1, 2\}$. **1.4.** $\Omega = \{(x, y) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Los conjuntos correspondientes a los sucesos indicados están representados en las figs. 134—136. Los pares de sucesos compatibles: A y B, B y C, A y C. **1.5.** El conjunto de casos elementales Ω y los conjuntos correspondientes a los sucesos indicados están representados en las figs. 137—141. Un par de sucesos incompatibles: A y C. **1.6.** $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x, y \leqslant 60\}$. Los conjuntos correspondientes a los sucesos indicados están representados en las figs. 142—152. **1.7.** $\Omega = \{\varphi \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$, $A = \{\varphi \mid \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$, donde $\varphi_{1,2} = \arcsen \left(\frac{rl \mp h \sqrt{l^2 + h^2 - r^2}}{h^2 + l^2} \right)$. **1.8.** $\Omega = \{(v, \varphi) \mid v \geqslant 0, 2n^\circ \leqslant \varphi < 2(n + 1)^\circ, n = 0, 1, \ldots, 179\}$. El suceso B es observable, A y C no son observables. **1.9.** $E_1 = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, $E_2 = A + B + C$, $E_3 = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC$, $E_4 = E_3 + ABC$, $E_5 = \overline{ABC}$, $E_6 = E_4$, $E_7 = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = \overline{ABC}$.

1.10. a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\} = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3, A_1A_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2A_3, A_1A_2A_3\}$; b) $A = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$, $B = \omega_2 + \ldots + \omega_8 = \overline{\omega}_1 + \overline{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3} = A_1 + A_2 + A_3$, $C = \omega_1 + \ldots + \omega_7 = \overline{\omega}_8 = \overline{A_1A_2A_3} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$, $D = \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3 + A_1A_2A_3$, $E = \omega_1 + \omega_4 = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 = \overline{A}_1\overline{A}_2$, **1.13.** b) $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$, $\overline{A_1A_2 \ldots A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$. **1.14.** ◀ Transformemos el segundo miembro. Utilizando la propiedad de distributividad de la multiplicación respecto a la adición, demostrada en el ejemplo 6, obtenemos

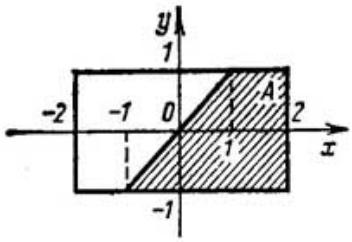


Fig. 134

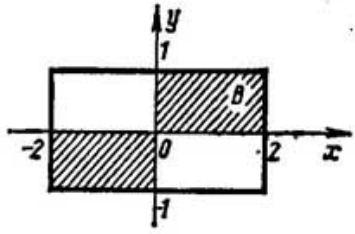


Fig. 135

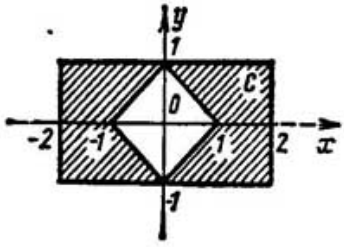


Fig. 136

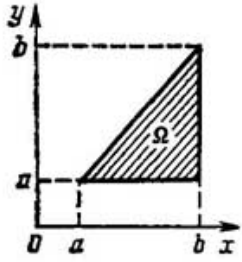


Fig. 137

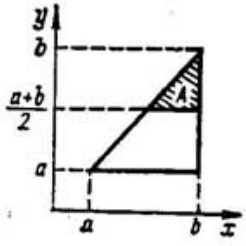


Fig. 138

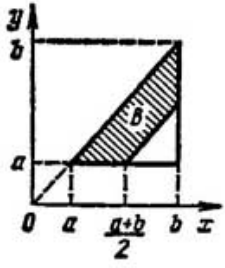


Fig. 139

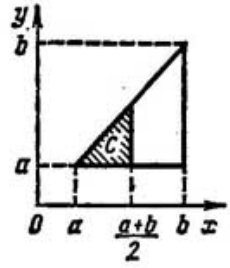


Fig. 140

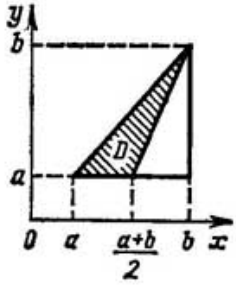


Fig. 141

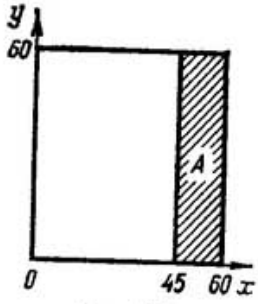


Fig. 142

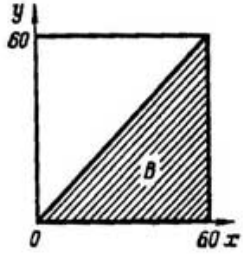


Fig. 143

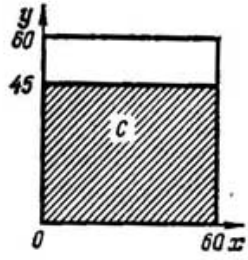


Fig. 144

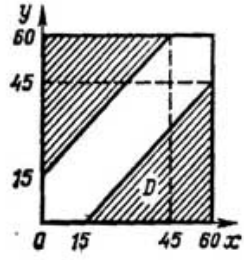


Fig. 145

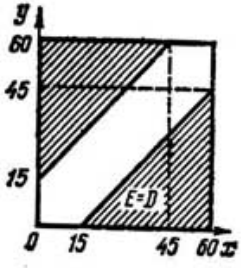


Fig. 146

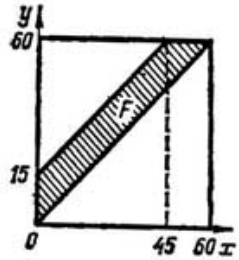


Fig. 147

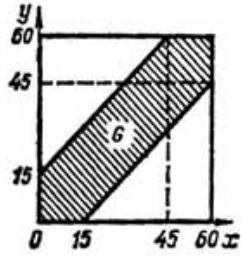


Fig. 148

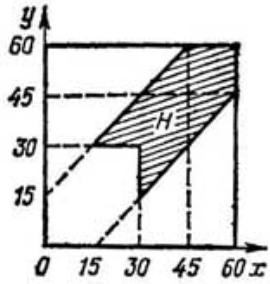


Fig. 149

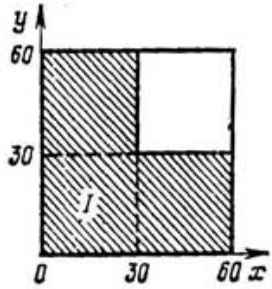


Fig. 150

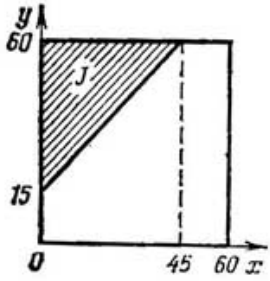


Fig. 151

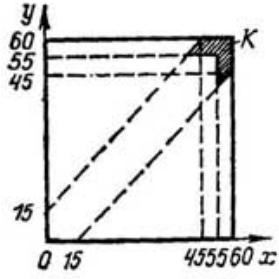


Fig. 152

$(A + C)\ (B + C) = A\ (B + C) + C\ (B + C) = AB + AC + CB + C = AB + (A + B)\ C + C\Omega = AB + (A + B + \Omega) \times C = AB + C$. ▶ 1.16. • Hacer uso de la identidad dada en el problema 1.15. 1.20. • Tener en cuenta que $B = A + B\overline{A}$. Luego pasar al suceso contrario B y usar las reglas de de Morgan. 1.24. • Transformemos el segundo miembro, utilizando la identidad dada en el problema 1.15 y las reglas de de Morgan. 1.25. • Hacer uso de la identidad dada en el problema 1.15 y de las reglas de de Morgan. 1.29. $X = \overline{B}$. 1.30. ◀ Necesidad. Sea $A - B = \varnothing$, entonces $A\overline{B} = \varnothing$ y $A\overline{B} = \overline{\Omega}$. Por consiguiente, $\overline{A} + B = \Omega$ y $\overline{A}A + BA = A\Omega = A$. La última relación muestra

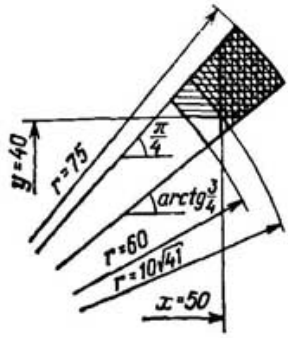


Fig. 153

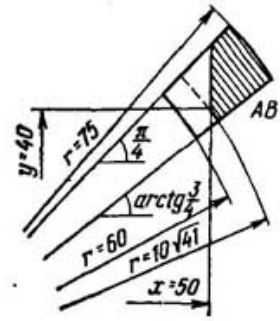


Fig. 154

que $AB = A$. De aquí, en virtud de la afirmación demostrada en el problema 1.18, resulta que $A \subset B$. Suficiencia. Sea $A \subset B$. Entonces $AB = A$ (véase el problema 1.18), o sea, $AB + \overline{A} = A + \overline{A} = \Omega$. Por lo tanto, $\overline{A + A\overline{B}} = \varnothing$ o bien $A \cdot \overline{AB} = \varnothing$, de donde $A\ (\overline{A} + \overline{B}) = A\overline{B} = A - B = \varnothing$. ▶ 1.31. • Designemos con ω_k = {entre $2n$ personas presentes en la sala exactamente k personas son conocidas de la persona que entra}. $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}\}$. Mostrar que $A + B = \Omega$. Para demostrar la segunda afirmación hay que tener en cuenta que $A - B = \overline{B}$. 1.32. a) $\Omega = \{\omega_k,\ k = 1, 2, \ldots, 8\}$, donde $\omega_1 = \overline{D}_1\overline{D}_2\overline{K}$, $\omega_2 = D_1\overline{D}_2\overline{K}$, $\omega_3 = \overline{D}_1D_2\overline{K}$, $\omega_4 = \overline{D}_1\overline{D}_2K$, $\omega_5 = \overline{D}_1D_2K$, $\omega_6 = D_1\overline{D}_2K$, $\omega_7 = D_1D_2\overline{K}$, $\omega_8 = D_1D_2K$. b) $A = D_1D_2 + K = \omega_4 + \omega_5 + \ldots + \omega_8$. c) ◀ $\omega_4 + \omega_5 + \ldots + \omega_8 = D_1D_2 \times (K + \overline{K}) + K\,(D_1\overline{D}_2 + \overline{D}_1\overline{D}_2 + \overline{D}_1\overline{D}_2 + \overline{D}_1D_2) = D_1D_2 + K\,(\overline{D}_1 + \overline{D}_2 + D_1D_2) = D_1D_2 + K\,(\overline{D_1\overline{D}_2 + D_1D_2}) = D_1D_2 + K$.▶ 1.33. a) El conjunto de casos elementales Ω y los sucesos indicados se muestran en la fig. 153. El conjunto Ω es la parte del sector contorneada por la línea gruesa; con el rayado vertical se señala el conjunto A y con el horizontal, el conjunto C; el rayado en las circunferencias indica el conjunto B. b) Los conjuntos correspondientes a los sucesos indicados están representados en las figs. 154—157. 1.34. El conjunto Ω y los sucesos indicados están representados en las figs. 158—163. 1.35. a) $\Omega = \{\omega_1, \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\omega_3, \ldots, \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_7\omega_8\}$. b) $A = \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\omega_3 +$

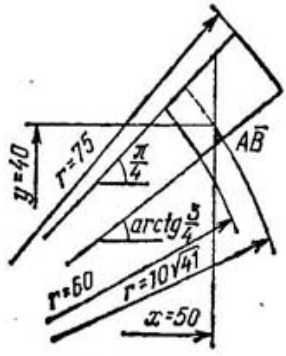


Fig. 155

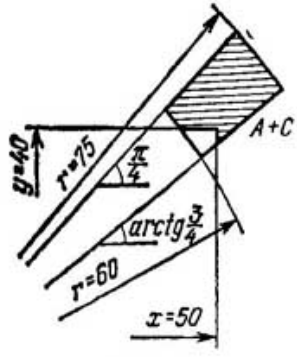


Fig. 156

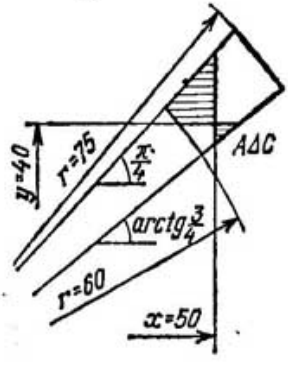


Fig. 157

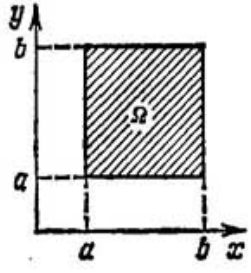


Fig. 158

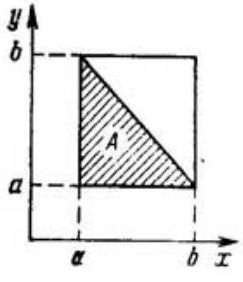


Fig. 159

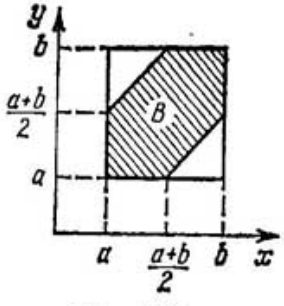


Fig. 160

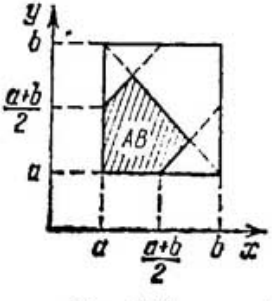


Fig. 161

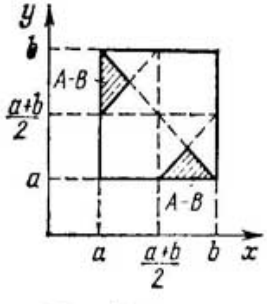


Fig. 162

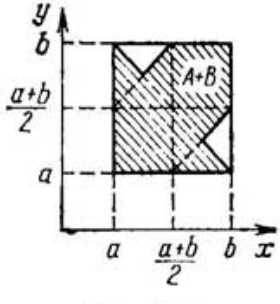


Fig. 163

$+ \overline{\omega}_1\overline{\omega}_2\omega_3\omega_4 + \ldots + \overline{\omega}_1 \ldots \overline{\omega}_7\omega_8 = \overline{\omega_1\omega_2}$. 1.36. $\overline{A} = T_1 + T_2 + T_3 + C_1C_2C_3C_4 + \overline{C}_1C_2C_3C_4 + C_1\overline{C}_2C_3C_4 + C_1C_2\overline{C}_3C_4 + C_1C_2C_3\overline{C}_4 + R_1R_2R_3R_4R_5$. 1.37. $\Omega = \{A_1, \overline{A}_1B_1, \overline{A}_1\overline{B}_1A_2, \ldots\}$, $A = A_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1A_2 + \ldots$, $B = \overline{A}_1B_1 + \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2 + \ldots$ 1.40. 16. 1.44. • Ultilizar la identidad $\varnothing + \Omega = \Omega$. 1.46. • Hacer uso del resultado del problema precedente. 1.47. ◀ Utilizando la identidad $A + B = A + \overline{A}B$ (véase el problema 1.19c)), encontramos $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}B)$, puesto que los sucesos A y $\overline{A}B$ son incompatibles. De la identidad $B = AB + \overline{A}B$ se deduce que $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\overline{A}B)$ en virtud de la incompatibilidad de los sucesos AB y $\overline{A}B$. De aquí $\mathrm{P}(\overline{A}B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$ y $\mathrm{P}(A + B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)$.▶ 1.51. • Utilizar los resultados de los problemas 1.19 b) y 1.47. 1.52. • Utilizar los resultados de los problemas 1.51 y 1.47. 1.55. • Poner $B + C = D$ y aplicar dos veces la fórmula de adición para dos sucesos (véase el problema 1.47). 1.56. ◀ De los datos del problema resulta que $AB \subset C$, de donde $\mathrm{P}(C) \geqslant \mathrm{P}(AB)$ (véase el ejemplo 7). De aquí obtenemos $\mathrm{P}(C) \geqslant \mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(\overline{\overline{A} + \overline{B}}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) - \mathrm{P}(\overline{B}) + \mathrm{P}(\overline{A}\overline{B}) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1 + \mathrm{P}(\overline{A}\overline{B}) \geqslant \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - 1$. ▶ 1.57. $\mathrm{P}(A) = 1/6$, $\mathrm{P}(B) = 1/3$, $\mathrm{P}(C) = 1/2$, $\mathrm{P}(D) = 2/3$, $\mathrm{P}(E) = 2/3$. 1.58. $\mathrm{P}(A) = 0{,}01$, $\mathrm{P}(B) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(C) = 5/144$. 1.59. 1/720. 1.60. $\mathrm{P}(A) = 1/6$, $\mathrm{P}(B) = 5/12$, $\mathrm{P}(C) = 1/2$, $\mathrm{P}(D) = 35/36$, $\mathrm{P}(E) = 5/6$, $\mathrm{P}(F) = 11/36$, $\mathrm{P}(G) = 1/9$. 1.61. $1/m^{n-1}$. 1.62. $\mathrm{P}(A) = 1 - 1/6^4$, $\mathrm{P}(B) = 5!/6^4$. 1.63. 7/9. 1.64. $\mathrm{P}(A) = 17/24$, $\mathrm{P}(B) = 1/120$, $\mathrm{P}(C) = 7/40$. 1.65. $\mathrm{P}(A) = 1/143$. $\mathrm{P}(B) = 2/91$, $\mathrm{P}(C) = 12/143$, $\mathrm{P}(D) = 30/143$.

1.66. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{m_1}^m}{C_{m_1+m_2}^m}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{C_{m_1}^k C_{m_2}^{m-k}}{C_{m_1+m_2}^m}$, $\mathrm{P}(C) = 1 - \dfrac{C_{m_2}^m}{C_{m_1+m_2}^m}$ $\mathrm{P}(D) = \dfrac{1}{C_{m_1+m_2}^m} \sum\limits_{n=k}^{m} C_{m_1}^n C_{m_2}^{m-n}$. 1.67. $q_n = \dfrac{n}{2n-1}$.

1.68. $\mathrm{P}(A) = 33/95$, $\mathrm{P}(B) = 62/95$, $\mathrm{P}(C) = 28/323$. 1.69. $\mathrm{P}(A) \approx 0{,}264 \times 10^{-2}$, $\mathrm{P}(B) \approx 0{,}0106$; $\mathrm{P}(C) \approx 0{,}2813$, $\mathrm{P}(D) \approx 0{,}355 \cdot 10^{-3}$. 1.70. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{C_{m_1}^{n_1} C_{m_2}^{n_2} \ldots C_{m_s}^{n_s}}{C_{m_1+m_2+\ldots+m_s}^n}$, $\mathrm{P}(B) = \dfrac{C_{m_3+m_4+\ldots+m_s}^n}{C_{m_1+m_2+\ldots+m_s}^n}$. 1.71. $\mathrm{P}(A) = 7/127$, $\mathrm{P}(B) = 32//127$, $\mathrm{P}(C) = 63/127$, $\mathrm{P}(D) = 35/127$, $\mathrm{P}(E) = 4/127$.

1.72. a) 1/4: b) 1/6. 1.73. b) $\dfrac{(n-m)(n-m-1)}{n(n-1)}$; c) $C_m^k \mid C_n^k$.

1.74. $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{9!}$, $\mathrm{P}(B) = 1/9$, $\mathrm{P}(C) = 1/12$, $\mathrm{P}(D) = 1/126$, $\mathrm{P}(E) = 1/945$.

1.75. $\mathrm{P}(A) = 1/60$. $\mathrm{P}(B) = 2/5$, $\mathrm{P}(C) = 1/20$, $\mathrm{P}(D) = 2/5$, $\mathrm{P}(E) = 9/10$.

1.76. $\mathrm{P}(A) = 1/45$, $\mathrm{P}(B) = 7/45$, $\mathrm{P}(C) = 1/15$. 1.77. $\mathrm{P}(A) = 1/16$, $\mathrm{P}(B) =$

$=1/560$, $P(C)=1/8$, $P(D)=1-\frac{1}{16!}$. 1.78. a) 1/30; b) 1/6; c) 1/10. 1.79. $p_n=\frac{2n}{C_{n+2}^2}$, $p_6=3/7$, $p_9=18/55$. 1.80. $P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\approx$ $\approx 0{,}1615$, $P(B)\approx 0{,}8385$, $P(C)\approx 0{,}155$. 1.81. $P(A)=0{,}001$, $P(B)\approx$ $\approx 0{,}0605$, $P(C)=0{,}1$, $P(D)\approx 2{,}1\cdot 10^{-5}$. 1.82. $P(A)=\left(\frac{4}{7}\right)^6\approx 0{,}0348$, $P(B)=\left(\frac{6}{7}\right)^6\approx 0{,}3966$, $P(C)=\frac{90}{7^6}\approx 0{,}000765$; $P(D)=\frac{1}{7^5}\approx 5{,}94\cdot$ $\cdot 10^{-5}$. 1.83. $P(A)=1/64$, $P(B)=3/16$, $P(C)=3/32$, $P(D)=29/32$. 1.84. a) ◀ n_1 elementos e_1 se pueden disponer en n lugares por $C_n^{n_1}$ métodos, en este caso n_2 elementos e_2 se pueden disponer en $n-n_1$ lugares quedados por $C_{n-n_1}^{n_2}$ métodos, etc. Haciendo coincidir todas estas posibilidades, obtenemos

$$N(\Omega)=C_n^{n_1}C_{n-n_1}^{n_2}\ldots C_{n-n_1}^{n_s}-\ldots-n_{s-1}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_s!}\cdot \blacktriangleright$$

b) $$p=\frac{n_1!\,n_2!\ldots n_s!}{n!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!\,n_3!\ldots n_s!}=\frac{1}{C_n^{n_1}}\cdot$$

1.85. $P(A)\approx 0{,}0013$, $P(B)\approx 0{,}0154$, $P(C)\approx 0{,}3215$. 1.86. $P(A)=$ $=\frac{13^3}{17\cdot 25\cdot 49}\approx 0{,}105$, $P(B)=\frac{4}{51\cdot 50\cdot 49\cdot 47\cdot 46\cdot 43\cdot 41}\approx 8{,}4\cdot 10^{-13}$, $P(C)=\frac{44}{4165}\approx 0{,}01056$, $P(D)=46/833\approx 0{,}0552$. 1.87. $\frac{2!\,3!\,2!}{10!}\approx$ $\approx 7\cdot 10^{-6}$. 1.88. $E=\{aa, ab, ac, ba, bb, bc\}$, $p=1/3$. 1.89. Combinaciones: $\Omega=\{ab, ac, bc\}$, $N(\Omega)=3=C_3^2$ (elección sin devolución y sin ordenación); variaciones: $\Omega=\{ab, ba, ac, ca, bc, cb\}$, $N(\Omega)=6=A_3^2$ (elección sin devolución y con ordenación); combinaciónes con repeticiones: $\Omega=\{aa, bb, cc, ab, ac, bc\}$, $N(\Omega)=6=C_4^2$ (elección con devolución y sin ordenación); variaciones con repeticiones: $\Omega=\{aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb\}$, $N(\Omega)=9=3^2$ (elección con devolución y con ordenación). 1.90. a) 1/2; b) $\frac{n-1}{2n}$. 1.91 a) 1/3; b) $\frac{(n-1)(n-2)}{3n^2}$. 1.92. C_n^k/n^k. 1.93. $\frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{m^{n-1}}$. 1.94. a) $1/n$; b) $\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}$. 1.95. a) 3/55; b) 12/55. 1.96. $P(A)=1-$ $-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, si $k\leqslant n-m$; 1, si $k>n-m$; $P(B)=\frac{C_m^1C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$, si $k\leqslant$

$\leqslant n-m+1$; 0 si $k>n-m+1$; $\mathbf{P}(C)=\dfrac{C_m^{k_1}C_{n-m}^{k-k_1}}{C_n^k}$, si $k\leqslant n-m+$

$+k_1$; 0, si $k>n-m+k_1$. **1.97.** $p_n=1-\dfrac{A_{365}^n}{365^n}$, $p_{24}\approx 0{,}538$, $p_{50}\approx 0{,}9704$. **1.99.** $\mathbf{P}(A)=10^{-8}$, $\mathbf{P}(B)=10^{-7}$; $\mathbf{P}(C)=28A_8^5\cdot 10^{-7}\approx 0{,}17$ $\mathbf{P}(D)=378A_8^4\cdot 10^{-6}\approx 0{,}64$, $\mathbf{P}(E)=56A_8^5\cdot 10^{-7}\approx 0{,}08$, $\mathbf{P}(F)=10^{-8}C_{10}^3\times$ $\times 3^8\approx 0{,}008$. **1.100.** $\mathbf{P}(A)=25/546$, $\mathbf{P}(B)=72/273$. **1.101.** $\mathbf{P}(A)=$ $=\dfrac{2^n}{(2n)!}$, $\mathbf{P}(B)=\dfrac{1}{1\cdot 3,\ldots(2n-1)}$. **1.102.** $\mathbf{P}(A)=\dfrac{4C_{10}^3\cdot(8!)^2}{(10!)^2}=$ $=\dfrac{1}{45}$, $\mathbf{P}(B)=\dfrac{100\cdot(8!)^2}{(10!)^2\cdot 2^8}=\dfrac{4}{81}$. **1.103.** a) $N(\Omega)=10^6$, $p=$ $0{,}72\cdot 10^{-3}$; b) $N(\Omega)=A_{10}^4$, $p=1/210$. **1.104.** $\mathbf{P}(A)=\dfrac{1}{m^{n-1}}$, $\mathbf{P}(B)=$ $=\left(1-\dfrac{1}{m}\right)^n$, $\mathbf{P}(C)=\dfrac{A_n^{m_1}(m-m_1)^{n-m_1}}{m^n}$, $\mathbf{P}(D)=\dfrac{(m-1)^{n-n_1}}{m^{n-1}}$.

1.105. $\mathbf{P}(E)=9/32$, $\mathbf{P}(F)=27/128$. **1.106.** $\mathbf{P}(E)=4/27$, $\mathbf{P}(F)=2/9$. **1.107.** $(3/4)^n$. ● Tener en cuenta que de todos los subconjuntos del conjunto finito E forma parte también el conjunto vacío, por eso el número total de todos los pares posibles es $N(\Omega)=4^n$. Sea S_k el número de todos los pares de subconjuntos en los cuales el primer subconjunto tiene exactamente k elementos. El número de tales pares $S_k=C_n^k\cdot 2^{n-k}$. Además, es necesario tener en cuenta que se intersecan solamente los conjuntos que tienen elementos comunes (por consiguiente, los conjuntos vacíos no se intersecan), por eso si el suceso $A=\{$dos subconjuntos del conjunto E, tomados arbitrariamente, se intersecan$\}$, entonces $N(A)=\sum\limits_{k=0}^{n}S_k$.

1.108. $\mathbf{P}(D)=\dfrac{(2!)^{10}}{20!}\cdot C_{10}^5\cdot\dfrac{10!}{2^5}\cdot C_5^3\cdot\dfrac{6!}{2^3}\cdot C_3^2\cdot\dfrac{4!}{2^2}=\dfrac{3}{46\,189}\approx 6{,}5\cdot 10^{-5}$.

1.109. $\mathbf{P}(A)=\begin{cases}a^2, & 0<a\leqslant 1,\\ 1, & 1<a;\end{cases}$ $\mathbf{P}(B)=a(2-a)$;

$$\mathbf{P}(C)=\begin{cases}\dfrac{\pi a^2}{4}, & 0<a\leqslant 1,\\ \sqrt{a^2-1}+a^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{1}{a}\right), & 1<a\leqslant\sqrt{2},\\ 1, & \sqrt{2}<a;\end{cases}$$

$$\mathbf{P}(D)=\begin{cases}a(1-\ln a), & 0<a\leqslant 1,\\ 1, & 1<a.\end{cases}$$

1.110. 5/6. 1.111. $P(A)=a$, $P(B)=\sqrt{1-a^2}$. ● El área de la zona esférica entre dos planos paralelos es igual a $2\pi rh$, donde r es el radio de la esfera; h, la distancia entre los planos. 1.112. $\alpha/2\pi$. 1.113. $P(A)=2/3$, $P(B)=1/12$. ● Mostrar que $A=\{(a, b)\,|\,|a|\leqslant 1, b\leqslant 1, \quad a^2\geqslant b\}$ y $B=\{(a, b)\,|\,-1\leqslant a\leqslant 0, \quad 0\leqslant b\leqslant 1, \quad a^2\geqslant b\}$. 1.114. $\frac{a}{l}\left(2-\frac{a}{l}\right)$. 1.115. $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$. 1.116. a) $\approx 0{,}0413$; b) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}\approx$ $\approx 0{,}183$; c) $\frac{1}{12}$. 1.117. $P(B)=1/2$, $P(D)=9/16$, $P(F)=7/32$, $P(G)=$ $=7/16$, $P(H)=1/4$, $P(I)=3/4$, $P(J)=9/32$, $P(K)=1/24$. 1.118. a) $1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t_1}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^2$; b) $1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t_1-t_3}{T}\right)^2-$ $-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t_2}{T}\right)^2$. 1.119. $\frac{h}{\sqrt{h^2+4r^2}}$. La posición del cilindro se caracteriza por completo por la posición del eje del cilindro a diferentes giros alrededor del centro de gravedad fijo. Es suficiente controlar los valores de cualquier otro punto del eje del cilindro, además del centro de gravedad, por ejemplo, el del centro del círculo que está en la base del cilindro. En este caso el conjunto de todos los valores posibles del punto dado es la semiesfera de radio $h/2$ y el conjunto de los valores a los que el cilindro caiga de costado es la zona esférica. 1.120. 1/4. ● Sean x, y, $l-x-y$ las longitudes de los segmentos. Mostrar que la región correspondiente al suceso buscado se separa sobre el plano por las condiciones $x<l/2$, $y<l/2$, $x+y<l/2$. 1.121. $\sqrt{5}d/(\sqrt{5}-\sqrt{2})$. ● Usar el resultado del ejemplo 15. 1.122. 2/3. 1.123. 139/1152. 1.124. 1/4. ● Designemos el suceso $D=\{\triangle ABC$ es acutángulo$\}$. Sean A, B y C los puntos fijos. Convengamos en medir las longitudes de los arcos entre los puntos en un sentido tal que, al mover por la circunferencia, el punto B siga el punto A y el punto C siga el punto B. Mostrar que si con tal método de medición x es la longitud del arco AB e y es la longitud del arco BC, entonces $\Omega=$ $=\{(x, y)\mid 0\leqslant x<2\pi, 0\leqslant y<2\pi, x+y<2\pi\}$, $D=\{(x, y)\mid 0<$ $<x<\pi, \quad 0<y<\pi, \quad 2\pi-(x+y)<\pi\}$. 1.125. $\frac{2}{\pi}\arccos\frac{r_1}{r_2}$. 1.126. $\frac{2}{9}\ln 2+\frac{1}{12}\approx 0{,}237$. 1.127. $2l/(\pi a)$. ● La posición de la aguja es caracterizada por dos coordenadas (r, φ), donde r es la distancia entre el centro de la aguja y la recta próxima; φ, el ángulo entre la dirección de la aguja y la recta. 1.128. a) 1/3; b) 1/2; c) 1/4. ● Para describir el conjunto Ω y el suceso A conviene elegir en cada una de las variantes las coordenadas correspondientes que caractericen la posición de la cuerda, por ejemplo tales: a) $\Omega=\{\varphi\mid 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $A=\left\{\varphi\mid 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{2\pi}{3}\right\}$; b) $\Omega=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$, $A=\left\{y\mid -\frac{1}{2}\leqslant\right.$ $\left.\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$; c) $\Omega=\{(r, \varphi)\mid 0\leqslant r\leqslant 1, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi\}$, $A=$ $=\{(r, \varphi)\mid 0<r\leqslant 1/2, \quad 0<\varphi<2\pi\}$. 1.132. $P(A/B)=1/3$,

$P(B/A) = 1$. Son dependientes si $B \neq \Omega$. **1.134.** No se deduce. **1.135.** • Mostrar primeramente que son independientes los sucesos A y B. **1.136.** a) 0,216; b) 1/6. **1.137.** a) A y B, F y B son independientes, A y F son dependientes; b) $P(BF) = 2/13$, $P(AF) = 1/13$, $P(ABF) = 1/26$. **1.138.** 8/9. **1.139.** a) E y F son independientes; b) no. **1.140.** $\frac{1}{3}$.

1.141. $P(B/A) = 0,5$, $P(A/B) = 60/91$. **1.142.** Son dependientes. $P(D/C) = 1/4$. **1.143.** 1/3. • Tener en cuenta que el conjunto de casos elementales Ω se puede representar en forma $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, donde $\Omega_i = \{M, D\}$, $i = 1, 2$. **1.144.** 0,44. **1.145.** $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(C) = 1/2$, $P(D) = 25/36$. • Introducir los sucesos: $N_i = \{$en el i-ésimo dado sale un número par de puntos$\}$, $S_i = \{$en el i-ésimo dado sale un número par de puntos$\}$, $T_i = \{$en el i-ésimo dado salen 6 puntos$\}$, $i = 1, 2$ y expresar por medio de estos sucesos los que nos interesan con ayuda de las operaciones algebraicas. **1.146.** $P(A) = 13/15$, $P(B) = 2/15$, $P(C) = 2/45$, $P(D) = 28/45$. **1.147.** $P(A) \approx 0,991$, $P(B) \approx 0,59$, $P(C) \approx 0,875$. **1.148.** $P(A) = P(T_{11}) P(T_{00})$, $P(B) = P(T_{11}) P(T_{01}) + P(T_{10}) P(T_{00})$, donde $P(T_{11}) = p_1p_2 + (1 - p_1)(1 - q_2)$, $P(T_{00}) = q_1q_2 + (1 - q_1)(1 - p_2)$, $P(T_{10}) = p_1(1 - p_2) + (1 - p_1) q_2$, $P(T_{01}) = q_1(1 - q_2) + (1 - q_1) p_2$. **1.149.** $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,35$, $P(C) = 0,85$, $P(D) = 0,2$. **1.150.** $P(B + F) = 17/26$, $P(F - A) = 3/13$, $P(F - AB) = 7/26$. **1.151.** $P(A) = 0,24$, $P(\overline{AB}) = 0,48$, $P(\overline{A} + \overline{B}) = 0,88$, $P(A \triangle B) = 0,4$. **1.152.** $n = \left[\frac{\ln(1 - p_2)}{\ln(1 - p_1)} + \frac{1}{2}\right]$, donde $[x]$ es la parte entera del número x; $n(0,3; 0,9) = 7$, $n(0,3; 0,95) = 9$. **1.153.** $n \geqslant 25$. **1.154.** $P(A) = 1 - (1 - pp_1)^{n-1}$, $P(B) = 1 - (1 - pp_1)^{n-k}$. **1.155.** $1 - (1 - p_1^2)(1 - p_2)$. **1.156.** $P(B/A_2) = 1 - (p_3^2 + 2p_2p_3)$, $P(B/A_3) = 1 - 3p_2p_3^2$, $P(B/A_4) = 1$. **1.157.** $\frac{2109}{2530} \approx 0,8336$. **1.158.** 0,104. **1.159.** El blanco menudo; 1,75 veces. **1.160.** a) $p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$; b) $p_1 = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right) \approx \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx \frac{1}{3}$; c) $p_1 = 4/7$ – el juego se hace más justo. **1.161.** a) $p_1 = 36/67$, $p_2 = 31/67$; $p_1 : p_2 \approx 1,16$; b) $p_1 = \frac{36^m}{36^m + 31^m}$, $p_2 = \frac{31^m}{36^m + 31^m}$, $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{36}{31}\right)^m$. **1.162.** Juan tiene, aproximadamente, 1,06 veces mayor probabilidad de adivinar tres números que Pedro. • Introduzcamos los sucesos: $A = \{$Juan obtiene el premio mínimo$\}$, $B = \{$Pedro obtiene el premio mínimo$\}$, $A_i = \{$en la i-ésima ficha de Juan han sido adivinados tres números$\}$, $i = 1, 2$; $B_i = \{$en la i-ésima ficha de Pedro han sido adivinados tres números$\}$, $i = 1, 2$. Tener en cuenta que $A = A_1 + A_2$, con la particularidad de que los sucesos A_1 y A_2 son independientes. Por eso

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) P(A_2).$$

Respectivamente, $B = B_1 + B_2$, pero los sucesos B_1 y B_2 son dependientes. Utilicemos la partición siguiente:

$$B_1 = \sum_{i=0}^{3} B_1^{(i)},$$

donde el suceso $B_1^{(i)} = \{$en la terna premiada de los números de la primera ficha hay i coincidencias con la segunda ficha$\}$. Por las fórmulas de adición y de multiplicación de las probabilidades tenemos:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B_1 + B_2) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) - \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(B_1^{(i)})\,\mathbf{P}(B_2/B_1^{(i)}).$$

Las probabilidades incondicionales de los sucesos A_1, A_2, B_1, B_2, $B_1^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, 3$ se calculan sencillamente con ayuda de la fórmula de la probabilidad clásica. Las probabilidades condicionales $\mathbf{P}(B_2/B_1^{(i)})$ se calcularán con mayor sencillez valiéndose del método del experimento auxiliar. **1.163.** $1 - q_1q_2q_3$. **1.164.** $1 - (1 - p_1p_2p_3) \times (1 - p_4p_5p_6)$. **1.165.** $p_1p_4(1 - q_2q_3)$. **1.166.** $(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4)$. **1.167.** $p_5(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) + q_5(p_1p_3 + p_2p_4 - p_1p_2p_3p_4)$. **1.168.** $\mathbf{P}(A) = 19/54$, $\mathbf{P}(B) = 1/27$, $\mathbf{P}(C) = 35/108$, $\mathbf{P}(D) = 25/108$, $\mathbf{P}(E) = 13/27$. • Al utilizar la fórmula de multiplicación de las probabilidades es necesario tener en cuenta que el experimento se reduce a una sucesión de pruebas dependientes cada una de las cuales consiste en extraer bolas de una misma urna. Por eso para calcular las condiciones necesarias de las probabilidades conviene aplicar el método del experimento auxiliar (véase pág. 44). **1.169.** $(p(m + n) - p(m))/(1 - p(m))$. **1.170.** $\mathbf{P}(A) = (p_1p_{11} + p_2p_{22})^3$, $\mathbf{P}(B) = 1 - (1 - p_2)^3$, $\mathbf{P}(C) = 3p_2^2(p_1(1 - p_{11}) + p_2(1 - p_{22}))$. **1.171.** $p_1(1 - p_{11})/(p_1(1 - p_{11}) + p_2(1 - p_{22}))$. **1.172.** $\mathbf{P}(A) = q_1(1 - p_1q_2^3 - q_1q_2^4) + p_1(p_2 + q_1p_2q_2)$, $\mathbf{P}(B) = p_1^2q_2$, $\mathbf{P}(C) = p_1(1 + q_1q_2^2)$, $\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}(F)$, $\mathbf{P}(E) = p_1q_1q_2^2(1 + q_2) + q_1(1 - q_2^3)(1 + q_1q_2^2)$, $\mathbf{P}(F) = q_1^2q_2^4$, donde $q_i = 1 - p_i$, $i = 1, 2$. **1.173.** Pueden existir 0, 1, 2, 3, 4 amebas con las probabilidades 11/32, 4/32, 9/32, 4/32 y 4/32, respectivamente. **1.174.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{} =$ $= 1 - e^{-1} + R_{n+1} \approx 0{,}649$, donde R_{n+1} es el término residual del desarrollo de la función e^x en serie de Taylor para $x = -1$. • Sea el suceso $A_k = \{$el número k escrito en la ficha coincide con el número de orden de la extracción$\}$. Entonces $\mathbf{P}(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $\mathbf{P}(A_kA_m) = \frac{(n-2)!}{n!}$ $(k \neq m)$, . . . , $\mathbf{P}(A_1 \ldots A_n) = \frac{1}{n!}$. Para calcular la probabilidad buscada $p = \mathbf{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$ es necesario hacer uso de la fórmula de adición para n sumandos. **1.175.** 0,84. **1.176.** $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}^2(T_{11}) + \mathbf{P}^2(T_{10}) + \mathbf{P}^2(T_{01}) + \mathbf{P}^2(T_{00}))$, donde $\mathbf{P}(T_{ik})$ están determinadas en la respuesta al problema 1.148. **1.177.** $1 - npq_1q^{n-1} - q^n$, donde $q_1 = 1 - p_1$, $q = 1 - p$. **1.179.** 5/36. **1.180.** 0,895. **1.181.** 0,445. **1.182.** 0,452. **1.183.** 0,763. **1.184.** 349/560.

1.185. $\frac{\alpha n_1 + \beta n_2}{100\,(n_1 + n_2)}$. 1.186. $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}p^2(3 - 2p)$, $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}p^3$, $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9}p^3$. • Examinar las hipótesis siguientes: $H_1 = \{$se hacía fuego contra un blanco, exactamente$\}$, $H_2 = \{$se hacía fuego contra dos blancos, exactamente$\}$, $H_3 = \{$se hacía fuego contra todos los tres blancos$\}$. 1.187. $\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) - \frac{1}{9}(p_1(p_2 + p_3)^2 + p_2(p_1 + p_3)^2 + p_3(p_1 + p_2)^2)$, $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}p_1p_2p_3$, $\mathrm{P}(C) = \frac{1}{9}p_1p_2p_3$. • Utilizar la indicación para el problema 1.186. 1.188. Conviene enviar a la primera región m_0 grupos de exploración geológica, donde m_0 es el número entero más próximo al número $\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1 - p_1}{p_1}$. • Sea el suceso $A = \{$al menos uno de los grupos de exploración geológica enviados ha descubierto el petróleo en el territorio dado$\}$. Mostrar que $\mathrm{P}(A) = 1 - p_1(1 - p)^m - (1 - p_1)(1 - p)^{n-m}$, donde m es el número de grupos de exploración geológica enviados a la primera región. Luego examinar la función $f(x) = 1 - p_1(1 - p)^x - (1 - p_1)(1 - p)^{n-x}$ y hallar su máximo para $x \in [0, n]$. 1.189. $p_1 \approx 0{,}457$, $p_2 \approx 0{,}32$, $p_3 \approx 0{,}223$. ▶ Este problema es la generalización del problema 1.161 para un número más grande de participantes. La aplicación de la fórmula de la probabilidad total facilita su resolución. Sea el suceso $A_i = \{$el i-ésimo jugador ha ganado$\}$, $i = 1, 2, 3$. Designemos $\mathrm{P}(A_i) = p_i$. Es evidente que

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \qquad (*)$$

Examinemos dos hipótesis: $H_1 = \{$en la primera prueba el primer jugador extrae una bola blanca$\}$ y $H_2 = \overline{H}_1$. Entonces $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}7$, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(A_2/H_2) = 0$ y $\mathrm{P}(A_2/H_1) = \mathrm{P}(A_1) = p_1$, ya que si el primer jugador ha sacado una bola blanca, el segundo llega a ser el que comienza el juego. Por consiguiente, $\mathrm{P}(A_2) = p_2 = \mathrm{P}(A_2/H_1) \times \mathrm{P}(H_1) + \mathrm{P}(A_2/H_2)\,\mathrm{P}(H_2) = 0{,}7p_1$. Introduciendo ahora las hipótesis $H_1' = \{$en la primera prueba tanto el primer jugador como el segundo han extraído una bola blanca$\}$ y $H_2' = \overline{H}_1'$, de un modo análogo obtenemos $\mathrm{P}(A_3) = p_3 = 0{,}49p_1$. Sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación (*), encontramos $p_1 \approx 0{,}457$, $p_2 \approx 0{,}32$, $p_3 \approx 0{,}223$. ▶ 1.190. a) 2/5 para $k = 0, 1, 2, 3$. • Examinar las hipótesis siguientes: $H_k^{(1)} = \{$el k-ésimo (según el orden) estudiante sacará una de las papeletas que conoce nuestro estudiante$\}$, $H_k^{(2)} = \overline{H}_k^{(1)}$ y obtener la relación recurrente $\mathrm{P}(H_{k+1}^{(1)}) = \mathrm{P}(H_k^{(1)})\,\mathrm{P}(H_{k+1}^{(1)}/H_k^{(1)}) - \mathrm{P}(H_{k+1}^{(1)}/H_k^{(2)}) + \mathrm{P}(H_{k+1}^{(1)}/H_k^{(2)})$. Para demostrar la igualdad $\mathrm{P}(H_{k+1}^{(1)}) = \mathrm{P}(H_k^{(1)}) = 2/5$ utilizar el método de inducción matemática. 1.191. 2/3. 1.192. $\mathrm{P}(A/B) = 2/9$. 1.193. $\mathrm{P}(S_k) = \frac{2(n - k)}{(m + 1)(2n - m)}$, $\mathrm{P}(S) = \frac{m(2n - m + 1)}{(m + 1)(2n - m)}$. 1.194. $\frac{n_1p_1}{n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3}$. 1.195. a) $p_1 = 3/5$; b) $p_6 = 1/3$; c) $p_5 = 6/11$.

1.196. $\approx 0{,}903$. **1.197.** $\approx 0{,}0826$. **1.198.** $\mathbf{P}(A_1) \approx 0{,}285$, $\mathbf{P}(A_2) \approx 0{,}0714$. **1.199.** $\approx 0{,}6084$. ● Sea $A = \{$el blanco está destruido$\}$. Las hipótesis se formulan así: $H_0 = \{$los impactos hechos en el blanco no han causado su destrucción$\}$, $\mathbf{P}(A/H_0) = 0$, $H_1 = \{$la causa de la destrucción del blanco consiste en los impactos hechos en la primera parte$\}$, $H_2 = \{$la causa de la destrucción del blanco consiste en los impactos hechos en la segunda parte$\}$, $H_3 = \{$la causa de la destrucción del blanco consiste en los impactos hechos tanto en la primera parte como en la segunda$\}$. Al construir la partición respectiva en el álgebra de sucesos es necesario partir primeramente el conjunto Ω según el número de impactos hechos en el blanco y luego cada uno de los sucesos obtenidos descomponer en la suma de sucesos incompatibles que describan la distribución del número de impactos en las partes I y II. Luego separar los sumandos obtenidos según las hipótesis. Por ejemplo,

$$H_1 = B_1 C_1^{(1)} + B_2 C_1^{(1)} C_2^{(1)} + B_3 (C_1^{(3)} + C_1^{(2)} C_2^{(1)}),$$

donde $B_i = \{$al efectuarse tres disparos hay i impactos en el blanco$\}$, $C_k^{(j)} = \{$hay j impactos en la k-ésima parte$\}$. Luego hay que tener en cuenta que B_i es un suceso compuesto que puede ser escrito en el álgebra de sucesos por medio de los sucesos elementales $A_k = \{$hay un impacto al efectuarse el k-ésimo disparo$\}$ (véase, por ejemplo, el problema 1.10 en cuyas designaciones $B_1 = A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$), por eso según las fórmulas de adición y multiplicación para los sucesos independientes $\mathbf{P}(B_1) = 3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3^2$. **1.200.** $\approx 0{,}467$. **1.201.** $\mathbf{P}(H_2/A) =$

$$= \frac{\alpha(1-p)}{\alpha(1-p) + (100-\alpha)(1-q)}, \quad \mathbf{P}(H_1/\overline{A}) = \frac{(100-\alpha)q}{\alpha p + (100-\alpha)q},$$

$p > q$ es la condición de efectividad del esquema de control. **1.202.**

$$\frac{p_1 p_3 (1-p_2)}{(1-p_1)\, p_2 p_3 + (1-p_2)\, p_1 p_3 + (1-p_3)\, p_1 p_2}.$$

1.203. $\mathbf{P}(S_1) \approx 0{,}8677$, $\mathbf{P}(S_2) \approx 0{,}1052$, $\mathbf{P}(S_3) \approx 0{,}0271$. **1.204.** $\frac{1}{4} p (1-p)^2$.

1.205. a) 3/4. ● Examinar los sucesos $A = \{$de una urna indicada al azar se han extraído dos bolas blancas$\}$, $B = \{$entre las bolas quedadas en la misma urna se ha escogido una bola blanca$\}$, así como las hipótesis $H_k = \{$en la urna en cuestión hay k bolas blancas$\}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Con ayuda de la fórmula de Bayes efectuar una nueva estimación de las hipótesis, o sea, hallar las probabilidades $\mathbf{P}(H_k/A)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Por fin, encontrar la probabilidad del suceso $\mathbf{P}(B/A)$ que nos interesa haciendo uso de la fórmula de la probabilidad total: $\mathbf{P}(B/A) =$

$$= \sum_{k=0}^{4} \mathbf{P}(H_k/A)\, \mathbf{P}(B/AH_k).$$

b) 3/4. ● Introducir adicionalmente el suceso $C = \{$en la urna llamada al azar hay al menos una bola blanca$\}$ y primeramente hallar las probabilidades $\mathbf{P}(H_k/C)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y luego mostrar que $\mathbf{P}(H_k/AC) = \mathbf{P}(H_k/A)$. OBSERVACIÓN. El hecho de que, una vez producido el suceso A, una comunicación adicional (o sea, la aparición del suceso C) no añade una nueva información llega a ser evidente si tenemos en cuenta que $A \subset C$ y, por lo tanto, $\mathbf{P}(B/A) = \mathbf{P}(B/AC)$ (¡mostrarl).

2.1.

x_i	0	1
$\mathbf{P}\{X=x_i\}$	$1-p$	p

$m_X=p$, $D_X=pq$, $\mu_3=pq(q-p)$, $p=\frac{1}{2}$,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ q, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

2.3. a) $\mu_n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \alpha_1^i \alpha_{n-i}$; b) $\alpha_n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i m_X^i \mu_{n-i}$.

2.4. $m_S=d_S=7$, $p=1/6$.

2.5.

x_i	-1	0	1
$\mathbf{P}\{X=x_i\}$	p_1	p_2	p_3

$p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, $p_2=\frac{61}{216}$, $p_3=\frac{91}{216}$,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -1,\\ \frac{8}{27}, & -1<x\leqslant 0,\\ \frac{125}{216}, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$m_X=\frac{1}{8}$, $d_X=1$.

2.6. • Utilizar la reiación, válida para una V.A.T.D., $\mathbf{P}\{X=x_k\}=F_X(x_{k+1})-F_X(x_k)$ y transformar la suma que expresa la esperanza matemática. **2.7.** • Mostrar que la esperanza matemática puede ser escrita en la forma

$$m_X=-\lim_{a\to+\infty}\int_0^a x\frac{x}{dx}[1-F_X(x)]\,dx.$$

Para calcular la integral, hacer uso de la desigualdad $a\int_a^{+\infty} f(x)\cdot dx\leqslant$

$\leqslant\int_a^{+\infty} xf_X(x)\,dx$ que se deduce del hecho de que la esperanza matemática es finita.

2.10. $m_X=r$, $D_X=r(r+1)$, $d_X=0$.

2.11.

x_i	0	1	2	3
$\mathbf{P}\{X=x_i\}$	1/6	1/2	3/10	1/30

$m_X=6/5$, $d_X=1$, $D_X=14/25$.

2.12. $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|<a;\\ 0, & |x|\geqslant a;\end{cases}$

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -a,\\ \dfrac{(a+x)^2}{2a^2} & -a<x\leqslant 0,\\ 1-\dfrac{(a-x)^2}{2a^2}, & 0<x\leqslant a,\\ 1, & x>a,\end{cases}$$

$m_X=d_X=h_X=0$, $D_X=a^2/6$, $e_X=-3/5$.

2.13. El gráfico de la función $f_R(x)$ está representado en la fig. 164,

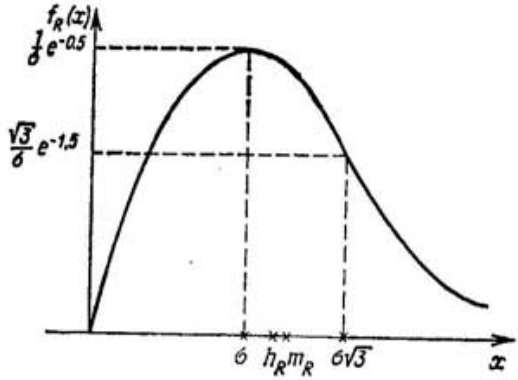


Fig. 164

$m_R=\sigma\sqrt{\pi/2}\approx 1{,}253\sigma$, $D_R=\sigma^2(2-\pi/2)\approx 0{,}429\sigma^2$, $d_R=\sigma$, $h_R=$

$=\sigma\sqrt{2\ln 2}\approx 1{,}77\sigma$, $a_R=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}(\pi-3)}{\left(2-\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\approx 0{,}631$, $d_R<h_R<m_R$.

2.14. $m_V=2\sqrt{2/(\beta\pi)}$, $d_V=\sqrt{2/\beta}$, $D_V=\dfrac{1}{\beta}\left(3-\dfrac{8}{\pi}\right)$.

2.15. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant -a,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a}, & |x|<a,\quad m_X=0,\\ 1, & x>a;\end{cases}$

$D_X=\dfrac{a^2}{2}$, d_X no existe, $h_X=0$, $\hat{x}_{0,75}=a\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\approx 0{,}3827a$.

2.16. $m_X=m$, $\sigma_X=\sigma$, $e_X=3$; el gráfico de $f_X(x)$ está representado en la fig. 165.

2.17. $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x;\end{cases}$ $m_X=h_X=\dfrac{a+b}{2}$, $D_X=$

$=\dfrac{1}{12}(b-a)^2$, $e_X=-\dfrac{6}{5}$. 2.18. a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}577$; b) $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx$

$\approx 0{,}423$. 2.19. $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$ ● Escribir en el álgebra de sucesos la diferencial $dF_X(x)=\mathbf{P}\{x\leqslant X<x+dx\}$ si $x>0$ y resolver la ecuación diferencial obtenida para la función de distribución

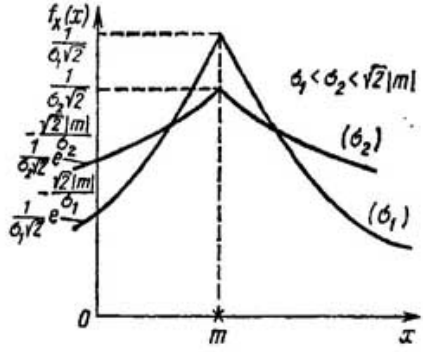


Fig. 165

buscada con la condición inicial $F_X(0)=0$. 2.20. $m_X=1/\lambda$, $D_X=$ $=1/\lambda^2$, $\mathbf{P}\{X\geqslant m_X\}=e^{-1}\approx 0{,}368$, $m_X=t_{0{,}632}$. 2.21. $\mu_{k+1}=(-1)^{k+1}\times$ $\times\, m_X^{k+1}+\dfrac{k+1}{\lambda}\mu_k$ $(k=0,\ 1,\ \ldots)$, $a_X=2$, $e_X=6$. 2.22. $\mathbf{P}(A)=$ $=\exp\times(-1/2)-\exp(-3/2)\approx 0{,}3834$, $\mathbf{P}(B)=\exp(-2)\approx 0{,}135$. 2.23. $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}1836$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}9057$, $m_X=x_{0{,}3164}$. 2.24. $a>0$, $b=1/2$, $c=$ $=1/\pi$, $f_X(x)=\dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$, m_X y los momentos de un orden más alto no existen, $d_X=h_X=0$, $t_{0{,}75}=a$. 2.25. $m_X=a/b$, $D_X=a/b^2$, $a_X=2/\sqrt{a}$, $e_X=6/a$, ● Para calcular los momentos centrales es necesario deducir primeramente la fórmula recurrente para los momentos iniciales de la distribución gamma: $\alpha_{k+1}=\dfrac{a+k}{b}\alpha_k$ $(k=$ $=0,\ 1,\ \ldots)$ y utilizar el resultado del problema 2.3. 2.26. $m_X=$ $=4$, $D_X=8$, $h_X\approx 3{,}3567$, $m_X=x_{0{,}406}$. ● Reducir la ecuación para determinar la mediana a la forma $z=\ln 2+\ln(1+z)$ $(h_X=2z)$

que permite la solución iterativa, comenzando, por ejemplo, con el valor $z_0=1$. **2.27.** $m_X=a+b\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $d_X=a+b\sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}$.

● Utilizar la integral $\int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-(\alpha x)^m}\,dx=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)}{m\alpha^{n+1}}$. **2.28.** $m_X=$ $=\frac{a}{a+b}$, $D_X=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$. ● Utilizar la integral $\int\limits_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ que expresa la condición de normalización para todos valores admisibles de los parámetros $a>0$, $b>0$ y la propiedad de la función gamma: $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$. **2.29.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}7627$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}3955$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}2637$, $\mathbf{P}(D)\approx 0{,}1035$. **2.30.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}234$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}721$, $\mathbf{P}(C)=\left(\frac{15}{36}\right)^7\approx 2{,}18\cdot 10^{-3}$, $\mathbf{P}(D)\approx 0{,}821$. **2.32.** Es más probable ganar un match de 12 partidas. **2.33.** $\approx 0{,}6513$. **2.34.** $d_X=1$ y $d_X=2$; $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}1342$, $\mathbf{P}(B)\approx$ $\approx 0{,}7383$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}0031$. **2.35.** $\approx 0{,}203$. **2.36.** $1-(pt+q)^n$. **2.37.** a) $n\geqslant 59$; b) $n\geqslant 125$. ● Mostrar que para determinar el valor mínimo de n se obtiene la ecuación

$$n=59+\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{0{,}95}\right)}\ln(1+0{,}5125n+0{,}00138n^2)$$

cuya solución se puede buscar por el método de iteraciones, suponiendo $n_0=59$. **2.38.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}055$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}183$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}00022$. **2.39.** $m_X=1{,}875$, $d_X=2$, $D_X\approx 2{,}4844$. **2.40.** $\mathbf{P}(A)=C_{m-1}^{k-1}p^kq^{m-k}$, $\mathbf{P}(B)=p^k\sum\limits_{i=0}^{m-1}C_{k+i-1}^{i}q^i$, $\mathbf{P}(C)=(n-k+1)\,p^kq^{n-k}$. **2.41.** $m_X=$ $=1/p$, $d_X=1$, $D_X=q/p^2$. **2.42.** $m_X=1/q$, $d_X=1$, $D_X=p/q^2$. ● Utilizar el resultado del problema precedente. **2.43.** $\mathbf{P}\{X=m\}=$ $=C_{m-1}^{k-1}p^kq^{m-k}$, $m\geqslant k$, $m_X=k/p$. **2.44.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}9136$, $\mathbf{P}(B)\approx$ $\approx 0{,}4344$. **2.45.** a) $m_X=2$, $D_X=1{,}1$; b) 0,9328. **2.46.** Lo más probable es extraer una bola blanca, esta probabilidad es igual a $\approx 0{,}489$. **2.47.** ● Al deducir las fórmulas para $\mathbf{P}_{m,m}$ y $\mathbf{P}_{m,m-1}$ utilizar la fórmula (8). Al demostrar la fórmula para $\mathbf{P}_{m,m-k}$ utilizar la fórmula de la probabilidad total. **2.48.** $\mathbf{P}_{4,2}=p_1p_2q_3q_4+p_1p_3q_2q_4+$ $+p_1p_4q_2q_3+p_2p_3q_1q_4+p_2p_4q_1q_3+p_3p_4q_1q_2$. **2.49.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}318$. $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}388$. ● Utilizar la fórmula recurrente del problema 2.47. **2.50.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}135$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}189$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}216$. **2.51.** $\mathbf{P}(A)\approx$ $\approx 0{,}012$, $\mathbf{P}(B)\approx 10^{-6}$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}246$, $\mathbf{P}(D)\approx 0{,}250$. **2.52.** $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}055$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}055$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}177$. **2.53.** $\mathbf{P}(A)\approx$ $\approx 0{,}394$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}013$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}998$. **2.54.** $\mathbf{P}(A)=F_X(m)=$

$= e^{-\lambda t_1} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda t_1)^k}{k!}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1 + e^{-2\lambda t_2}}{2}$. **2.55.** $\mathbf{P}(A) \approx 0{,}018$, $\mathbf{P}(B) \approx$ $\approx 0{,}092$, $\mathbf{P}(C) \approx 0{,}865$, $\mathbf{P}(D) \approx 0{,}554$. ● Para calcular las probabilidades de los sucesos B y D utilizar la fórmula recurrente $p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k$. **2.56.** $p_1 \approx 0{,}095$, $p_2 \approx 0{,}0047$, $p_3 \approx 0{,}0002$. **2.57.** Dos erratas con la probabilidad $\approx 0{,}251$. **2.58.** La ley de Poisson con el parámetro $\lambda = np$, $m_X = D_X = np$. **2.59.** $k = 1$, $n \geqslant 300$; $k = 2$, $n \geqslant 475$; $k = 3$, $n \geqslant 630$. ● Cuando $k = 2, 3$, la ecuación para la determinación de λ se debe reducir a una forma que permita el método de iteraciones. **2.60.** $p_1 \approx 0{,}683$, $p_2 \approx 0{,}954$, $p_3 \approx 0{,}997$. **2.61.** a) $(-5; 25)$; b) $(0; 20)$; c) $(6{,}65; 13{,}35)$. **2.62.** $m = 15{,}39$, $\sigma = 3{,}26$. **2.63.** a) $\approx 95\%$, b) $n \geqslant 59$. **2.64.** a) $2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\right)$; b) $\alpha \leqslant 0{,}2146$. **2.65.** a) $p_1 = 0{,}1587$, $p_2 = 0{,}68$;

b) $\sqrt{\frac{(b-a)\left(\frac{a+b}{2} - m\right)}{\ln \frac{b-m}{a-m}}}$. ◀ $Q(\sigma) = \mathbf{P}\{a \leqslant X < b\} =$

$\Phi \times \left(\frac{b-m)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$. La condición necesaria del extremo es: $Q'(\sigma) = 0$. Puesto que $Q'(\sigma) = -\frac{1}{\sigma^2}\left[(b-m)\Phi'(x)\Big|_{x=\frac{b-m}{\sigma}} - (a-m)\Phi'(x)\Big|_{x=\frac{a-m}{\sigma}}\right]$, el valor buscado de σ es la raíz de la ecuación

$$(b-m)\, e^{-\frac{(b-m)^2}{2\sigma^2}} - (a-m)\, e^{-\frac{(a-m)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

al resolver la cual obtenemos σ. ▶ c) ● Hacer uso de la fórmula de integración por partes. d) $\sigma\sqrt{2/\pi}$. **2.66.** $a_X = 0$, $e_X = 0$, $\alpha_6 = 76$. ● Utilizar el resultado del problema 2.3 b) y la relación recurrente (12).

3.1. a)

x_i \ y_j	0	1	2	$\mathbf{P}\{X = x_i\}$
1	p^2	pq	0	p
2	0	pq	q^2	q
$\mathbf{P}\{Y = y_j\}$	p^2	$2pq$	q^2	1

b) $P\{X = Y\} = q$; c) $1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$; d) son dependientes; e) 2.

3.2. a)

x_i \ y_j	0	1	$P\{X = x_i\}$
0	0	0,5	0,5
1	0,25	0,25	0,5
$P\{Y = y_j\}$	0,25	0,75	1

b)

x_i \ y_j	$y \leqslant 0$	$0 < y \leqslant 1$	$1 < y$
$x \leqslant 0$	0	0	0
$0 \leqslant x \leqslant 1$	0	0	0,5
$1 < x$	0	0,25	1

c) $-0{,}125$.

3.3. a)

x_i \ y_j	1	2	3
1	1/9	1/9	1/9
2	0	1/6	1/6
3	0	0	1/3

b) son dependientes;

x_i	1	2	3
$\mathbf{P}\{X=x_i/Y=2\}$	2/5	3/5	0

d) $m_X = 2$, $m_Y = 2{,}5$, $D_X = 2/3$, $D_Y = 17/36$, $K_{XY} = 1/3$, $\rho_{XY} \approx \approx 0{,}594$. **3.4.** a) $F_{X,Y}(3, 3) - F_{X,Y}(3, 1) + F_{X,Y}(2, 1) - - F_{X,Y}(2, 2) + F_{X,Y}(1, 2) - F_{X,Y}(1, 3)$; b) $F_{X,Y}(+\infty, +\infty) - - F_{X,Y}(+\infty, 3) + F_{X,Y}(3, 3) - F_{X,Y}(3, +\infty)$. **3.5.** 0,669. ● Introducir las variables aleatorias indicadoras: X, el indicador del desecho debido al defecto α al ensayar una pieza; Y, el indicador del desecho debido al defecto β al ensayar una pieza y describir la ley de distribución del vector aleatorio (X, Y). **3.6.** $\mathbf{P}\{Y = 1\} \approx 0{,}0118$, $\rho_{XY} \approx 0{,}066$. ● Véase la indicación al problema 3.5. **3.7.** a) $c = 2$; b) son dependientes;

c) 1/3; d) $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0 \text{ ó } y > 1, \\ 1+2y-3y^2, & 0 < y \leqslant 1; \end{cases}$ e) $(m_X, m_Y) = (3/4, 5/12)$;

e) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x^3, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x. \end{cases}$ **3.8.** a) $c = 3/28$; b) 3/14; c) $(m_X, m_Y) =$

$= (8/7, 10/7)$). **3.9.** a) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1/3, & x \in (-1, 2),\ y \in (1, 2). \\ 0 & \text{en los demás casos;} \end{cases}$

b) $F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \text{ ó } y \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}(x+1)(y-1), & -1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ \frac{1}{3}(x+1), & -1 \leqslant x \leqslant 2,\ 2 < y, \\ y-1, & 2 < x,\ \ 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x,\ \ 2 < y; \end{cases}$

c) $p_1 = 1/6$, $p_2 = \pi/12$; d) $(m_X, m_Y) = (1/2, 3/2)$, $D_X = 3/4$, $D_Y = 1/12$;

e) son independientes: $f_X(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in (-1, 2), \\ 0 & x \notin (-1, 2), \end{cases}$ $f_Y(y) =$

$= \begin{cases} 1, & y \in (1, 2), \\ 0, & y \notin (1, 2), \end{cases}$ $f_X(x) f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$.

3.10. a) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & |x| + |y| \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0, & |x| + |y| > \frac{a\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

b-d) $f_X(x) = \begin{cases} \frac{a\sqrt{2} - 2|x|}{a^2}, & |x| < \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ 0, & |x| \geqslant \frac{a\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}, & |y|<\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\\ 0, & |y|\geqslant\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\end{cases}$$ las componentes son

dependientes; c) $\rho_{XY}=0$, las componentes son incorrelacionadas; d) $\mathbf{M}[Y/x]=0$. **3.11.** $e^{-2}\approx 0{,}135$. **3.12.** $m_X=np_1$, $m_Y=np_2$, $D_X=np_1(1-p_1)$, $D_Y=np_2(1-p_2)$, $\rho_{XY}=-\sqrt{\dfrac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}$.

Hacer uso de la descomposición $(p_1+p_2+p_3)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{m=0}^{n-k}\times\dfrac{n!}{k!\,m!\,(n-k-m)}p_1^kp_2^mp_3^{n-k-m}$ y expresar los momentos necesarios de distribución por las derivadas del primer miembro respecto a p_i. **3.13.** Cada componente está distribuida uniformemente en el segmento $[0, 1]$, las componentes dependientes. **3.14.** $\mathbf{P}(A)=\Phi\left(\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\approx 0{,}1915$, $\mathbf{P}(B)=1/2$. **3.15.** a) $3{,}408\sigma$; b) $\mathbf{P}\{(X, Y)\in D_1\}=0{,}5$, $\mathbf{P}\{(X, Y)\in D_2\}=0{,}25$. **3.16.** $\approx 0{,}279$. **3.17.** $\mathbf{P}(A)=0{,}5$, $\mathbf{P}(B)=0{,}75$, $\mathbf{P}(C)=0{,}5$, $\mathbf{P}(D)\approx 0{,}683$, $\mathbf{P}(E)\approx 0{,}822$. **3.18.** $\mathbf{P}(G_1)\approx 0{,}282$. $\mathbf{P}(G_2)\approx 0{,}505$, $\mathbf{P}(G_3)\approx 0{,}0328$. **3.19.** $\mathbf{P}(G_1)\approx 0{,}0582$, $\mathbf{P}(G_2)\approx 0{,}0887$, $\mathbf{P}(G_3)\approx 0{,}0557$, $\mathbf{P}(G_4)\approx 0{,}0252$. ● Utilizar la simetría de la dispersión circular. Por ejemplo, $\mathbf{P}(G_1)=\mathbf{P}(G^{(1)})=\dfrac{1}{2}\mathbf{P}(G)$, donde $G^{(1)}$ es el triángulo con los vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ y G es el cuadrado con los vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Análogamente, $\mathbf{P}(G_2)=\mathbf{P}(G^{(2)})$, donde $G^{(2)}$ es el triángulo con los vértices $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y luego al igual que en el problema precedente. **3.20.** $f_{X,Y}(x, y)=\dfrac{1}{32\pi}\exp\left\{-\dfrac{1}{2^9}(25x^2-24xy+16y^2+172x-144y+388)\right\}$, $p=0{,}865$. **3.21.** $(x+1)^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=4{,}6052$. **3.22.** $f_X(x)=\sqrt{\dfrac{2}{5\pi}}e^{-\frac{2x^2}{5}}$, $m_X=m_Y=0$, $D_X=5/4$, $D_Y=1/4$, $\rho_{XY}=-1/\sqrt{5}$. **3.23.** $n\geqslant 24$.

4.1. $m_L=\dfrac{4r}{\pi}$, $D_L=2r^2\left(1-\dfrac{8}{\pi^2}\right)$. **4.2.** $m_L=\pi l$, $D_L=$

$= \frac{\pi^2 l^2}{3}$; $m_S = \frac{\pi l^2}{3}$, $D_S = \frac{4\pi^2 l^4}{45}$. 4.3. $m_R = \frac{l}{3}$, $m_S = \frac{l^2}{6}$.

4.4. $m_R = \frac{2}{3}a$, $D_R = \frac{a^2}{18}$. 4.5. $M[R^2] = \frac{1}{3}(a^2+b^2)$, $D[R^2] = \frac{4}{45} \times (a^4+b^4)$. 4.6. $\frac{3a^2}{2\pi}$. 4.7. $D[Z] = 108$. 4.8. $M[X+Y] = 1{,}5$, $M[X-Y] = 0{,}5$, $D[X \pm Y] = 5/12$, $M[X^2+Y^2] = 5/3$, $M[XY] = 0{,}5$, $D[XY] = 7/36$. 4.9. ● Utilizar la propiedad de la varianza de la suma de magnitudes aleatorias. 4.10. ● Sea $Z = \text{máx}(X^2, Y^2)$. Cerciorarse que Z puede ser representada en la forma $Z = \frac{X^2+Y^2}{2} + \left|\frac{Y^2-X^2}{2}\right|$. El primer miembro de la desigualdad a demostrar se deduce de las propiedades 2) y 4) de la esperanza matemática. Para demostrar el segundo miembro de la desigualdad es necesario aplicar las propiedades 4) y 6) de la esperanza matemática. 4.11. $m_Z = 1$, $D_Z = 32/3$. Al calcular D_Z utilícese el resultado del problema 4.50. 4.12. $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \\ 6 & 18 & 60 \end{pmatrix}$. ● Para calcular los momentos es necesario utilizar la fórmula (12) del § 2 y el resultado del problema 2.3 b). 4.13. $m_Y = 0$, $D_Y = \frac{n}{2(n+1)}$. ● Hacer uso de las fórmulas

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{2\pi k}{n}}\right),$$

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(n+1-\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i\frac{4\pi k}{n}}\right)\right).$$

4.14. $m_Y = \frac{pq}{1+q^2}$, $D_Y = \frac{pq}{1-q^2} - \frac{p^2q^2}{(1+q^2)^2}$, $m_Z = \frac{p}{1+q^2}$, $D_Z = \frac{p}{1-q^2} - \frac{p^2}{(1+q^2)^2}$. 4.15. a) $K_{12} = -\frac{2}{75}$. ● Examinemos la ley de distribución de las probabilidades de la variable aleatoria X_1. Tenemos $P\{X_1 = 1\} = 6/10$, $P\{X_1 = 0\} = 4/10$. Para la variable aleatoria X_2 encontramos la distribución de las probabilidades utilizando la fórmula de la probabilidad total: $P\{X_2 = 1\} = P\{X_2 = 1/X_1 = 0\} P\{X_1 = 0\} + P\{X_2 = 1/X_1 = 1\} \times P\{X_1 = 1\} = 3/5$. $P\{X_2 = 0\} = 2/5$. Análogamente, $P\{X_k = 1\} = P\{X_k = 1/X_{k-1} = 0\} P\{X_{k-1} = 0\} + P\{X_k = 1/X_{k-1} = 1\} \times P\{X_{k-1} = 1\} = 3/5$; $P\{X_k = 0\} = 1 - P\{X_k = 1\} = 2/5$, $k = 2, 3, 4, 5$. Ahora bien, las variables aleatorias X_k, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, tienen iguales distribuciones incondicionales de las probabilidades: $P\{X_k = 0\} = 2/5$, $P\{X_k = 1\} = 3/5$. No obstante, son dependientes.

Esto se deduce, por ejemplo del hecho de que $\mathbf{P}\{X_1 = 1,\ X_2 = 1,\ X_3 = 1\} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \neq \mathbf{P}\{X_1 = 1\}\,\mathbf{P}\{X_2 = 1\}\,\mathbf{P}\{X_3 = 1\} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$. Para calcular la covarianza K_{12} describamos la ley de distribución compatible de las componentes del vector aleatorio discreto (X_1, X_2): $\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 0\} = \mathbf{P}\{X_1 = 0\}\,\mathbf{P}\{X_2 = 0/X_1 = 0\} = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$, $\mathbf{P}\{X_1 = 0, X_2 = 1\} = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$, $\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 0\} = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$, $\mathbf{P}\{X_1 = 1, X_2 = 1\} = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$. Por consiguiente, $K_{12} = \mathbf{M}[X_1 X_2] - \mathbf{M}[X_1]\,\mathbf{M}[X_2] = \frac{1}{3} - \frac{9}{25} = -\frac{2}{75}$. ▶ b) $m_X = 3$; c) $D_X = \frac{2}{3}$. **4.16.** $1 - \frac{1}{2^n}$. ● Primeramente es necesario hallar las esperanzas matemáticas $\mathbf{M}[X_k/X_{k-1}]$, $k = 2, 3, \ldots, n$ y luego utilizar la fórmula de la esperanza matemática total (6) del § 3. **4.17.** $\mathbf{P}\{X = n\} = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}$, $n = k, k+1, \ldots$, $m_X = k/p$, $D_X = kq/p^2$. ● Al describir la ley de distribución de la variable aleatoria X es necesario utilizar el resultado del problema 2.40 (notación de la probabilidad del suceso A). Para calcular m_X y D_X hay que poner $X = \sum_{m=1}^{k} X_m$, donde X_m es el número de las piezas salidas de la línea automática a partir del momento de obtención de la $(m-1)$-ésima pieza no estándar hasta el momento de obtención de la m-ésima pieza no estándar (lo último, inclusivamente). **4.18.** $\mathbf{M}[Z_n] = npq + p^2$. ● Introducir los indicadores: I_k, el indicador del caso favorable en la k-ésima prueba; J_k, el indicador del comienzo de una serie para la k-ésima prueba, es decir, $J_k = 1$ si la k-ésima prueba es el comienzo de la serie consecutiva de los casos favorables y $J_k = 0$ si no es un tal comienzo. Mostrar que $Z_n = I_1 + \sum_{k=2}^{n} J_k$. **4.19.** $m_Z \approx 4{,}084$ g, $\sigma_Z = 0{,}028$ g. **4.20.** $m_Z \approx 4{,}084$ g, $\sigma_Z \approx 0{,}071$ g. **4.21.** $m_Z = \frac{a}{p}$, $D_Z = \frac{\sigma^2}{p} + \frac{a^2 q}{p^2}$. ● Calcular primeramente las esperanzas matemáticas condicionales $\mathbf{M}[Z/Y = n]$ y $\mathbf{M}[Z^2/Y = n]$ y luego utilizar la fórmula de la esperanza matemáti-

ca total (6) del § 3. 4.23. a) $\mathbf{M}\left[X_n\right]=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$; b) $\mathbf{M}[X_2]=3$, $\mathbf{M}[X_5]=11{,}4$, $\mathbf{M}[X_{10}]=27{,}86$, $\mathbf{M}[X_{100}]\approx 518{,}2$. ● Demostrar la fórmula $X_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}Y_k$, donde Y_k es la cantidad de las cartas depositadas hasta que una de las cartas vaya a parar en uno de los k buzones que hasta este instante quedaban vacíos. Luego es necesario utilizar la propiedad de la esperanza matemática y tener en cuenta que las variables aleatorias Y_k corresponden a las pruebas hasta el primer caso favorable. Para grandes de n usar la fórmula $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=-\ln n+c$, donde $c\approx 0{,}577$ es la constante de Euler. 4.24.a) $E_{I_k}\times(t)=pe^{it}+q$, $E_X(t)=(pe^{it}+q)^n$; b) $E_{I_k}(t)=p_ke^{it}+q_k$, $E_X(t)=\prod_{k=1}^{n}(p_ke^{it}+q_k)$. 4.25. $m_X=np$, $D_X=npq$, $a_X=\frac{q-p}{\sqrt{npq}}$, $e_X=\frac{1-6pq}{npq}$. 4.26. $E_X(t)=\frac{1}{1+a(1-e^{it})}$, $m_X=a$, $D_X=a(a+1)$. 4.27. $E_X(t)=e^{itc-a|t|}$. ● Obtener para la función característica $E_X(t)=\frac{a}{\pi}e^{itc}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}}{x^2+a^2}dx$. La integral situada en el segundo miembro se puede calcular con ayuda de la teoría de los residuos si el contorno de integración se cierra por la circunferencia de radio $r\to\infty$ que tiene por centro el origen de coordenadas y se halla en el semiplano superior (cuando $t>0$) o inferior (cuando $t<0$), 4.28. $E_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-it}$, $m_X=\frac{1}{\lambda}$, $D_X=\frac{1}{\lambda^2}$, $a_X=2$. 4.29. $E_X(t)=e^{\frac{a+b}{2}it}\times\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{b-a}{2}t\right)}{(b-a)t}$, $m_X=\frac{a+b}{2}$, $D_X=\frac{(b-a)^2}{12}$. 4.30. $f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x-m|\right)$ es la distribución de Laplace, $m_X=m$, $\sigma_X=\sigma$. 4.31. ◀ Sea X la variable aleatoria del tipo continuo.

Entonces

$$|E_X(t+\tau)-E_X(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(e^{i\tau x}-1) f_X(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}\sqrt{f_X(x)}|^2\,dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\tau x}-1)\sqrt{f_X(x)}|^2\,dx \right\}^{1/2}$$

en virtud de la desigualdad de Cauchy–Buniakovski. Puesto que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}\sqrt{f_X(x)}|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1,$$

entonces

$$|E_X(t+\tau) - E_X(t)| \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\tau x} - 1|^2 f_X(x)\,dx} =$$

$$= \sqrt{2\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos\tau x)\, f_X(x)\,dx} = \sqrt{2(1-\operatorname{Re} E_X(\tau))}.$$

Realizar independientemente la demostración para una V.A.T.D. ▶ **4.32.** ● Utilizar la desigualdad del problema 4.31. **4.33.** ● Demostrando la suficiencia es necesario examinar la variable aleatoria $Y = X - a$ y mostrar que $\operatorname{Re} E_Y(2\pi/h) = 1$. De aquí se deduce que $M[1 - \cos(2\pi Y/h)] = 0$ y, por consiguiente, por la propiedad 3) $\cos 2\pi Y/h = 1$ con la probabilidad igual a la unidad. **4.34.** $E_Y(t) = \frac{e^{itb}}{ita}(e^{ita} - 1)$. La función característica corresponde a la distribución uniforme $R(b, a+b)$. **4.35.** $E_Y(t) = \frac{1}{1-it}$. La función característica corresponde a la distribución exponencial con el parámetro $\lambda = 1$. **4.36.** La variable aleatoria Y se subordina a la ley $N(0, 1)$. ● Utilizar la monotonía de la función lineal.

4.37.

y_k	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
$P\{Y=y_k\}$	1/9	2/9	2/9	2/9	2/9

4.38. ◀ Sea x_0 un punto arbitrario tomado en el campo de valores posibles de la variable aleatoria X. Entonces $P\{X < x_0\} = F_X(x_0) = y_0 \in (0, 1)$ en virtud de la propiedad de monotonía de la función de distribución de la variable aleatoria continua. Luego, en virtud de la misma propiedad $P\{Y < y_0\} = P\{F_X(X) < y_0\} = P\{X < F_X^{-1}(y_0)\} = P\{X < x_0\} = y_0$. Así pues, está mostrado que $F_Y(y_0) = y_0$ si $0 < y_0 < 1$ que es lo que demuestra la uniformidad de la distribución de Y en el segmento $[0, 1]$. ▶

▶ 4.39. $f_Y(y)=\dfrac{a}{\pi(y^2+a^2)}$ (la ley de Cauchy con los parámetros $c=0$ y a). 4.40. $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 2,\\ \dfrac{4}{\pi x\sqrt{x^2-4}}, & x>2.\end{cases}$ 4.41. La ley exponencial con el parámetro a. 4.42. $f_{Y_1}(y)=\dfrac{3}{\pi}\cdot\dfrac{1}{y^2+4y+13}$;

$f_{Y_2}(y)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{13y^2+4y+1}$; $f_{Y_3}(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{y(4+y)}}, & y>0;\end{cases}$

$f_{Y_4}(y)=\begin{cases}1, & y\in\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right),\\ 0, & y\notin\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right).\end{cases}$

4.43. $f_{Y_1}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3a\sqrt[3]{3y^2}}, & y\in\left(-\dfrac{3a^3}{8},\ \dfrac{3a^3}{8}\right),\\ 0, & y\notin\left(-\dfrac{3a^3}{8},\ \dfrac{3a^3}{8}\right);\end{cases}$

$f_{Y_2}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}, & |y|<a,\\ 0, & |y|\geqslant a\end{cases}$

4.44.

z_i	-1	0	1
$\mathbf{P}\{Z=z_i\}$	0,2	0,7	0,1

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant -1,\\ 0{,}2, & -1<z\leqslant 0,\\ 0{,}9 & 0<z\leqslant 1,\\ 1 & 1<z.\end{cases}$$

4.45. $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\ \text{ó}\ z\geqslant r,\\ \dfrac{2z}{r^2}, & 0<z<r.\end{cases}$

4.46. $f_{R,\Phi}(r,\varphi)=\begin{cases}0, & r\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\,r\exp\left(-\dfrac{r^2}{2}\left(\dfrac{\cos^2\varphi}{\sigma_X^2}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\sigma_Y^2}\right)\right), & r>0.\end{cases}$

4.47. $f_Z(z)=2z\exp\left(-\dfrac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)z^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)\cdot I_0\left(\dfrac{z^2(\sigma_1^2-\sigma_2^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)$, donde

$I_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-t\cos\varphi}\,d\varphi$ es la función de Bessel modificada de orden nulo.

4.48. $f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & y>0,\end{cases}$ $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{z}}e^{-\lambda\sqrt{z}}, & z>0;\end{cases}$

$f_U(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant 0 \text{ ó } >1,\\ 1, & 0<u\leqslant 1.\end{cases}$ 4.49. a) $f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\leqslant 0 \text{ ó } z>2,\\ z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ -z^2+2z, & 1<z\leqslant 2;\end{cases}$

$$f_U(u=\begin{cases}0, & u\leqslant 0,\ \text{ó } u\geqslant 1,\\ 2(1-u), & 0<u<1.\end{cases}$$

b) $g_{U,V}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{v}}+\dfrac{1}{2\sqrt{u}}, & 0<u<v<1.\\ 0 & \text{en los demás casos.}\end{cases}$ 4.50. ● Examinar la función de distribución $F_{X^nY^n}(u,v)=\mathbf{P}\{X^n<u,\ Y^n<v\}$ por separado para n impares y pares y mostrar que en ambos casos es válida la igualdad $F_{X^n,Y^n}(u,v)=F_{X^n}(u)F_{Y^n}(v)$.

4.51. a) $F_Y(y)=1-(1-F_X(y))^n$, $F_Z(z)=F_X^n(z)$;

b) $F_{Y,Z}(y,z)=\begin{cases}0, & y\geqslant z,\\ F_X^n(z)-(F_X(z)-F_X(y))^n, & y<z.\end{cases}$

● Utilizar la equivalencia de los sucesos $\{Y\geqslant y\}$ y $\prod_{k=1}^{n}\{X_k\geqslant y\}$; $\{Z<z\}$ y $\prod_{k=1}^{n}\{X_k<z\}$. 4.52. $f_{Y,Z}(y,z)=\begin{cases}\dfrac{n(n-1)(z-y)^{n-2}}{(b-a)^n}, & a<y<z<b,\\ 0 & \text{en los demás casos,}\end{cases}$

● Utilizar el resultado del problema 4.51. 4.53. ● Hallar la función característica de la variable aleatoria X^2 y mostrar que coincide con la función característica de distribución ji-cuadrado con un grado de libertad. 4.54. a) ● Utilizando el resultado del problema 4.53, mostrar que $E_{Z_n}(t)=(1-2it)^{-n/2}$. Por otro lado, determinar que

$$E_{Z_n'}(t)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x+itx}\,dx,$$

donde Z'_n se subordina a la ley de distribución χ^2 (n) y, una vez calculada esta integral, obtener el mismo resultado. b) $M[Z_n]=n$, $D[Z_n]=2n$. 4.55. ● Escribir la expresión para $F_Z(z)$ en forma de la integral doble en el dominio correspondiente. 4.57. ◀ Si X está distribuida según la ley St (n), entonces

$$\ln f_X(x)=\ln\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)-\ln\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(n\pi)-$$

$$-\frac{n+1}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right).$$

Hagamos uso de la fórmula de Stirling para la función gamma[1])

$$\ln\Gamma(u)=\left(u-\frac{1}{2}\right)\ln u-u+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+O\left(\frac{1}{u}\right).$$

De aquí resulta que $\ln f_X(x)=-\frac{1}{2}\ln(\pi n)-\frac{1}{2}+\left(\frac{n-1}{2}\right)\times$

$\times\ln\frac{n-1}{n+2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{n-1}{2}\right)-\frac{n+1}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\frac{1}{2}\times$

$\times\ln(2\pi)-\frac{x^2}{2}$ y, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ para todos los $x\in\mathbb{R}$. ▶ 4.58. $m_{\text{máx}}=n-1$. 4.59. $m_Z=D_Z=\lambda_1+\lambda_2$. 4.60. $P\{Z=k\}=(k-1)\,p^2q^{k-2}$, $k=2, 3, \ldots$ 4.61. a), b) $f_Z(z)=$

$$=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 z}-e^{-\lambda_2 z}), & z>0;\end{cases}$$ c) $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ \lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z>0\end{cases}$ (la ley de Erlang de primer orden), ● Hallar la densidad con ayuda de la transformación inversa de Fourier (propiedad (6)). 4.62. ● Utilizar el resultado del problema 4.61 c) y el método de inducción matemática. 4.63. ● Utilizar las propiedades 4) y 6) de la función característica y el resultado del problema 4.54 a).

4.64. $$f_Z(z)=\begin{cases}0 & z\leqslant -2,\\ \dfrac{z}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<z\leqslant 0,\\ -\dfrac{z}{4}+\dfrac{1}{2}, & 0<z\leqslant 2,\\ 0 & z>2\end{cases}$$ la ley de Simpson con el parámetro $a=2$)

● Primeramente es necesario hallar la función de distribución de la suma. 4.65. a) Son independientes, ya que son incorrelacionadas y normales. b) Según la ley de Cauchy con los parámetros $c=0$,

---

[1]) De esta fórmula se deduce, en particular, la fórmula conocida para los factoriales $n!=\Gamma(n+1)\approx(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ para grand s n.

$a=1$. ● Primeramente es necesario hallar la función de distribución del cociente. 4.66. $f_Z(z)=\frac{1}{b-a}\ (F_X\ (z-a)-F_X\ (z-b))$. 4.67. $f_Z(z)=\frac{1}{6}\left(\Phi\left(\frac{z+3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{z-3}{2}\right)\right)$. ● Utilizar el resultado del problema 4.66. 4.68. La distribución exponencial con el parámetro $p\lambda$. Hallar la función característica $\mathbf{M}[e^{itZ}/Y=n]$ y utilizar la fórmula de la esperanza matemática total. 5.1. $\mathbf{P}(A)\geqslant 0{,}84$, $\mathbf{P}(B)\geqslant 0{,}36$, $\mathbf{P}(C)\geqslant 0{,}74$. 5.2. a) $\mathbf{P}(A)\leqslant 0{,}2$; b) $\mathbf{P}(A)\leqslant 0{,}004$; c) $\mathbf{P}(A)\leqslant 0{,}002$. 5.3. $p_1\geqslant 0$, $p_2\geqslant 0{,}75$, $p_3\geqslant\frac{8}{9}$. 5.5. ● Utilizar el resultado del problema 5.4. 5.6. Es aplicable, puesto que $\mathbf{D}[X_n]\leqslant 2$, $n\in\mathbb{N}$. 5.7. Es aplicable. 5.8. Es aplicable. 5.9. Es aplicable, puesto que se cumple la condición (1). 5.10. a) 0,666; b) 0,96; c) 0,9998. 5.12. $\mathbf{P}(A)=0{,}5$, $\mathbf{P}(B)=0{,}9742$. 5.13. 0,0008. 5.14. 0,8384. 5.15. a) $n\geqslant 1000$; b) $n\geqslant 127$. 5.16. $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}9066$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}8858$, $\mathbf{P}(D)\approx 0{,}1051$. 5.17. (—0,0283; 0,0283). 5.18. a) ≈0,8944; b) 0,4; c)≈0,0392. ● Se llama exactitud de medición relativa la magnitud $\left|\frac{X-m_X}{m_X}\right|$. 5.19. 753. ● Considerar aplicable el teorema integral de Moivre — Laplace. 5.20. $\mathbf{P}(A)\approx 0{,}0797$, $\mathbf{P}(B)\approx 0{,}5160$, $\mathbf{P}(C)\approx 0{,}6689$. 5.21. (792, 828). 5.23. $3921<n<16435$; 5.24. $\mathbf{P}(A)\approx 0$ con exactitud hasta cinco signos; $\mathbf{P}(B_{40\,000})\approx 0{,}995$, $\mathbf{P}(B_{60\,000})=0{,}5$, $\mathbf{P}(B_{80\,000})\approx 0{,}005$. 5.25. 5,3%. 5.26. No menos de 9792 pruebas. ● Para el cálculo de $\frac{\sigma_Y}{|I|}$ utilizar la tabla de valores de la función de Laplace. 5.27. 0,7372. 5.28. $n_{\text{mín}}=27\,427$. ● La probabilidad de que la aguja corte una de las rectas paralelas es igual a $p=\frac{1}{\pi}$. Puesto que en el experimento dado se mide el número de intersecciones (o sea, la variable aleatoria X_n), entonces $\frac{1}{n}X_n=\frac{1}{\pi^*}$, donde π^* es el valor aproximado del número π en el método de las pruebas estadísticas (método de Montecarlo). Según el teorema límite central la variable aleatoria $T=\frac{\frac{1}{n}X_n-\mathbf{M}\left[\frac{1}{n}X_n\right]}{\sqrt{\mathbf{D}\left[\frac{1}{n}X_n\right]}}=\frac{\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{\pi^*}-1\right)}{\sqrt{\pi-1}}$ está distribuida asintóticamente (para grandes n) según la ley $N(0, 1)$. Puesto que los sucesos $\left\{\frac{|\pi-\pi^*|}{\pi}<\delta_{\text{máx}}=0{,}03\right\}$ y $\left\{|T|<\frac{\delta_{\text{máx}}}{1-\delta_{\text{máx}}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi-1}}\right\}$ son equivalentes, entonces

$$\mathbf{P}\left\{\frac{|\pi-\pi^*|}{\pi}<0{,}03\right\}=2\Phi\left(\frac{0{,}03}{0{,}97}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi-1}}\right)-1=0{,}9996.$$

Resolviendo la ecuación obtenida, encontramos el valor mínimo de n

6.1. $m_X(t)=1/2$, $D_X(t)=1/4$.

$$F_2(x,\ y/t_1,\ t_2)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0 \text{ ó } y\leqslant 0,\\ F_X(x)=1-e^{-2x}, & 0<x<y,\\ F_Y(y)=1-e^{-2y}, & 0<y<x.\end{cases}$$

6.2. $f_1(x/t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_V(v)\, f_U(x-v\mid t\mid)\, dv$, $m_X(t)=m_U+tm_V$,

$K_X(t_1,\ t_2)=D_U+t_1t_2D_V$, $D_X(t)=D_U+t^2D_V$.

6.3. $$F_1(x/t)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{3}\dfrac{x}{t^2}, & 0<x\leqslant 3t^2,\\ 1, & x>3t^2;\end{cases}$$

$$f_1(x/t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3t^2}, & x\in(0,\ 3t^2),\\ 0, & x\notin(0,\ 3t^2).\end{cases}$$

6.4. $f_1(x/t)=\dfrac{1}{\sigma\mid t\mid\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{(x-tm-b)^2}{2t^2\sigma^2}\right\}$, $m_X(t)=tm+b$.

$\sigma_X(t)=\sigma\mid t\mid$, $K_X(t_1,\ t_2)=t_1t_2\sigma^2$. 6.5. $F_1(x/t)=\sum\limits_{n<x}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$,

$$P\{N(\tau)\text{ es un número par}\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda\tau}=e^{-\lambda\tau}\operatorname{ch}\lambda\tau=\frac{1+e^{-2\lambda\tau}}{2}.$$

6.8. $K_Y(t_1,\ t_2)=\dfrac{e^{-(t_1^2+t_2^2)}}{1+(t_1-t_2)^2}$, $D_Y(t)=e^{-2t^2}$. 6.9. $m_X(t)=$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t,\ y)\, f_Y(y)\, dy,\quad K_X(t_1,\ t_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t_1,\ y)\,\varphi(t_2,\ y)\, f_Y(y)\, dy-$$

$$-m_X(t_1)\, m_X(t_2),\qquad D_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi^2(t,\ y)\, f_Y(y)\, dy-m_X^2(t).$$

6.10. a) $f_1(x/t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$; b) $f_1(x/t)=\dfrac{\lambda}{\pi}K_0(\lambda\mid x\mid)$, donde

$K_0(z)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-z\operatorname{ch}u}\,du$ es la función de MacDonald; c) $f_1(x/t)=$

$$=\begin{cases}0, & \text{si } \mid x\mid\geqslant a,\\ \dfrac{1}{\pi a}\ln\dfrac{\mid a+\sqrt{a^2-x^2}\mid}{\mid x\mid}, & \text{si } \mid x\mid<a.\end{cases}$$ 6.11. $f_1(x/t)=$

$$= \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a, \\ \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a \end{cases}$$ (la ley de arcseno), $m_X(t) = 0$, $D_X(t) = \dfrac{a^2}{2}$, **6.12.** $f_1(x/t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2(t)}{2\sigma^2}\right)$, donde $x(t) = a\cos\omega t + b \operatorname{sen} \omega t$ es la realización del proceso aleatorio;

$$f_2(x, y/t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 |\operatorname{sen}\omega\tau|} \exp\left(-\frac{x^2 - 2xy\cos\omega\tau + y^2}{2\sigma^2 \operatorname{sen}^2\omega\tau}\right),$$

donde $x = x(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \operatorname{sen} \omega t$, $y = x(t+\tau) = a_1 \cos\omega(t+\tau) + b_1 \operatorname{sen}\omega(t+\tau)$ es la realización del proceso en los instantes desplazados en τ. **6.13.** $K_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$, $\tau = t_2 - t_1$. ● Para el cálculo de la función covariante es necesario describir la ley de distribución del vector aleatorio bidimensional $(X(t), X(t+\tau))$ y utilizar el resultado del problema 6.5. **6.14.** $m_X(t) = 0$, $K_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\lambda|\tau|}$, $D_X = \sigma^2$. ● Para el cálculo de $K_X(t, t+\tau)$ es necesario utilizar la fórmula de la esperanza matemática total en la partición $\{A, \bar{A}\}$, donde el suceso $A = \{$durante el tiempo τ el proceso no realiza ningún salto$\}$: $\mathbf{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t+\tau)] = \mathbf{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t+\tau)/A] \times \mathbf{P}(A) + \mathbf{M}[\mathring{X}(t)\,\mathring{X}(t+\tau)/\bar{A}]\,\mathbf{P}(\bar{A})$. **6.15.** $\mathbf{P}\{\Phi(t_2) > \beta\} = 1 - \Phi\left(\dfrac{\beta - \alpha\rho(\tau)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2(\tau)}}\right)$. ● Utilizar la expresión para la densidad condicional de distribución de las probabilidades $f_1(\varphi_2/\varphi_1 = \alpha)$, obtenida en el ejemplo 3 del § 3, p. 2. **6.16.** $m_Z(t) = at + b(1 + t^2)$, $D_Z(t) = 4a^2 + 9b^2 + 8ab$. ▶ Siendo cada t fijo, la sección $Z(t)$ es la combinación lineal de las secciones $X(t)$ e $Y(t)$ y por eso (véase, por ejemplo, el problema 4.36) es una variable aleatoria normal. Las características de la distribución normal dada se pueden encontrar aplicando a la forma lineal de $aX(t) + bY(t)$ las operaciones de toma de la esperanza matemática y de la varianza de acuerdo con las propiedades de estas operaciones. **6.17.** $m_N(t) = \lambda t$, $K_N(t_1, t_2) = \lambda$ mín (t_1, t_2).

6.18. $f_1(x/t) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-x\lambda}, & x > 0. \end{cases}$ **6.19.** $f_1^{(k)}(x/t) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{(\lambda x)^{k-1}\lambda e^{-\lambda x}}{(k-1)!}, & x > 0 \end{cases}$

(la ley de Erlang de k-ésimo orden). **6.20.** $m_X(t) = 0$; $D_X(t) = 1$;

$$K_X(\tau) = \begin{cases} 1, \text{ si } t \in (t_k, t_{k+1}),\ t+\tau \in (t_k, t_{k+1}),\ k = 1, 2, \ldots \\ 0, \text{ si } t \in (t_k, t_{k+1}),\ t+\tau \notin (t_k, t_{k+1}),\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

6.21. $m_X(t) = m_A(F_T(t) - F_T(t-t_0))$;

$$K_X(t_1, t_2) = \begin{cases} (\sigma_A^2 + m_A^2)(F_T(t_1) - F_T(t_1+\tau-t_0)) - m_A^2(F_T(t_1) - \\ -F_T(t_1-t_0))(F_T(t_1+\tau) - F_T(t_1+\tau-t_0)), & 0 < \tau < t_0, \\ 0, & \tau > t_0. \end{cases}$$

$$D_X(t) = (\sigma_A^2 + m_A^2)(F_T(t) - F_T(t-t_0)) - m_A^2(F_T(t) - F_T(t-t_0))^2,$$

donde $F_T(t) = \int_{-\infty}^{t} f_T(s)\,ds$ es la función de distribución de la variable aleatoria T.

6.22. a) $D_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \text{ (el impulso falta a ciencia cierta)}, \\ 2t - t^2, & 0 < t \leqslant 2, \\ 0, & t > 2 \text{ (el impulso ha terminado a ciencia cierta)}; \end{cases}$

b) $D_X(t) = \frac{1}{4}(\Phi(t-1) - \Phi(t-2)) - \frac{1}{4}(\Phi(t-1) - \Phi(t-2))^2$, donde $\Phi(t)$ es la función de Laplace. ● Utilizar el resultado del problema precedente. 6.23. $X(t) = -\psi_1(t) + \psi_2(t) + V_1\varphi_1(t) + V_2\varphi_2(t)$, $K_X(t_1, t_2) = 3\varphi_1(t_1)\varphi_1(t_2) + \varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)$, donde $\varphi(t) = A\psi(t)$, $V = A\mathring{U}$, $A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. ● Utilizar el método de la transformación ortogonal, examinado en el ejemplo 3. 6.24. $X(t) = t + \cos t + 2\operatorname{sen} t + V_1\varphi_1(t) + V_2\varphi_2(t)$, $K_X(t_1, t_2) = \varphi_1(t_1)\varphi_1(t_2) + \frac{13}{8}\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2)$, donde $\varphi(t) = A\psi(t)$, $V = (A^{\top})^{-1}\mathring{U}$, $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$, $(A^{\top})^{-1} = \frac{1}{120} \times \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ -18 & 25 \end{pmatrix}$. ● Aplicar el método de Lagrange, examinado en el ejemplo 4. 6.25. $X(t) = m_X(t) + V_1\varphi_1(t) + V_2\varphi_2(t) + V_3\varphi_3(t)$; $K_X(t_1, t_2) = 8\varphi_2(t_1)\varphi_2(t_2) + 4\varphi_3(t_1)\varphi_3(t_2)$, donde $\varphi(t) = A\psi(t)$, $V = A\mathring{U}$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

● Utilizar el método de la transformación ortogonal, examinado en el ejemplo 3. 6.26. $m_X(t) = t$, $K_X(t_1, t_2) = \cos t_1 \cos t_2 + 2\operatorname{sen} t_1 \times \operatorname{sen} t_2$, $D_X(t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$; $m_Z(t) = 1$, $K_Z(t_1, t_2) = \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 + 2\cos t_1 \cos t_2$, $D_Z(t) = 1 + \cos^2 t$; $m_Y(t) = t^2/2$, $K_Y(t_1, t_2) = \operatorname{sen} t_1 \operatorname{sen} t_2 + 2\cos t_1 \cos t_2 - 2(\cos t_1 + \cos t_2) + 2$, $D_Y(t) = (1 - \cos t)^2 + 2(1 - \cos t)$. 6.27. Es continuo, pero no es derivable. ● Mostrar que la condición necesaria de derivabilidad no se cumple. 6.28. Es continua, pero no es derivable. ● Véase la indicación para el problema precedente.

6.29. Es derivable $\mathbf{D}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = \sigma^2\alpha^2$. 6.30. $m_Y(t) = 2\cos\omega t - 6\omega\operatorname{sen}\omega t$, $K_Y(t_1, t_2) = 9(\cos\omega t_1 - 3\omega\operatorname{sen}\omega t_1)(\cos\omega t_2 - 3\omega\operatorname{sen}\omega t_2)$, $D_Y(t) = 9(\cos\omega t - 3\omega\operatorname{sen}\omega t)^2$. ● Utilizar las fórmulas generales de la transformación (13). 6.31. $\mathbf{D}\left[\frac{dX(t)}{dt}\right] = (2\alpha + \beta^2)D_X$. 6.32. $m_Y(t) =$

$= 7t^2 + 2t$, $D_Y(t) = 4t^2$. 6.33. $m_Y(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{4\omega}\operatorname{sen} 2\omega t$, $D_Y(t) =$

$= \frac{4}{\omega^2}\operatorname{sen}^2 \omega t$. 6.34. $D_Y(t) = \frac{\sigma^2 t}{\lambda}(t_0 + e^{-\lambda t}(1 - e^{\lambda t_0}))$.

6.36. a) $K_{XY}(t_1, t_2) = t_1^2 t_2 + \frac{1}{2} t_1 t_2^2 + \frac{2}{3} t_2^3$. ● Utilizar el resultado del problema 6.35; b) $K_Y(t_1, t_2) = \frac{1}{3} t_1^3 t_2 + \frac{1}{4} t_1^2 t_2^2 + \frac{2}{3} t_1 t_2^3$.

6.37. a) $K_Z(t_1, t_2) = 1$; b) $K_{XZ}(t_1, t_2) = t_1 + 4t_2$. 6.38. $m_Y(t) =$

$= 2\beta e^{\alpha t}\cos \omega t + 2\gamma S(t)$, $D_Y(t) = 9(\beta e^{\alpha t}\cos \omega t + \gamma S(t))^2$, donde $S(t) =$

$= \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \omega^2}(\alpha \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t) - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$. 6.39. No. 6.40. $K_X(t, t+\tau) =$

$= \sum_{k=0}^{n} D_k \cos \omega_k \tau$; $D_X = \sum_{k=0}^{n} D_k$. 6.41. $\mathrm{D}[X(t)] = \alpha_2 \sum_{k=0}^{n} D_k$,

$\mathrm{D}\left[\frac{dX}{dt}\right] = \alpha_2 \sum_{k=0}^{n} \omega_k D_k$, $\mathrm{D}\left[\int_0^t X(s)\, dx\right] = \alpha_2 \sum_{k=0}^{n} \frac{D_k}{\omega_k}$, donde $\alpha_2 =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 \varphi f\Phi(\varphi)\, d\varphi$. 6.43. a) Es derivable un número infinito de veces. Si $Y(t) = \frac{d^2 X(t)}{dt^2}$, entonces $D_Y(t) = \frac{d^4 K_X(\tau)}{d\tau^4}\Big|_{\tau=0} = 8\alpha^2\sigma_X^2$; b) es derivable dos veces. $D_Y = 2\alpha^2\sigma_X^2$; c) no es derivable.

6.44. $K_Y(t, t+\tau) = K_X(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} K_X(\tau) + \frac{d^4}{d\tau^4} K_X(\tau)$. 6.46. $m_Y = 0$,

$K_Y(\tau) = \sigma_X^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\left(\beta \cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{sen} \beta\,|\,\tau\,|\right)$, $D_Y = \sigma_X^2(\alpha^2 + \beta^2)$.

● Para demostrar la normalidad es necesario utilizar la definición de la derivada del proceso aleatorio y las propiedades de la función lineal de la variable aleatoria normal. 6.47. $\mathrm{P}\left\{\left|\frac{dX(t)}{dt}\right| < \sqrt{13}\right\} =$

$= 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \approx 0{,}383$. 6.49. $K_{XY}(\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} K_X(\tau)$. 6.50. $f_2(x, y/t, t) =$

$\frac{1}{2\pi\alpha\sigma_X^2\sqrt{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_X^2}\left(x^2 + \frac{y^2}{\alpha\sqrt{2}}\right)\right\}$. ● Utilizar el resultado del problema 6.46. 6.51. $K_{XY}(t, t+\tau) = \sigma_X^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha|t+t_0|} \times$

$\times \operatorname{sen} \beta\,|\,\tau + t_0\,|$. ● Utilizar el resultado del problema 6.49. 6.52. $\mathrm{M}[X^2(t) X^2(t+\tau)] = 2\sigma^4\rho^2(\tau) + 4\rho(\tau) m^2\sigma^2 + (\sigma^2 + m^2)^2$. ● Utilizar los hechos siguientes: 1) si (X, Y) es un vector aleatorio normal bidimensional que tiene por centro de dispersión (m_X, m_Y)

y por matriz covariante

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & K_{XY} \\ K_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix},$$

entonces la función característica del vector aleatorio dado tiene la forma

$$E_{XY}(u, v) = \exp\left\{ i(m_X u + m_Y v) - \frac{1}{2}(\sigma_X^2 u^2 + 2K_{XY} uv + \sigma_X^2 v^2) \right\};$$

2) la esperanza matemática buscada $\mathbf{M}[X^2(t)\, X^2(t+\tau)]$ es el momento inicial mixto de cuarto orden $\alpha_{2,2}$ de la distribución compatible de $(X(t), X(t+\tau))$, por eso de acuerdo con las propiedades de la función característica

$$\mathbf{M}[X^2(t)\, X^2(t+\tau)] = \alpha_{2,2} = \frac{\partial^4 E_{XY}(u, v)}{\partial u^2\, \partial v^2}\Big|_{u=v=0}.$$

6.53. $K_Z(\tau) = 2K_X^2(\tau) + 4m^2 K_X(\tau)$. • Expresar la función buscada $K_Z(\tau)$ por $\mathbf{M}[X^2(t)\, X^2(t+\tau)]$ y utilizar el resultado del problema precedente. 6.54. a) En la integral doble que determina la varianza $\sigma_Y^2(t)$ sustituir las variables y cambiar el orden de integración. 6.55. $D_Y(t) = 4t + 2(1 - e^{-2t})$. • Utilizar el resultado del problema precedente. 6.56. Los procesos son estacionariamente conexos. • Para el cálculo de la función covariante de conexión es necesario utilizar el resultado del problema 6.54 b). 6.57. $K_{XY}(t, t+\tau) = -\frac{1}{3}\sigma^2\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau| - \alpha^2\tau^2)$. 6.58. a) Sí; b) sí; c) no, puesto que el proceso de Poisson no es estacionario en el sentido ancho. 6.60. $\widetilde{K}_X(\tau) = \frac{(a_1 - m_A)^2}{2}\left(\cos\omega\tau + \right.$ $\left. + \frac{\operatorname{sen}(2\omega T + \omega\tau + 2\varphi_1) - \operatorname{sen}(\omega\tau + 2\varphi_1)}{2\omega T}\right)$. 6.62. El proceso no es estrictamente ergódico ni débilmente ergódico respecto a la función autocovariante. 6.63. Sí. 6.64. $K_Y(\tau) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arcsen}\rho_X(\tau)$. ● Puesto que la función aleatoria $Y(t)$ es el resultado de aplicación del operador no lineal al proceso $X(t)$, para el cálculo de $K_Y(\tau)$ es necesario utilizar la definición directa de ésta por el segundo momento central mixto de distribución del vector bidimensional de las secciones $(X(t), X(t+\tau))$. Mostrar que este momento puede ser escrito en la forma

$$K_Y(\tau) = 2\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f_2(x, y/t, t+\tau)\, dy -$$

$$-2\int_0^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{0} f_2(x, y/t, t+\tau)\, dy,$$

donde

$$f_2(x, y/t, t+\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2(\tau)}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho(\tau)\, xy + y^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(\tau))}\right)$$

es la densidad bidimensional de distribución de las probabilidades del proceso estacionario normal. Para el cálculo de las integrales es necesario pasar al sistema polar de coordenadas. 6.66. ● Comprobar el cumplimiento de las condiciones necesarias de la estacionaridad, basándose en las propiedades de la densidad espectral. 6.67. No ● Véase la indicación para el problema precedente.

6.68. a) $K_X(\tau)=\sigma_X^2\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\tau\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau\right)}{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\tau}$. b) $K_X(\tau)\to$ $\to\sigma_X^2\cos\omega_1\tau$ cuando $\omega_2\to\omega_1$ lo que corresponde a la oscilación armónica en la frecuencia ω_1. 6.69. a) $K_X\tau)=\frac{b}{2}e^{-\alpha(\tau)}$, $D_X=\frac{b}{2}$, $\Delta\omega\Delta\tau=2\pi$; b) $K_X(\tau)=\frac{b}{4\alpha^2}e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$, $D_X=\frac{b}{4\alpha^2}$, $\Delta\omega\Delta\tau=$ $=2\pi$. ● Para el cálculo de las integrales, valiéndose de la fórmula (19), es necesario aplicar la teoría de los residuos.

6.70. $S_X(\omega)=\frac{D_X}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$, $\Delta\omega=2\alpha\sqrt{\pi}$, $\Delta\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$. 6.71. $S_X(\omega)=$ $=\frac{\alpha D_X}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha^2+(\beta-\omega)^2}+\frac{1}{\alpha^2+(\beta+\omega)^2}\right)$, $\Delta\omega=2\pi$.

6.73. ● Utilizar el resultado del problema precedente y las reglas de derivación de las integrales impropias respecto al parámetro, a) derivamos un número infinito de veces; b) derivamos dos veces; c) no derivamos. 6.74. $D_Y=\frac{b}{4}$. 6.75. $S_X(\omega)=\frac{4\alpha^3D_X}{\pi(\alpha^2+\omega^2)^2}$, $\Delta\tau=\frac{4}{\alpha}$.

6.76. a) $S_X(\omega)=\frac{2\sigma_X^2}{\pi\omega^2t_0}(1-\cos\omega t_0)$, $\Delta\omega=\frac{2\pi}{t_0}$, el proceso no es derivable; b) $S_X(\omega)=\frac{\sigma_X^2}{\pi}\frac{4\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)^2-4\beta^2\omega^2}$, $\Delta\omega=\frac{\pi(\alpha^2+\beta^2)}{2\alpha}$, el proceso es derivable. 6.77. $m_Y=0$, $K_Y(t,\ t+\tau)=2K_X(\tau)-$ $-K_X(\tau+t_1)-K_X(\tau-t_1)$. El carácter estacionario se conserva. 6.78. $S_Y(\omega)=4\operatorname{sen}^2\frac{\omega t_1}{2}S_X(\omega)$. 6.79. a) $D_Y=D_X(6+2e^{-4\alpha^2t_1^2}-$ $-8e^{-\alpha^2t_1^2})$; b) $D_Y=2D_X\left(4\frac{t_1}{t_0}-1\right)$. ● Determinar primeramente que la función covariante del proceso a la salida del filtro se define por la relación $K_Y(\tau)=6K_X(\tau)+K_X(\tau-2t_1)+K_X(\tau+2t_1)-$ $-4K_X(\tau-t_1)-4K_X(\tau+t_1)$. 6.80. $S_Y(\omega)=(a^2+b^2\omega^2)S_X(\omega)$.

6.81. a) $S_Z(\omega)=\frac{\pi\alpha\sigma_X^4}{\omega^2+4\alpha^2}+\frac{m^2\alpha^2\sigma_X^2}{\omega^2+\alpha^2}$; b) $S_Z(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2\alpha\sqrt{\pi}}\sigma_X^4e^{-\frac{\omega^2}{8\alpha^2}}+$ $+\frac{m^2\sigma_X^2}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$. ● Utilizar la siguiente propiedad de la transfor-

mación de Fourier (fórmula de convolución): si $K_Z(\tau)=K_X(\tau)\,K_Y(\tau)$, donde

$$K_X(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega,$$

$$K_Y(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega,$$

entonces

$$S_Z(\omega)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega_1)\,S_Y(\omega-\omega_1)\,d\omega_1=\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_Y(\omega_1)\,S_X(\omega-\omega_1)\,d\omega_1,$$

así como los resultados del problema 6.53 y del ejemplo 7. Para el cálculo de la integral de convolución en a) utilizar la teoría de los residuos.

6.82. $S_Z(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{12}\dfrac{\sigma_X^4}{\omega_0^2}(2\omega_0-|\,\omega\,|)(\omega_0^2-\omega_0\,|\,\omega\,|+\omega^2), & |\,\omega\,|<2\omega_0,\\ 0, & |\,\omega\,|\geqslant 2\omega_0;\end{cases}$

$D_Z=\dfrac{1}{6}\omega_0^2\sigma_X^4$. ● Utilizar la indicación para el problema 6.81 y el resultado del problema 6.72. 6.83. $m_Y=3$, $D_Y=\dfrac{9}{5}$. 6.84. a) $m_Y=0$, $D_Y=\dfrac{\sigma_X^2}{\omega_0}\cdot\dfrac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\dfrac{\omega_0}{\beta}$; b) cuando $\omega_0\to\infty$ tenemos $D_Y\to\dfrac{\pi}{4}c^2$. ● En la expresión para D_Y, obtenida en a), poner $D_X=c^2\omega_0$ y pasar al límite cuando $\omega_0\to\infty$. 6.85. $\dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}=\dfrac{\pi}{\beta}e^{\alpha^2\beta^2}(1-\Phi(\sqrt{2}\,\alpha\beta))$; en caso particular indicado esta relación es igual $a\approx 0{,}671$. ● Utilizar la integral definida

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-\mu^2x^2}\,dx}{x^2+\beta^2}=\frac{\pi}{\beta}e^{\beta^2\mu^2}(1-\Phi(\beta\mu\sqrt{2})).$$

6.86. $\sigma_Y^2=\dfrac{a^2\pi}{4\alpha}$, $\dfrac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}=2\alpha^2$. 6.87. $m_Y=2$, $S_Y(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\times$ $\times\sigma_X^2\dfrac{\omega^2+4}{(\omega^2+1)(\omega^2+25)}$, $D_Y=\dfrac{3}{10}\dfrac{\sigma_X^2}{\pi}$. 6.88. $D_Y=\dfrac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\omega_2-$ $-\operatorname{arctg}\omega_1)$. 6.89. $S_Y(\omega)=\dfrac{2\sigma_X^2}{\pi}\alpha^3\dfrac{\omega^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$, $\Delta\omega=\dfrac{2\pi}{\alpha^3}(\alpha^4-\beta^4)$, $D_Y=\sigma_X^2\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)}{2}$. 6.90. $K_Y(\tau)=\dfrac{\pi}{2(\alpha^2-\lambda^2)^2}\left(\dfrac{1}{\alpha}e^{-\alpha|\tau|}-\right.$

$$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda|\tau|}+\frac{\alpha^2-\lambda^2}{2\lambda^3}(1+\lambda|\tau|)e^{-\lambda|\tau|}\Big), \quad D_Y=\frac{\pi}{2\alpha\lambda^3}\cdot\frac{1}{(\lambda+\alpha)^2}.$$

6.91. $D_Y=\frac{D_X}{\alpha}\left(A+\frac{B}{2\alpha}\right)$; $A=\frac{a(\alpha^2b^2+c^2)}{4a^2-\alpha^2}$, $B=\frac{4a^2c^2-\alpha^4b^2-2\alpha^2b^2}{4a^2-\alpha^2}$.

6.92. $D_Y=\frac{\sigma_X^2}{\pi t_0}(1-e^{-\beta t_0})$. **6.93.** $D_Y=\frac{\lambda^2}{(\lambda+\beta)^2}$. **6.94.** $D_Y=\frac{c^2\pi}{4\beta\omega_0^2}$.

6.95. $m_Y=0$, $S_Y(\omega)=\frac{4}{\alpha\sqrt{\pi}[(7-\omega^2)^2+64]}\exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right)$.

6.96. $m_Y=\frac{5}{6}m_X$, $S_Y(\omega)=\sigma_X^2\cdot\frac{4}{\pi}\frac{(49\omega^6+25)}{(\omega^2+9)(\omega^2+4)(\omega^2+1)^3}$.

CAPÍTULO 15

ESTADÍSTICA MATEMÁTICA

§ 1. Métodos de descripción estadística de los resultados de observaciones

1. Muestra y procedimientos de su notación. La estadística matemática permite obtener las conclusiones fundamentadas acerca de los parámetros o la forma de distribución de las variables aleatorias, basándose en la población de observaciones sobre ellas, o sea, basándose en la muestra. A continuación la muestra se entiende siempre del modo siguiente. Examinemos un experimento aleatorio $\mathcal{E}$ relacionado con una variable aleatoria X que tiene la función de distribución $F_X(x)$. Se llama *muestra de volumen n de la población madre con la función de distribución* $F_X(x)$ la sucesión $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de los valores observables de la variable aleatoria X, correspondientes a n repeticiones independientes del experimento $\mathcal{E}$[1]). Análogamente se define la muestra en el caso en que el experimento aleatorio $\mathcal{E}$ está relacionado con varias variables aleatorias. Por ejemplo, la muestra de volumen n de la población madre con la función de distribución $F_{X,Y}(x, y)$ es la sucesión $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ de los pares de valores de las variables aleatorias X e Y que éstas toman en n repeticiones independientes del experimento aleatorio $\mathcal{E}$. La muestra puede ser escrita en forma de una serie variacional o en forma de una serie estadística. Se denomina *serie variacional* de la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el método de notarla en el cual los elementos se ordenan según su magnitud, o sea, se escriben en forma de la sucesión $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, donde $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \ldots \ldots \leqslant x^{(n)}$. La diferencia entre los elementos máximo y mínimo de la muestra $x^{(n)} - x^{(1)} = w$ se llama *recorrido de la muestra*. Supongamos que en la muestra de volumen n el elemento x_i se encuentra n_i veces. El número n_i se denomina *frecuencia* del elemento x_i. Es evidente que

[1]) La muestra de volumen n puede definirse como la población de n objetos escogidos al azar en cierto conjunto de objetos, o sea, en la población madre. La definición citada de la muestra supone que el proceso de selección de los elementos de la muestra no cambia la distribución de la población madre. Si la población madre contiene un número finito de objetos, tal muestra puede ser obtenida en el proceso de muestreo aleatorio con devolución (son las así llamadas muestras con reemplazamiento). Las muestras sin reemplazamiento de una población madre finita, así como las muestras obtenidas como resultado de algunos procesos especiales de selección, en este manual no se examinan.

$\sum_{i=1}^{n} n_i = n$. Se llama *serie estadística* la sucesión de los pares (x_i, n_i). Por regla general, la serie estadística se escribe en forma de una tabla en la cual la primera fila contiene los elementos x_i y la segunda, las frecuencias de éstos.

A continuación, siempre que esto no pueda provocar equivocaciones, los límites de variación de la variable de valores enteros, respecto a la cual se realiza la sumación, no se pondrán. Por ejemplo, la suma de los elementos x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, que se escribe en la forma de $\sum_{i=1}^{n} x_i$, se designará como $\sum x_i$.

EJEMPLO 1. Notar en forma de series variacional y estadística la muestra 5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4. Determinar el recorrido de la muestra.

◀ El volumen de la muestra $n = 15$. Una vez ordenados los elementos de la muestra según su magnitud, obtenemos la serie variacional

$$2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.$$

El recorrido de la muestra

$$w = 10 - 2 = 8.$$

La serie estadística se escribe en forma de la tabla

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

Para controlar que la notación es correcta encontramos $\sum n_i = 15$. ▶

Para cada una de las muestras que se dan a continuación es necesario determinar el recorrido, así como construir las series variacional y estadística.

1.1. 3, 8, 1, 3, 6, 5, 2, 2, 7.

1.2. 11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11, 12, 13, 16, 8, 9, 14, 5, 11, 3.

1.3. 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18.

Si el volumen de la muestra es grande, los elementos de ésta se reúnen en grupos (órdenes), representando los resultados de las pruebas en forma de una *serie estadística agrupada*. Para esto el intervalo que contiene todos los elementos de la muestra se parte en k intervalos disjuntos parciales. Los cálculos se simplifican considerablemente si los intervalos parciales tienen igual longitud $b \approx \frac{w}{k}$. En toda la exposición ulterior examinemos precisamente este caso. Una vez escogidos los intervalos parciales, se determinan las frecuencias, o sea, la cantidad n_i^* de los elementos de la muestra que han ido a parar en

el i-ésimo intervalo (el elemento que coincide con la cota superior del intervalo pertenece al intervalo sucesivo). La serie estadística obtenida contiene en la fila superior las mitades x_i^* de los intervalos de la agrupación y en la fila inferior, las frecuencias n_i^*.

En dependencia del volumen de la muestra, el número de intervalos de la agrupación k se toma de 6 a 20. Junto con las frecuencias se calculan simultáneamente también *las frecuencias acumulativas* $\sum_{j=1}^{i} n_j^*$, *las frecuencias relativas* n_i^*/n y *las frecuencias relativas acumulativas* $\sum_{j=1}^{i} n_j^*/n$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Los resultados obtenidos se colocan en la tabla llamada *tabla de frecuencias de la muestra agrupada.*

Hay que tener presente que la agrupación de la muestra introduce un error en los cálculos ulteriores el cual crece con la disminución del número de intervalos.

EJEMPLO 2. Representar una muestra de 55 observaciones en forma de una tabla de frecuencias, utilizando 7 intervalos de la agrupación. Muestra:

17 19 23 18 21 15 16 13 20 18 15
20 14 20 16 14 20 19 15 19 16 19
15 22 21 12 10 21 18 14 14 17 16
13 19 18 20 24 16 20 19 17 18 18
21 17 19 17 13 17 11 18 19 19 17

◀ El recorrido de la muestra $w = 24 - 10 = 14$. La longitud del intervalo $b = 14/7 = 2$. Los resultados de la agrupación se dan en la tabla 1.1.

Tabla 1.1

Número del intervalo i	Cotas del intervalo	Centro del intervalo x_i^*	Frecuencia n_i^*	Frecuencia acumulativa $\sum_{j=1}^{i} n_j^*$	Frecuencia relativa n_i^*/n	Frecuencia relativa acumulativa $\sum_{j=1}^{i} n_j^*/n$
1	10 ... 12	11	2	2	0,0364	0,0364
2	12 ... 14	13	4	6	0,0727	0,1091
3	14 ... 16	15	8	14	0,1455	0,2546
4	16 ... 18	17	12	26	0,2182	0,4728
5	18 ... 20	19	16	42	0,2909	0,7637
6	20 ... 22	21	10	52	0,1818	0,9455
7	22 ... 24	23	3	55	0,0545	1,0000

▶

En los problemas 1.4 y 1.5 hallar el recorrido de la muestra, el número y longitud de los intervalos, así como componer la tabla de frecuencias (las cotas del primer intervalo se indican).

1.4. El tiempo de resolución de un problema de control por los alumnos de 4° grado (en segundos):

38 60 41 51 33 42 45 21 53 60
68 52 47 46 49 49 14 57 54 59
77 47 28 48 58 32 42 58 61 30
61 35 47 72 41 45 44 55 30 40
67 65 39 48 43 60 54 42 59 50

El primer intervalo: de 14 a 23.

1.5. La duración de funcionamiento de los tubos electrónicos de un mismo tipo (en horas):

13,4 14,7 15,2 15,1 13,0 8,8 14,0 17,9 15,1 16,5 16,6
14,2 16,3 14,6 11,7 16,4 15,1 17,6 14,1 18,8 11,6 13,9
18,0 12,4 17,2 14,5 16,3 13,7 15,5 16,2 8,4 14,7 15,4
11,3 10,7 16,9 15,8 16,1 12,3 14,0 17,7 14,7 16,2 17,1
10,1 15,8 18,3 17,5 12,7 20,7 13,5 14,0 15,7 21,9 14,3
17,7 15,4 10,9 18,2 17,3 15,2 16,7 17,3 12,1 19,2

El primer intervalo: de 8,4 a 10,4.

2. Representación gráfica de una muestra. Se llama *polígono de frecuencias* de una muestra agrupada la quebrada que tiene por vértices los puntos (x_i^*, n_i^*), $i = 1, 2, \ldots, k$. El histograma de frecuencias de una muestra agrupada se determina del modo siguiente. En cada intervalo de la agrupación construimos los rectángulos cuyas áreas son iguales a las frecuencias correspondientes n_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k$. En el caso en que las longitudes de los intervalos de la agrupación son iguales y valen b, las alturas de los rectángulos valen $h_i = \frac{n_i^*}{b}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. El area de la figura escalonada constituida por los rectángulos es igual al volumen de la muestra. La quebrada escalonada que limita superiormente la figura construida se llama *histograma de frecuencias.*

Análogamente se construyen el *polígono* y el *histograma de frecuencias relativas* de una muestra agrupada. El área de la figura escalonada limitada superiormente por el histograma de frecuencias relativas es igual a la unidad.

Se llama *polígono de frecuencias acumulativas* de una muestra agrupada la quebrada que tiene por vértices los puntos $\left(x_i^* + \frac{b}{2}, \sum_{j=1}^{i} n_j^*\right)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Análogamente, el *polígono de las frecuencias relativas acumulativas (curva acumulativa)* es la quebrada que tiene por vértices los puntos $\left(x_i^* + \frac{b}{2}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*\right)$. Las representaciones gráficas mencionadas se definen de un modo análogo si se trata también de una muestra no agrupada.

Sea $p \in [0, 1]$. Llámase *cuantil muestral de orden p* la abscisa x_p del punto que se halla sobre la curva acumulativa y tiene la ordenada p. El orden del cuantil p determina la porción del número total de observaciones en la muestra los resultados de las cuales no exceden x_p. Los valores del orden se dan a menudo en tanto por ciento.

EJEMPLO 3. Construir el polígono y el histograma de frecuencias, así como el polígono de frecuencias relativas acumulativas de la muestra agrupada que hemos representado en el ejemplo 2. Determinar los cuantiles $x_{0,25}$ y $x_{0,5}$.

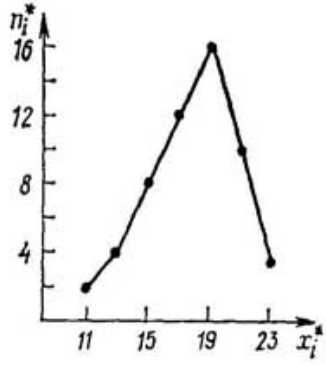


Fig. 166

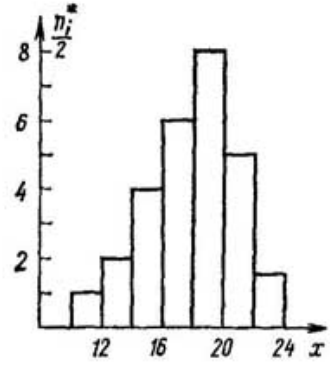


Fig. 167

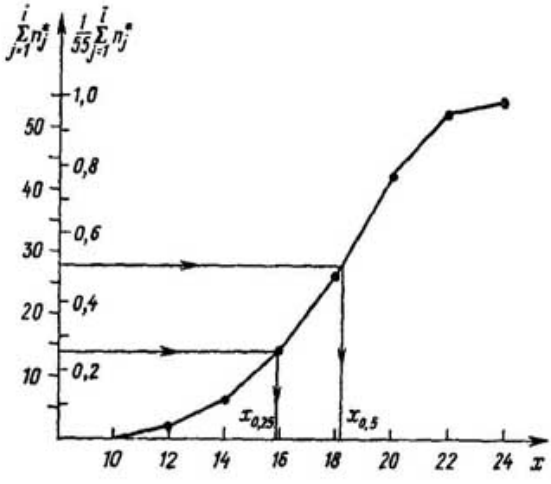


Fig. 168

◀ Basándose en los resultados de la agrupación (véase la tabla 1.1), construimos el polígono de frecuencias (fig. 166), el histograma de frecuencias (fig. 167) y el polígono de frecuencias relativas acumulativas (curva acumulativa) (fig. 168). Con ayuda de la curva acumulativa determinamos los cuantiles. Como resultado obtenemos $x_{0,25} \approx \approx 15{,}9$, $x_{0,5} \approx 18{,}2$. ▶

La *función empírica de distribución* $F^*(x)$ se define según los valores de las frecuencias relativas acumulativas por la relación

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}.$$

Es evidente que $F^*(x) = 0$ cuando $x \leqslant x^{(1)}$ y $F^*(x) = 1$ cuando $x > x^{(n)}$. En el intervalo $(x^{(1)}, x^{(n)}]$ $F^*(x)$ es una función constante a trozos no decreciente.

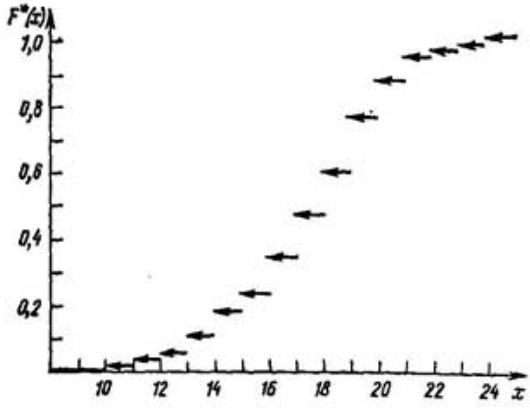


Fig. 169

EJEMPLO 4. Construir los gráficos de las funciones empíricas de distribución, basándose en las muestras iniciales y agrupadas del ejemplo 2.

◀ Escribamos los datos iniciales en forma de la serie estadística

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n_i	1	1	1	3	4	3	6	7	7	9	6	4	1	1	1

Puesto que $x^{(1)} = 10$ y $x^{(55)} = 24$, $F^*(x) = 0$ cuando $x \leqslant 10$ y $F^*(x) = 1$ cuando $x > 24$. En el semiintervalo (10, 24] construimos la función empírica de distribución $F^*(x)$, haciendo uso de la serie estadística. Como resultado obtenemos el gráfico de $F^*(x)$, representado en la fig. 169.

Análogamente se construye el gráfico de $F^*(x)$ (véase la fig. 170), basándose en los datos de la tabla 1.1. En este caso $F^*(x)$ tiene saltos en los puntos que corresponden a las mitades de los intervalos de la agrupación. ▶

En los problemas 1.6 y 1.7 es necesario construir los polígonos de frecuencias y de frecuencias acumulativas para

las muestras representadas por las series estadísticas.

1.6.

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	5	4	2

1.7.

x_i	2	3	4	5	6	7	8
n_i	1	3	4	6	5	2	1

1.8. Construir el gráfico de la función empírica de distribución, basándose en los datos del problema 1.6.

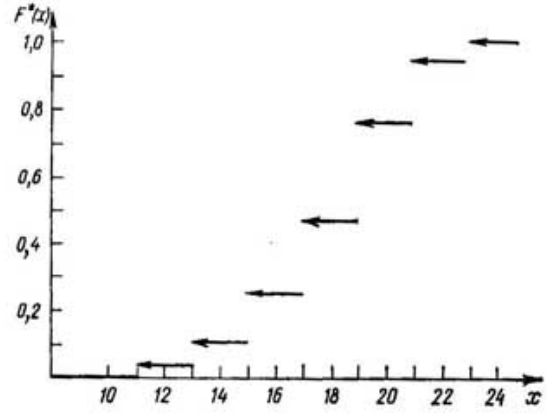


Fig. 170

1.9. Construir el gráfico de la función empírica de distribución, basándose en los datos del problema 1.7.

En los problemas 1.10—1.13 es necesario construir los histogramas de frecuencias, los polígonos de frecuencias acumulativas relativas y determinar los cuantiles de orden indicado p para las muestras agrupadas.

1.10.

Cotas de los intervalos	10 ... 20	20 ... 30	30 ... 40	40 ... 50	50 ... 60	60 ... 70	70 ... 80
Frecuencia	1	2	7	18	12	8	2

$p=0{,}25$

1.11.

Cotas de los intervalos	85 ... 105	105 ... 125	125 ... 145	145 ... 165	165 ... 185	185 ... 205	205 ... 225
Frecuencias	2	6	14	20	18	4	2

$p = 0{,}80$

1.12.

Cotas de los intervalos	18 ... 20	20 ... 22	22 ... 24	24 ... 26	26 ... 28	28 ... 30	30 ... 32	32 ... 34
Frecuencias	4	3	3	2	4	7	12	5

$p = 0{,}75$

1.13.

Cotas de los intervalos	60 ... 64	64 ... 68	68 ... 72	72 ... 76	76 ... 80	80 ... 84
Frecuencias	1	2	14	20	10	3

$p = 0{,}3$

1.14. Construir el gráfico de la función empírica de distribución, basándose en la muestra del problema 1.10.

1.15. Construir el gráfico de la función empírica de distribución, basándose en la muestra del problema 1.12.

1.16. Las mediciones de la capacidad electrodo de cierre — electrodo de trenaje de 80 transistores a efecto de campo dieron los resultados siguientes:

1,9	3,1	1,3	0,7	3,2	1,1	2,9	2,7	2,7	4,0
1,7	3,2	0,9	0,8	3,1	1,2	2,6	1,9	2,3	3,2
4,1	1,3	2,4	4,5	2,5	0,9	1,4	1,6	2,2	3,1
1,5	1,1	2,3	4,3	2,1	0,7	1,2	1,5	1,8	2,9
0,8	0,9	1,7	4,1	4,3	2,6	0,9	0,8	1,2	2,1
3,2	2,9	1,1	3,2	4,5	2,1	3,1	5,1	1,1	1,9
0,9	3,1	0,9	3,1	3,3	2,8	2,5	4,0	4,3	1,1
2,1	3,8	4,6	3,8	2,3	3,9	2,4	4,1	4,2	0,9

Construir el histograma y el polígono de frecuencias relativas acumulativas según esta muestra, al haber realizado previamente la agrupación. En calidad de longitud del intervalo tomar los valores siguientes: a) $b = 0{,}3$; b) $b = 0{,}6$; c) $b = 1{,}2$.

1.17. Utilizando los resultados del problema 1.16, determinar el cuantil de orden 0,75.

1.18*. Utilizando la tabla de números aleatorios (tabla S12) y la tabla de la función $\Phi(x)$ (tabla S1) obtener la muestra de volumen 50 de la población madre con la distribución normal $N(0, 1)$. Una vez realizada la agrupación de los datos, construir el histograma, el polígono de frecuencias y el polígono de frecuencias relativas acumulativas. Hallar los cuantiles $x_{0,25}$, $x_{0,5}$, $x_{0,75}$ y compararlos con los valores teóricos.

1.19*. Resolver el problema 1.18 para la muestra de la población madre con la distribución normal $N(10, 2)$.

3. Estimaciones numéricas de los parámetros de distribución. La distribución de una variable aleatoria X se caracteriza por varios *parámetros*. Entre ellos figuran también las características numéricas: la esperanza matemática (media), la varianza, la moda, la mediana y otras. Estos parámetros se llaman *parámetros de la población madre*. Pueden ser determinados con ayuda de la ley de distribución de la variable aleatoria (véase el cap. 14, § 2). Utilizando una muestra de observaciones de la variable aleatoria, podemos calcular los valores aproximados de cada uno de los parámetros que se denominan en la estadística *estimaciones numéricas de los parámetros* o simplemente *estimaciones*.

Las estimaciones de los parámetros de distribución son los valores de ciertas funciones de los elementos de la muestra, o sea, de las *estadísticas*. La elección de las estadísticas convenientes para calcular las estimaciones de unos u otros parámetros, así como las propiedades de estas estadísticas, se examinan en el § 2.

A continuación estudiamos las estadísticas que se utilizan para obtener las estimaciones de las características numéricas de distribución. Siempre que esto no dé lugar a equivocaciones, la estimación del parámetro se llama simplemente *parámetro*. La estimación del parámetro suele designarse con un símbolo provisto de tilde ($\sim$) por arriba. Por ejemplo, la estimación del momento central de tercer orden μ_3 se designa $\tilde{\mu}_3$. En la estadística varias estimaciones tienen designaciones tradicionales (por ejemplo, $\tilde{x}$ es la estimación de la esperanza matemática (media muestral), s^2 es la estimación de la varianza).

Se llama *media muestral* $\bar{x}$ la media aritmética de los elementos de una muestra:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1)$$

Para una muestra agrupada la relación (1) toma la forma

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^* x_i^*. \qquad (2)$$

El elemento más frecuente de la muestra $\tilde{d}_X$ es la *estimación de la moda* d_X. Para una muestra agrupada, en el caso en que las longitudes de todos los intervalos de la agrupación son las mismas y son iguales a b, la estimación de la moda se calcula por la fórmula

$$\tilde{d}_X=a_d+b\left(\frac{n_d^*-n_{d-1}^*}{2n_d^*-n_{d-1}^*-n_{d+1}^*}\right), \qquad (3)$$

donde a_d es la cota inferior del intervalo que contiene el número máximo de elementos de la muestra; n_d^*, el número de elementos de la muestra en este intervalo; n_{d-1}^*, n_{d+1}^*, el número de elementos en los intervalos vecinos.

Se llama *estimación de la mediana* h_X el número $\tilde{h}_X$ que divide la serie variacional en dos partes que contienen un número igual de elementos. Si el volumen de la muestra n es un número impar (o sea, $n = 2k + 1$), entonces $\tilde{h}_X = x^{(k+1)}$, o sea, es un elemento de la serie variacional que está provisto de número medio. Si $n = 2k$, entonces $\tilde{h}_X = \frac{1}{2}(x^{(k)} + x^{(k+1)})$. El cuantil muestral $x_{0,5}$ (véase el p. 2) es la estimación de la mediana en la muestra agrupada. La estimación de la mediana en una muestra agrupada (si longitud de los intervalos de la agrupación es igual a b) puede ser calculada también con ayuda de la fórmula

$$\tilde{h}_X=a_h+b\left[\frac{n/2-(n_1^*+n_2^*+\ldots+n_{h-1}^*)}{n_h^*}\right], \qquad (4)$$

donde a_h es la cota inferior del intervalo al cual pertenece la mediana; n_h^*, el número de elementos de la muestra en este intervalo; $(n_1^* + n_2^* + \ldots + n_{h-1}^*)$, el número de elementos de la muestra en los intervalos que se hallan a la izquierda del intervalo que contiene la mediana.

EJEMPLO 5. Determinar la media, la moda y la mediana para la muestra 5, 6, 8, 2, 3, 1, 1, 4.

◀ Representemos los datos en forma de la serie variacional: 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. La media muestral $\bar{x} = \frac{1}{8}(1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8) = 3{,}75$. Todos los elementos entran en la muestra una vez, a excepción de 1, por lo tanto, la moda $\tilde{d}_X = 1$. Puesto que $n = 8$, la mediana $\tilde{h}_X = \frac{1}{2}(3 + 4) = 3{,}5$. ▶

EJEMPLO 6. Hallar la media, la moda y la mediana para la muestra agrupada

Cotas de los intervalos	34 ... 36	36 ... 38	38 ... 40	40 ... 42	42 ... 44	44 ... 46
Frecuencias	2	3	30	40	20	5

◀ El volumen de la muestra $n = 100$. Con ayuda de la fórmula (2) encontramos

$$\bar{x} = \frac{1}{100}(2 \cdot 35 + 3 \cdot 37 + 30 \cdot 39 + 40 \cdot 41 + 20 \cdot 43 + 5 \cdot 45) = 40{,}76.$$

Para calcular la estimación de la moda encontramos la cota inferior del intervalo que contiene el número máximo de elementos, $a_d = 40$. Determinamos el número de elementos en este intervalo y en los intervalos vecinos de éste: $n_d^* = 40$, $n_{d-1}^* = 30$, $n_{d+1}^* = 20$. La longitud del intervalo $b = 2$. Con ayuda de la fórmula (3) encontramos

$$\tilde{d}_X = 40 + \left(\frac{40-30}{2 \cdot 40 - 30 - 20}\right) \cdot 2 \approx 40{,}\underline{6}7.$$

Para calcular la estimación de la mediana determinamos el intervalo que contiene la mediana: la mediana pertenece al cuarto intervalo, ya que los primeros tres intervalos contienen $2 + 3 + 30 = 35$ elementos de la muestra y los primeros cuatro intervalos $2 + 3 + 30 + 40 = 75$ elementos de la muestra lo que es mayor que la mitad del volumen de ésta ($n = 100$). La cota inferior de este intervalo $a_h = 40$, el número de elementos $n_h^* = 40$, $(n_1^* + n_2^* + \ldots + n_{h-1}^*) = 2 + 3 + 30 = 35$. Valiéndonos de la fórmula (4), hallamos

$$\tilde{h}_X = 40 + \left(\frac{100/2 - 35}{40}\right) \cdot 2 = 40{,}75. \blacktriangleright$$

Calcular la media, la moda y la mediana de las muestras siguientes:

1.20. 7, 3, 3, 6, 4, 5, 1, 2, 1, 3.

1.21. 3,1; 3,0; 1,5; 1,8; 2,5; 3,1; 2,4; 2,8; 1,3.

1.22. a) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 9; b) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 12.

Comparar las estimaciones de los parámetros de las muestras a) y b).

En los problemas 1.23—1.25 determinar la media, la moda y la mediana de las muestras agrupadas.

1.23.

Cotas de los intervalos	5 ... 7	7 ... 9	9 ... 11	11 ... 13	13 ... 15	15 ... 17
Frecuencias	8	14	40	26	6	4

1.24.

Cotas de los intervalos	10 ... 14	14 ... 18	18 ... 22	22 ... 26	26 ... 30	30 ... 34
Frecuencias	1	5	10	20	18	3

1.25.

Cotas de los intervalos	2 ... 4	4 ... 6	6 ... 8	8 ... 10	10 ... 12	12 ... 14
Frecuencias	10	20	10	8	4	1

1.26. Demostrar la siguiente propiedad de la media muestral:

a) $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$;

b)* $\sum (x_i - \bar{x})^2 < \sum (x_i - a)^2$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a \neq \bar{x}$.

Supongamos que la muestra inicial se distorsiona del modo siguiente: cada elemento de la muestra se sustituye por la estimación de la moda, de la mediana o de la media. En los problemas 1.27—1.29 se examinan los errores que aparecen a tal distorsión.

1.27. Demostrar que la sustitución de cada elemento de la muestra por la estimación de la moda minimiza el número de los errores.

1.28.** Demostrar que la sustitución de cada elemento de la muestra por la estimación de la mediana minimiza la suma de los valores absolutos de los errores.

1.29*. Demostrar que la sustitución de cada elemento de la muestra por la media muestral minimiza la suma de los cuadrados de errores.

1.30. ¿Cómo variarán la media, la moda y la mediana de la muestra si cada término de la muestra:

a) aumenta (disminuye) en el número d:

b) aumenta (disminuye) k veces?

1.31. Cinco amigos habitan en los lugares situados en una carretera (fig. 171). ¿Cuál de estos puntos deben elegir

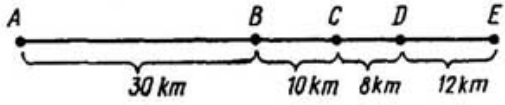


Fig. 171

para un encuentro de modo que el gasto total de dinero para el viaje sea mínimo? Se supone que el costo del viaje es proporcional al recorrido.

La dispersión de la distribución respecto a la media se determina por la *varianza* cuya estimación s^2 puede ser calculada con ayuda de la fórmula

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2-\bar{n}x^2\right)=$$

$$=\frac{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}{n(n-1)}. \qquad (5)$$

Si la media de la población madre m es conocida, entonces la estimación de la varianza s_0^2 se calcula haciendo uso de la fórmula

$$s_0^2=\frac{1}{n}\sum (x_i-m)^2. \qquad (6)$$

Para calcular la estimación de la varianza de una muestra agrupada se utilizan las fórmulas

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum n_i^*(x_i^*-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum n_i^*x_i^{*2}-\bar{n}x^2\right)=$$

$$=\frac{n\sum n_i^*x_i^{*2}-\left(\sum n_i^*x_i^*\right)^2}{n(n-1)}, \qquad (7)$$

$$s_0^2=\frac{1}{n}\sum n_i^*(x_i^*-m)^2. \qquad (8)$$

Es cómodo utilizar las primeras dos expresiones en las fórmulas (5) y (7) si los datos contienen poca cantidad de signos, así como para los cómputos con ayuda de un ordenador.

EJEMPLO 7. Calcular la varianza para la muestra de volumen $n = 10$: 3, 7, 7, 0, 2, 1, 2, 3, 5, 4 a condición de que la muestra esté obtenida: a) a partir de una población madre con la media desconocida; b) a partir de una población madre cuya media conocida $m = 3{,}5$.

◀ Previamente encontramos

$$\sum x_i = 34, \quad \sum x_i^2 = 166, \quad \bar{x} = \frac{34}{10} = 3{,}4.$$

En el caso a), con ayuda de la fórmula (5) obtenemos

$$s^2 = \frac{1}{10-1}(163 - 10 \cdot 3{,}4^2) = 5{,}6.$$

En el caso b), puesto que la media de la población madre es conocida, la varianza se calcula haciendo uso de la fórmula (6):

$$s_0^2 = \frac{1}{10}(166 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 34 + 10 \cdot 3{,}5^2) = 5{,}05. \blacktriangleright$$

Para simplificar los cálculos de la media y de la varianza de una muestra agrupada los datos de esta última se transforman del modo siguiente:

$$u_i = \frac{x_i^* - \widetilde{d}_X}{b}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{9}$$

donde $\widetilde{d}_X$ es el valor más frecuente de x_i^*; b, la longitud del intervalo de la agrupación. La media $\bar{x}$ y la varianza s_x^2 de los datos iniciales están ligadas con la media $\bar{u}$ y la varianza s_u^2 de los datos transformados por las fórmulas siguientes:

$$\bar{x} = b\bar{u} + \widetilde{d}_X, \tag{10}$$

$$s_x^2 = b^2 s_u^2. \tag{11}$$

EJEMPLO 8. Calcular la media y la varianza de la muestra agrupada:

Cotas de los intervalos	134 ... 138	138 ... 142	142 ... 146	146 ... 150	150 ... 154	154 ... 158
Frecuencias	1	3	15	18	14	2

◀ La longitud del intervalo de la agrupación es $b = 4$, el valor del punto medio del intervalo más frecuente es $\widetilde{d}_X = 148$. Ahora bien, la transformación de la sucesión de los puntos medios de los intervalos se realiza con ayuda de la fórmula (9):

$$u_i = \frac{x_i^* - 148}{4} \quad i = 1, 2, \ldots, 6.$$

Es cómodo efectuar los cálculos haciendo uso de la tabla (véase la tabla 1.2).

Tabla 1.2

i	x_i^*	u_i	n_i^*	$n_i^* u_i$	$n_i^* u_i^2$	$n_i^* (u_i + 1)^2$
1	136	−3	1	−3	9	4
2	140	−2	3	−6	12	3
3	144	−1	15	−15	15	0
4	148	0	18	0	0	18
5	152	1	14	14	14	56
6	156	2	2	4	8	18
$\sum$	—	—	53	−6	58	99

La última columna de la tabla 1.2 sirve para controlar los cálculos con ayuda de la identidad

$$\sum n_i^* (u_i+1)^2 \equiv \sum n_i^* u_i^2 + 2 \sum n_i^* u_i + \sum n_i^*.$$

Sustituyendo en la identidad los datos de la última fila de la tabla 1.2, obtenemos

$$58 + 2 \cdot (-6) + 53 = 99.$$

Por consiguiente, los cálculos han sido efectuados correctamente. Haciendo uso de las fórmulas (2) y (7), encontramos

$$\bar{u} = \frac{-6}{53} \approx -0{,}113,$$

$$s_u^2 = \frac{53 \cdot 58 - (-6)^2}{53 \cdot (53-1)} \approx 1{,}102.$$

Con ayuda de las fórmulas (10) y (11) calculamos finalmente

$$\bar{x} \approx (-0{,}113) \cdot 4 + 148 \approx 147{,}548,$$

$$s_x^2 \approx 4^2 \cdot 1{,}102 \approx 17{,}632. \blacktriangleright$$

1.32. Calcular la varianza de la muestra

8, 5, 7, 8, 3, 7, 5, 3, 2, 6

si: a) se desconoce la media de la población madre; b) la media de la población madre es conocida e igual a $m = 5.5$.

1.33. a) Demostrar la equivalencia de las relaciones (5) que definen la estimación de la varianza.

b) Demostrar la equivalencia de las relaciones (7) que definen la estimación de la varianza de una muestra agrupada.

1.34. Determinar, cómo variará la varianza de la muestra si cada término de la misma:

a) aumenta (disminuye) en el número d;

b) aumenta (disminuye) k veces.

En los problemas 1.35 y 1.36 calcular la media y la varianza de las muestras agrupadas.

1.35.

Cotas de los intervalos	1 ... 3	3 ... 5	5 ... 7	7 ... 9	9 ... 11	11 ... 13
Frecuencias	1	2	4	2	1	1

1.36.

Cotas de los intervalos	0 ... 4	4 ... 8	8 ... 12	12 ... 16	16 ... 20	20 ... 24
Frecuencias	1	1	3	2	1	1

1.37. Demostrar la equivalencia de las relaciones (10) y (11).

Para las muestras indicadas en los problemas 1,38—1.40 cumplir las tareas siguientes:

1) calcular la media y la varianza después de haber realizado previamente la agrupación de la muestra con la longitud dada del intervalo; para simplificar los cálculos es necesario transformar los datos con ayuda de la fórmula (9);

2) calcular la media y la varianza de la muestra no agrupada, utilizando los valores dados.

Comparar los resultados de los cálculos.

1.38. En una partida de piezas las desviaciones positivas respecto a la dimensión nominal son las siguientes (en mm):

17 21 8 20 23 18 22 20 17 12
20 11 9 19 20 9 19 17 21 13
17 22 22 10 20 20 15 19 20 20
13 21 21 9 14 11 19 18 23 19

$n = 40,\ b = 2,\ \sum x_i = 689,\ \sum x_i^2 = 12635.$

1.39. El tiempo de regeneración de los diodos de una partida es el siguiente (en nanosegundos):

69 73 70 68 61 73 70 72 67 70
66 70 76 68 71 71 68 70 64 65
72 70 70 69 66 70 77 69 71 74
72 72 72 68 70 67 71 67 72 69
66 75 76 69 71 67 70 73 71 74

$$n = 50,\ b = 3,\ \sum x_i = 3492,\ \sum x_i^2 = 244\,342.$$

1.40. El tiempo de una reacción (en segundos) es el siguiente:

8,5 7,1 6,7 6,2 2,9 4,4 6,0 5,8 5,4
8,2 6,9 6,5 6,1 3,8 6,0 6,0 5,6 5,3
7,7 6,8 6,5 6,1 4,2 4,7 5,6 5,4 5,3
7,4 6,7 6,4 6,1 4,5 6,0 5,8 5,6 5,1

$$n = 36,\ b = 1,\ \sum x_i = 213{,}8,\ \sum x_i^2 = 1316{,}82.$$

1.41. Calcular y comparar los valores de la media, la moda, la mediana y la varianza para las muestras inicial y agrupada del ejemplo 2. Para el cálculo utilizar los valores de $\sum x_i = 957$ y $\sum x_i^2 = 17129$ encontrados para la muestra inicial.

Supongamos que a partir de una población madre se obtienen dos muestras cuyos volúmenes son iguales a n_1 y n_2, respectivamente. La media y la varianza de la muestra asociada de volumen $n_1 + n_2$ se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}, \tag{12}$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\,s_1^2 + (n_2 - 1)\,s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \tag{13}$$

donde $\bar{x}_i$ y s_i^2 son la media y la varianza de la muestra de volumen n_i, $i = 1, 2$.

EJEMPLO 9. Para determinar el contenido de agua (en tanto por ciento) en cierto producto a partir de un gran lote, de éste se toma una muestra de volumen $n_1 = 25$. La media y la varianza de la muestra son $\bar{x}_1 = 7{,}2$ y $s_1^2 = 1{,}85$, respectivamente. Para precisar estos resultados se toma del mismo lote una muestra más de volumen $n_2 = 12$; en este caso resulta que $\bar{x}_2 = 7{,}5$ y $s_2^2 = 1{,}15$. Hallar los valores de la media y de la varianza para la muestra asociada.

◀ Utilizando las fórmulas (12) y (13), obtenemos

$$\bar{x}=\frac{7{,}2\cdot 25+12\cdot 7{,}5}{25+12}\approx 7{,}3,$$

$$s^2=\frac{(25-1)\cdot 1{,}85+(12-1)\cdot 1{,}15}{25+12-2}\approx 1{,}63.\ \blacktriangleright$$

1.42. Calcular las medias y las varianzas de las muestras siguientes:

a) 2, 2, 2, 2,
b) 5, 5, 5, 5, 5;
c) 2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5, 5.

Comparar los resultados obtenidos. La muestra c) se ha obtenido asociando las muestras a) y b); ¿se puede o no para el cálculo de la varianza de la muestra c) utilizar la fórmula (13)?

1.43.** Dos muestras de volúmenes n_1 y n_2 se obtienen a partir de diferentes poblaciones madre. Sean $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, s_1^2 y s_2^2 las medias y las varianzas de estas muestras. Examinemos la muestra de volumen n_1+n_2 obtenida por medio de la asociación de estas dos muestras. Designemos con $\bar{x}$ y s^2 la media y la varianza de la muestra asociada. Mostrar que

$$\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2},$$

$$s^2=\frac{(n_1-1)\,s_1^2+(n_2-1)\,s_2^2+n_1\,(\bar{x}_1-\bar{x})^2+n_2\,(\bar{x}_2-\bar{x})^2}{n_1+n_2-1}.$$

1.44. La muestra A tiene los parámetros

$$n_A=10,\ \bar{x}_A=3,\ s_A^2=2.$$

La muestra B tiene los parámetros

$$n_B=15,\ \bar{x}_B=2,\ s_B^2=3.$$

Utilizando las fórmulas del problema 1.43, calcular la media y la varianza de la muestra C obtenida por la asociación de las muestras A y B.

Las estimaciones de los momentos iniciales y centrales de l-ésimo orden, $l=1, 2, \ldots$, se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\tilde{\alpha}_l=\frac{1}{n}\sum x_i^l,\quad \tilde{\mu}_l=\frac{1}{n}\sum (x_i-\bar{x})^l. \qquad (14)$$

Si se trata de una muestra agrupada, las estimaciones de los momentos se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\tilde{\alpha}_l=\frac{1}{n}\sum n_i^* x_i^{*l},\quad \tilde{\mu}_l=\frac{1}{n}\sum n_i^*(x_i^*-\bar{x})^l. \tag{15}$$

Es cómodo determinar los momentos centrales con ayuda de los iniciales, utilizando las siguientes relaciones:

$$\mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2,$$
$$\mu_3=\alpha_3-3\alpha_2\alpha_1+2\alpha_1^3,$$
$$\mu_4=\alpha_4-4\alpha_3\alpha_1+6\alpha_2\alpha_1^2-3\alpha_1^4.$$

La forma de distribución de una variable aleatoria X se caracteriza por los coeficientes de asimetría y de exceso cuyas estimaciones se hallan con ayuda de las fórmulas

$$\tilde{a}_X=\frac{\tilde{\mu}_3}{s^3}, \tag{16}$$

$$\tilde{e}_X=\frac{\tilde{\mu}_4}{s^4}-3. \tag{17}$$

El cálculo de las estimaciones para los coeficientes de asimetría y de exceso referentes a una muestra agrupada se simplifican considerablemente si los datos se transforman previamente haciendo uso de la fórmula (9). En este caso se utilizan las fórmulas siguientes:

$$\tilde{a}_X=\frac{1}{s_u^3}\left[\frac{\sum n_i^* u_i^3}{n}-3\,\frac{\sum n_i^* u_i^2}{n}\,\frac{\sum n_i^* u_i}{n}+2\left(\frac{\sum n_i^* u_i}{n}\right)^3\right], \tag{18}$$

$$\tilde{e}_X=\frac{1}{s_u^4}\left[\frac{\sum n_i^* u_i^4}{n}-4\,\frac{\sum n_i^* u_i^3}{n}\,\frac{\sum n_i^* u_i}{n}+\right.$$
$$\left.+6\,\frac{\sum n_i^* u_i^2}{n}\left(\frac{\sum n_i^* u_i}{n}\right)^2-3\left(\frac{\sum n_i^* u_i}{n}\right)^4\right]-3. \tag{19}$$

Para controlar el cómputo de las sumas $\sum n_i^* u_i^l$, $l=1, 2, 3, 4$, se calculan por separado los primero y segundo miembros de la identidad

$$\sum n_i^*(u_i+1)^4\equiv\sum n_i^*+4\sum n_i^* u_i+6\sum n_i^* u_i^2+4\sum n_i^* u_i^3+\sum n_i^* u_i^4. \tag{20}$$

Los resultados de cálculos se presentan en forma de una tabla.

EJEMPLO 10. Calcular la media, la varianza, los coeficientes de asimetría y de exceso para la muestra agrupada siguiente:

Cotas de los intervalos	10 ... 12	12 ... 14	14 ... 16	16 ... 18	18 ... 20	20 ... 22	22 ... 24
Frecuencias	2	4	8	12	16	10	3

◀ La longitud del intervalo de la agrupación es $b = 2$. El valor x_i^* más frecuente es $\widetilde{d}_X = 19$. Por eso la transformación (9) tiene la forma

$$u_i = \frac{x_i^* - 19}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 7.$$

Representemos los cálculos en forma de la tabla 1.3.

Tabla 1.3

i	x_i^*	u_i	n_i^*	$n_i^* u_i$	u_i^2	$n_i^* u_i^2$	u_i^3	$n_i^* u_i^3$	u_i^4	$n_i^* u_i^4$	u_i+1	$(u_i+1)^4$	$n_i^*(u_i+1)^4$
1	11	−4	2	−8	16	32	−64	−128	256	512	−3	81	162
2	13	−3	4	−12	9	36	−27	−108	81	324	−2	16	64
3	15	−2	8	−16	4	32	−8	−64	16	128	−1	1	8
4	17	−1	12	−12	1	12	−1	−12	1	12	0	0	0
5	19	0	16	0	0	0	0	0	0	0	1	1	16
6	21	1	10	10	1	10	1	10	1	10	2	16	160
7	23	2	3	6	4	12	8	24	16	48	3	81	243
$\sum$	—	—	55	−32	—	134	—	−278	—	1034	—	—	653
$\sum \frac{n_i^* u_i^l}{n}$			—	−0,582	—	2,436	—	−5,054	—	18,8	—	—	—

El control de los cálculos, efectuado con ayuda de la identidad (20), ofrece

$$55 + 4\cdot(-32) + 6\cdot 134 + 4\cdot(-278) + 1034 = 653.$$

Por último, haciendo uso de las fórmulas (2), (7), (10), (11), (18) y (19), encontramos los parámetros de distribución

$$\bar{x} = 19 + 2\cdot\frac{-32}{55} \approx 17{,}8.$$

$$s_u^2 = \frac{134 - (-32)^2/55}{54} \approx 2{,}14, \quad s_u \approx 1{,}46, \quad s_X^2 \approx 2^2\cdot 2{,}14 \approx 8{,}56.$$

$$\bar{a}_X = \frac{1}{1{,}46^3}\left[-5{,}054 - 3\cdot(-0{,}582)\cdot 2{,}436 + 2\cdot(-0{,}582)^3\right] \approx -0{,}393.$$

$$\bar{e}_X = \frac{1}{1{,}46^4}\left[18{,}8 - 4\cdot(-0{,}582)\cdot(-5{,}054) + 6\cdot(-0{,}582)^2\cdot 2{,}436 - \right.$$

$$\left. - 3\cdot(-0{,}582)^4\right] - 3 \approx -0{,}303. \blacktriangleright$$

En los problemas 1.45—1.50 calcular la media, la varianza, los coeficientes de asimetría y de exceso para las muestras dadas, después de haber transformado éstas con ayuda de la fórmula (9).

1.45. La distribución de velocidad de los automóviles en uno de los tramos de la carretera es la siguiente (km/h):

Cotas de los intervalos	61 ... 65	65 ... 69	69 ... 73	73 ... 77	77 ... 81
Frecuencias	1	4	5	8	14

Cotas de los intervalos	81 ... 85	85 ... 89	89 ... 93	93 ... 97	97 ... 101
Frecuencias	9	6	1	1	1

1.46. El número total de puntos obtenidos en las competiciones es el siguiente:

Cotas de los intervalos	49 ... 52	52 ... 55	55 ... 58	58 ... 61	61 ... 64	64 ... 67	67 ... 70
Frecuencias	3	6	11	19	30	21	10

1.47. La distribución del límite de rotura de las muestras de la costura soldada es la siguiente (N/mm^2):

Cotas de los intervalos	28 ... 30	30 ... 32	32 ... 34	34 ... 36	36 ... 38	38 ... 40	40 ... 42	42 ... 44
Frecuencias	8	15	15	12	15	20	10	5

1.48. La distribución de desviación de la tensión con respecto a la nominal es la siguiente (mV):

Cotas de los intervalos	0,00 ... 0,02	0,02 ... 0,04	0,04 ... 0,06	0,06 ... 0,08
Frecuencias	9	15	29	35
Cotas de los intervalos	0,08 ... 0,10	0,10 ... 0,12	0,12 ... 0,14	0,14 ... 0,16
Frecuencias	32	19	8	3

1.49. El tiempo de ejecución de un ejercicio es el siguiente (s):

Cotas de los intervalos	8,55 ... 9,05	9,05 ... 9,15	9,15 ... 9,25	9,25 ... 9,35
Frecuencias	4	8	11	7
Cotas de los intervalos	9,35 ... 9,45	9,45 ... 9,55	9,55 ... 10,05	
Frecuencias	5	3	2	

1.50. La desviación horizontal respecto al blanco en 200 pruebas de los cohetes es la siguiente (m)

Cotas de los intervalos	—40 ... —30	—30 ... —20	—20 ... —10	—10 ... 0
Frecuencias	7	11	15	24

Cotas de los intervalos	0 ... 10	10 ... 20	20 ... 30	30 ... 40	40 ... 50	50 ... 60
Frecuencias	49	41	26	17	7	3

4. Descripción estadística y cálculo de características muestrales de una población madre bidimensional. Supongamos que el resultado del experimento $\mathfrak{E}$ se describe por dos variables aleatorias X e Y. La idea previa acerca de la dependencia entre X e Y se puede tener trazando los elementos de la muestra (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$, en forma de puntos sobre un plano con el sistema elegido de coordenadas. Tal representación de la muestra de una población madre bidimensional se llama *diagrama de dispersión.*

La distribución del vector aleatorio (X, Y) se describe por las características siguientes: por las esperanzas matemáticas m_X y m_Y de las variables aleatorias X e Y que determinan la posición del centro (m_X, m_Y) de distribución; por las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2 que determinan la dispersión de la distribución respecto al centro; por la covarianza (por el momento covariante)

$$k_{XY} = \mathbf{M}\,[(X - m_X)\,(Y - m_Y)]$$

y por el coeficiente de correlación

$$\rho = \frac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

La covarianza y el coeficiente de correlación determinan el grado de la dependencia lineal entre las variables aleatorias X e Y.

El cálculo de las características muestrales de distribución del vector aleatorio (X, Y) con ayuda de una muestra de *pequeño volumen* (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ se realiza cómodamente en la sucesión siguiente. Primeramente se calculan las sumas

$$\sum x_i, \quad \sum y_i, \quad \sum x_i^2, \quad \sum y_i^2, \quad \sum x_i y_i, \quad \sum (x_i + y_i)^2.$$

Para controlar el modo correcto de efectuar los cálculos se utiliza la identidad

$$\sum (x_i + y_i)^2 \equiv \sum x_i^2 + 2 \sum x_i y_i + \sum y_i^2. \tag{21}$$

Luego se calculan las sumas de los cuadrados de desviaciones respecto a la media y los productos de desviaciones respecto a las medias:

$$Q_x = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} \tag{22}$$

$$Q_y = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{\left(\sum y_i\right)^2}{n}, \tag{23}$$

$$Q_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n}. \tag{24}$$

La media, varianza, covarianza y el coeficiente de correlación muestrales se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}, \tag{25}$$

$$s_x^2=\frac{Q_x}{n-1}, \quad s_y^2=\frac{Q_y}{n-1}, \tag{26}$$

$$\tilde{k}_{xy}=\frac{Q_{xy}}{n-1}. \tag{27}$$

$$\tilde{\rho}_{xy}=r=\frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_xQ_y}}=\frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i-\bar{x})^2 \sum (y_i-\bar{y})^2}}. \tag{28}$$

EJEMPLO 11. Calcular las medias, las varianzas y el coeficiente de correlación para la muestra representada en la tabla 1.4. Construir el diagrama de dispersión

Tabla 1.4

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
8,35	3,50	10,50	6,00	11,35	9,50	12,15	6,00	12,85	9,50
8,74	1,49	10,75	2,50	11,50	6,00	12,25	8,05	13,15	9,02
9,25	6,40	10,76	5,74	11,50	9,00	12,35	5,01	13,25	6,49
9,50	4,50	11,00	8,50	11,62	8,50	12,50	7,03	13,26	10,50
9,75	5,00	11,00	5,26	11,75	10,00	12,76	7,53	13,40	7,51
10,24	7,00	11,25	8,00	12,00	9,00	12,85	6,01	13,50	10,00
13,65	9,50	14,50	10,00	13,75	8,51	14,75	12,00	14,00	11,00
15,25	12,50	14,23	8,40	16,00	11,50	14,26	10,00	16,00	13,00
14,51	9,50	16,25	12,00						

◀ El volumen de la muestra es $n = 42$. Calculemos previamente

$$\sum x_i=522{,}23, \quad \sum y_i=336{,}41, \quad \sum x_i^2=6652{,}25,$$

$$\sum y_i^2=2987{,}80 \quad \sum x_iy_i=4358{,}626.$$

Haciendo uso de las fórmulas (22) — (24), encontramos

$$Q_x=6652{,}25-\frac{522{,}23^2}{42}\approx 158{,}8182,$$

$$Q_y=2987{,}80-\frac{336{,}41^2}{42}\approx 292{,}5958,$$

$$Q_{xy}=4358{,}626-\frac{522{,}23\cdot 336{,}41}{42}\approx 175{,}1912.$$

Finalmente, con ayuda de las fórmulas (25), (26) y (28) obtenemos

$$\bar{x}=12{,}434, \qquad \bar{y}=8{,}011,$$

$$s_x^2=\frac{158{,}8182}{41}\approx 3{,}8736, \qquad s_y^2=\frac{292{,}5958}{41}\approx 7{,}1365,$$

$$r=\frac{175{,}1912}{\sqrt{158{,}8182\cdot 292{,}5958}}\approx 0{,}813.$$

El diagrama de varianza se muestra en la fig. 172. ▶

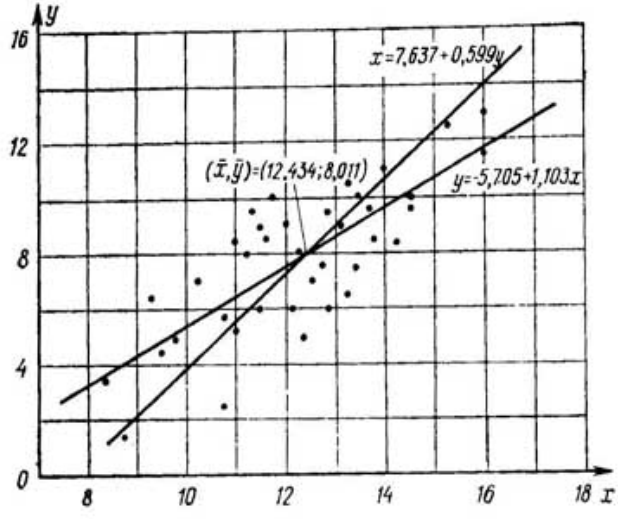


Fig. 172

1.51. Mostrar que para los elementos de la muestra del sistema de dos variables aleatorias se cumple la igualdad

$$\sum x_i (y_i-\bar{y})=\sum y_i (x_i-\bar{x}).$$

Calcular los coeficientes de correlación y construir los diagramas de varianza para las muestras siguientes:

1.52.

x	8	10	5	8	9
y	1	3	1	2	3

1.53.

x	9	10	12	5
y	6	4	7	3

1.54.

x	10	2	7	5
y	8	2	6	4

1.55. Mostrar la coincidencia de dos fórmulas (28) para el cálculo del coeficiente de correlación muestral r.

1.56*. Se conoce que para cierta muestra $s_x^2 = 16$, $s_y^2 = 9$. ¿Cuál es el valor máximo de la covarianza?

1.57. Supongamos que los elementos de una muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ se han sometido a la transformación lineal $u_i = ax_i + b$, $v_i = cy_i + d$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mostrar que la covarianza y el coeficiente de correlación muestrales están ligados por las relaciones

$$\tilde{k}_{uv} = ac\tilde{k}_{xy} \ (ac > 0),$$

$$r_{uv} = r_{xy}.$$

Utilizando una transformación lineal conveniente, calcular el coeficiente de correlación para las muestras siguientes.

1.58.

x	55	71	53	67	81	75	59	89	65	81
y	206	116	221	113	32	128	248	113	284	215

1.59.

x	65,8	68,3	72,7	66,1	73,1	71,8	73,1	66,5
y	166,0	115,2	157,8	152,5	149,3	181,0	173,2	120,4
x	69,3	73,4	67,3	73,6	67,9	69,7	69,7	
y	124,5	163,2	125,2	173,3	146,7	157,9	134,5	

Para dos variables aleatorias X e Y se llama *regresión* de Y en X la esperanza matemática condicional

$$\mathbf{M}[Y/X = x] = \varphi(x). \tag{29}$$

El gráfico de esta función se denomina *curva de regresión*. La función de regresión (29) puede ser utilizada para predecir el valor de la variable aleatoria Y a partir del valor fijo x de la variable aleatoria X.

Si $\mathbf{M}[Y/X = x] = \beta_0 + \beta_1 x$, se dice que tiene lugar la *regresión lineal* de Y en X. La recta $y = \beta_0 + \beta_1 x$ se llama *recta de regresión*.

Las estimaciones de los parámetros β_0 y β_1 de la regresión lineal para la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ se pueden obtener, utilizando

el método de cuadrados mínimos (véase el § 7, p. 1), partiendo de la condición de mínimo de la suma

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum [y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i]^2. \tag{30}$$

Estas estimaciones se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{Q_{xy}}{Q_x}; \tag{31}$$

$$\tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}. \tag{32}$$

Análogamente se examina la regresión de X en Y. Las estimaciones de los parámetros β_0' y β_1' de la regresión lineal $x = \beta_0' + \beta_1' y$ se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\tilde{\beta}_1' = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} = \frac{Q_{xy}}{Q_y}, \tag{33}$$

$$\tilde{\beta}_0' = \bar{x} - \tilde{\beta}_1' \bar{y}. \tag{34}$$

Para controlar el modo correcto de realizar los cálculos se utiliza la relación

$$\sqrt{\tilde{\beta}_1 \tilde{\beta}_1'} = |r|. \tag{35}$$

Los coeficientes $\tilde{\beta}_1$ y $\tilde{\beta}_1'$ pueden ser determinados también con ayuda de las fórmulas siguientes:

$$\tilde{\beta}_1 = r s_y / s_x, \tag{36}$$

$$\tilde{\beta}_1' = r s_x / s_y. \tag{37}$$

Las rectas

$$y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x, \tag{38}$$

$$x = \tilde{\beta}_0' + \tilde{\beta}_1' y \tag{39}$$

se intersecan en el punto que tiene las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ y el ángulo entre ellas disminuye al aumentar el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X e Y. Cuando $|\rho| = 1$, ambas rectas coinciden.

Si los elementos de la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ se transforman con ayuda de las fórmulas

$$x_i' = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x},$$

$$y_i' = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$$

las rectas de regresión (38) y (39) se determinan por las expresiones

$$y' = rx', \tag{40}$$

$$x' = ry'. \tag{41}$$

El análisis estadístico de la regresión lineal se examina en el § 7, p. 2.

EJEMPLO 12. Calcular las estimaciones de los parámetros de la regresión de X en Y y la de Y en X para la muestra del ejemplo 11 (tabla 1.4). Trazar las rectas de regresión en el diagrama de varianza.

◀ Hagamos uso de los resultados de cálculos hechos en el ejemplo 11. Con ayuda de las fórmulas (31) y (32) encontramos

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{175{,}1912}{158{,}8182} \approx 1{,}103,$$

$$\tilde{\beta}_0 = 8{,}011 - 1{,}103 \cdot 12{,}434 \approx -5{,}705.$$

Ahora bien, la recta de regresión de Y en X tiene la ecuación

$$y = -5{,}705 + 1{,}103x.$$

Análogamente, por las fórmulas (33) y (34) hallamos

$$\tilde{\beta}_1' = \frac{175{,}1912}{292{,}5958} \approx 0{,}599.$$

$$\tilde{\beta}_0' = 12{,}434 - 0{,}599 \cdot 8{,}011 \approx 7{,}637.$$

De aquí la recta de regresión de X en Y tiene la ecuación

$$x = 7{,}637 + 0{,}599y.$$

La verificación con la fórmula (35) arroja

$$\sqrt{1{,}103 \cdot 0{,}599} \approx 0{,}813,$$

lo que coincide con el valor de r calculado en el ejemplo 11. Las rectas de regresión están trazadas en el diagrama de dispersión de la fig. 172. ▶

En los problemas 1.60—1.62 calcular los coeficientes de correlación, determinar, basándose en los datos de la muestra, las rectas de regresiones de Y en X y de X en Y y trazarlas en el diagrama de varianza.

1.60.

x	8	10	5	8	9
y	1	3	1	2	3

1.61.

x	9	10	12	5
y	6	4	7	3

1.62.

x	10	2	7	5
y	8	2	6	4

1.63. La resistencia del acero a la flexión Y (N/mm^2) se evalúa basándose en la otra característica de éste, o sea, en el límite de elasticidad a la torsión X (N/mm^2). Valiéndose de los datos experimentales para 12 marcas de acero, hallar las ecuaciones de regresiones lineales de Y en X y de X en Y y calcular el coeficiente de correlación entre estas características. Los resultados de mediciones son los siguientes:

x	51	67	84	81	101	109	71	97	109	51	105	89
y	25	30	43	44	57	58	43	46	62	45	55	45

$$\sum x_i = 1015, \quad \sum y_i = 553, \quad \sum x_i^2 = 90\,667.$$

$$\sum y_i^2 = 26\,807, \quad \sum x_i y_i = 48\,888.$$

1.64. Haciendo uso de los datos de medición de dos variables

x	66	70	75	80	82	85	90	92	95	98
y	60	78	65	87	74	70	78	95	88	90

calcular el coeficiente de correlación y hallar la ecuación de regresión lineal de Y en X.

1.65. Obtener las fórmulas (31) y (32) para calcular los coeficientes $\tilde{\beta}_1$ y $\tilde{\beta}_0$ a partir de la condición de mínimo de la suma

$$\Sigma (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2.$$

1.66. Deducir la relación (35).

1.67. Demostrar la validez de las relaciones (36) y (37).

1.68. Los elementos de la muestra (x_i, y_i) se han transformado al igual que en el problema 1.57 ($ac > 0$). ¿Cómo variarán los parámetros $\tilde{\beta}_0$ y $\tilde{\beta}_1$ de la regresión lineal? En calidad de un caso particular obtener las relaciones (40) y (41).

Una muestra *de gran volumen* se representa en forma de *tabla de correlación*. Con este fin se agrupan las realizaciones de las variables aleatorias X e Y en los intervalos de longitud b_x y b_y y en las casillas de la tabla se apunta la cantidad de pares de la muestra inicial (o sea, las frecuencias) para cada combinación de intervalos. Esta operación puede también cumplirse directamente en el diagrama de varianza, trazando en éste la red de rectas horizontales y verticales tomadas con los pasos constantes b_x y b_y. Las observaciones que han ido a parar en los límites superior y derecho del rectángulo en cuestión se refieren a los rectángulos vecinos superior y derecho, respectivamente. En los cálculos ulteriores se utilizan los puntos medios de los intervalos y las frecuencias correspondientes. Designemos los puntos medios de los intervalos con x_i^*, $i = 1, 2, \ldots, k$, e y_j^*, $j = 1, 2, \ldots, l$ y las frecuencias respectivas con n_{ij}^*; es evidente que $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}^* = n$.

Suponemos que

$$\sum_{i=1}^{k} n_{ij}^* = n_{\cdot j}, \quad \sum_{j=1}^{l} n_{ij}^* = n_{i\cdot}.$$

Para simplificar los cálculos, en vez de los puntos medios de los intervalos x_i^* e y_j^* introduzcamos los números

$$u_i = \frac{x_i^* - \widetilde{d}_X}{b_x}, \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$v_j = \frac{y_j^* - \widetilde{d}_Y}{b_y}, \quad j = 1, 2, \ldots, l,$$

donde $\widetilde{d}_X$ y $\widetilde{d}_Y$ son los puntos medios de los intervalos más frecuentes.

Las estimaciones de los parámetros de distribución en la tabla de correlación se determinan en la sucesión siguiente. Primeramente se calculan las sumas $\sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} u_i$, $\sum_{j=1}^{l} n_{\cdot j} v_j$, $\sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} u_i^2$, $\sum_{j=1}^{l} n_{\cdot j} v_j^2$, $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}^* u_i v_j$. Luego se determinan las sumas siguientes:

$$Q_u = \sum n_{\cdot i} u_i^2 - \frac{\left(\sum n_{i\cdot} u_i\right)^2}{n}, \tag{42}$$

$$Q_v = \sum n_{\cdot j} v_j^2 - \frac{\left(\sum n_{\cdot j} v_j\right)^2}{n}, \tag{43}$$

$$Q_{uv} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} n_{ij}^* u_i v_j - \frac{\left(\sum n_{i\cdot} u_j\right)\left(\sum n_{\cdot j} v_j\right)}{n}. \tag{44}$$

La media, varianza y el coeficiente de correlación muestrales se encuentran con ayuda de las fórmulas

$$\bar{x}=b_x\frac{\sum n_{i\cdot}u_i}{n}+\widetilde{d}_X,\quad \bar{y}=b_y\frac{\sum n_{\cdot j}v_j}{n}\widetilde{d}_Y, \tag{45}$$

$$s_x^2=b_x^2\frac{Q_u}{n-1},\quad s_y^2=b_y^2\frac{Q_v}{n-1}, \tag{46}$$

$$r=\frac{Q_{uv}}{\sqrt{Q_uQ_v}}. \tag{47}$$

Las estimaciones de los *coeficientes* β_1 y β_1' *de la regresión lineal* de Y en X y la de X en Y se calculan haciendo uso de las fórmulas

$$\widetilde{\beta}_1=\frac{b_y}{b_x}\frac{Q_{uv}}{Q_u}, \tag{48}$$

$$\widetilde{\beta}_1'=\frac{b_x}{b_y}\frac{Q_{uv}}{Q_v}. \tag{49}$$

Las estimaciones de los coeficientes β_0 y β_0' se hallan valiéndose de las fórmulas (32) y (34).

EJEMPLO 13. Realizada la agrupación de la muestra dada en el ejemplo 11, calcular las medias, las varianzas, el coeficiente de correlación y los coeficientes de regresiones lineales de X en Y y de Y en X.

◀ Escojamos $b_x=1$, $b_y=2$. La red rectangular que corresponde a estos valores está trazada en el diagrama de varianza (fig. 172). Construyamos la tabla de correlación (tabla 1.5) directamente según el diagrama. Hallamos $\widetilde{d}_X=11{,}5$, $\widetilde{d}_Y=9$ y calculamos los valores de u_i y v_j haciendo uso de las fórmulas

$$u_i=\frac{x_i^*-11{,}5}{1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 9,$$

$$v_j=\frac{y_i^*-9}{2},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 7.$$

Calculamos las sumas siguientes:

$$\sum n_{i\cdot}u_i=43,\qquad \sum n_{\cdot j}v_j=-15,\ \sum n_{i\cdot}u_i^2=215,$$

$$\sum n_{\cdot j}v_j^2=87,\ \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{7}n_{ij}^*u_iv_j=80.$$

Haciendo uso de las fórmulas (42) — (44), encontramos

$$Q_u=215-\frac{43^2}{42}\approx 170{,}976,$$

$$Q_v=87-\frac{(-15)^2}{42}\approx 81{,}643,$$

$$Q_{uv}=80-\frac{43\cdot(-15)}{42}\approx 95{,}357.$$

Cotas y puntos medios de los intervalos para y	v_j	Cotas y puntos medios de los intervalos para x									$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot j}v_j$	$n_{\cdot j}v_j^2$
		8 ... 9 8,5	9 ... 10 9,5	10 ... 11 10,5	11 ... 12 11,5	12 ... 13 12,5	13 ... 14 13,5	14 ... 15 14,5	15 ... 16 15,5	16 ... 17 16,5			
		u_i											
		−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5			
0 ... 2 1	−4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	−4	16
2 ... 4 3	−3	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2	−6	18
4 ... 6 5	−2	0	2	1	1	1	0	0	0	0	5	−10	20
6 ... 8 7	−1	0	1	2	1	4	2	0	0	0	10	−10	10
8 ... 10 9	0	0	0	0	5	3	3	2	0	0	13	0	0
10 ... 12 11	1	0	0	0	1	0	2	3	0	1	7	7	7
12 ... 14 13	2	0	0	0	0	0	0	1	1	2	4	8	16
$n_{i\cdot}$		2	3	4	8	8	7	6	1	3	$\sum=42$	$\sum=-15$	$\sum=87$
$n_{i\cdot}u_i$		−6	−6	−4	0	8	14	18	4	15	$\sum=43$		
$n_{i\cdot}u_i^2$		18	12	4	0	8	28	54	16	75	$\sum=215$		

Con ayuda de las fórmulas (45)—(47) calculamos

$$\bar{x}=1\cdot\frac{43}{42}+11{,}5\approx 12{,}52,\quad \bar{y}=2\cdot\frac{(-15)}{42}+9\approx 8{,}28,$$

$$s_x^2=1^2\cdot\frac{170{,}976}{41}\approx 4{,}170,\quad s_y^2=2^2\cdot\frac{81{,}643}{41}\approx 7{,}965,$$

$$r=\frac{95{,}357}{\sqrt{170{,}976\cdot 81{,}643}}\approx 0{,}807.$$

Utilizando las fórmulas (48), (49), (32) y (34), hallamos las estimaciones de los coeficientes de regresión:

$$\tilde{\beta}_1=\frac{2}{1}\cdot\frac{95{,}357}{170{,}976}\approx 1{,}12,$$

$$\tilde{\beta}_1'=\frac{1}{2}\cdot\frac{95{,}357}{81{,}643}\approx 0{,}58,$$

$$\tilde{\beta}_0=8{,}28-1{,}12\cdot 12{,}52\approx -5{,}74,$$

$$\tilde{\beta}_0'=12{,}52-0{,}58\cdot 8{,}28\approx 7{,}72.$$

Así pues, la ecuación de regresión lineal de Y en X tiene la forma

$$y=-5{,}74+1{,}12x$$

y la ecuación de regresión lineal de X en Y tiene la forma

$$x=7{,}72+0{,}58y.$$

La divergencia entre los resultados obtenidos y los dados en los ejemplos 11 y 12 se debe a la agrupación. ▶

1.69. En la tabla 1.6 se dan los resultados de un análisis de laboratorio al cual han sido sometidas 64 muestras de rocas esquistosas para determinar el contenido de silicio (SiO_2) y de aluminio (Al_2O_3) (en unidades convencionales). Calcular el coeficiente de correlación entre estos indicios, habiendo agrupado previamente estos datos en una tabla de correlación.

Tabla 1.6

SiO_2	Al_2O_3	SiO_2	Al_2O_3	SiO_2	Al_2O_3	SiO_2	Al_2O_3
57,8	17,2	53,8	16,3	48,8	16,4	50,7	21,5
54,6	17,9	53,6	17,2	53,5	15,9	53,1	21,3
54,8	18,8	51,5	15,8	52,8	15,9	52,9	20,3
51,7	19,9	54,0	15,0	52,9	14,8	51,3	20,1
61,1	16,0	50,4	14,4	52,1	19,8	52,7	17,2
62,3	17,8	53,0	15,3	47,3	18,7	46,6	15,6
52,2	18,8	53,3	16,6	49,8	20,2	46,5	16,0
49,2	19,3	51,6	14,9	49,3	17,6	51,3	15,5
53,9	16,1	50,9	14,7	50,1	19,2	51,0	19,2
60,0	14,8	49,6	16,1	54,4	18,2	47,5	18,5
56,2	17,0	52,2	19,5	49,0	16,8	47,7	19,0
55,2	17,8	50,5	15,6	48,9	18,2	44,9	16,6
53,3	19,9	51,1	18,1	51,3	19,7	49,4	16,0
57,9	17,1	52,2	19,5	51,6	19,6	48,9	18,6
54,0	15,5	49,2	15,7	46,2	19,1	48,8	19,4
52,6	17,6	49,3	13,2	50,4	20,2	50,6	18,9

Calcular el coeficiente de correlación y hallar las ecuaciones de regresiones directas de Y en X y de X en Y, basándose en los datos representados en las tablas de correlación siguientes (problemas 1.70—1.73):

1.70.

y \ x	40 ... 50	50 ... 60	60 ... 70	70 ... 80
10 ... 11	2	11	3	2
11 ... 12	1	19	2	4
12 ... 13	3	6	27	6
13 ... 14	2	3	3	8

1.71.

y \ x	5 ... 15	15 ... 25	25 ... 35	35 ... 45	45 ... 55	55 ... 65
10 ... 20	5	7	0	0	0	0
20 ... 30	0	20	23	0	0	0
30 ... 40	0	0	30	47	2	0
40 ... 50	0	0	10	11	20	6
50 ... 60	6	0	0	9	7	3

1.72.

y \ x	30 ... 50	50 ... 70	70 ... 90	90 ... 110	110 ... 130	130 ... 150	150 ... 170
50 ... 70	5	0	0	0	0	0	0
70 ... 90	2	3	4	0	0	0	0
90 ... 110	0	1	7	6	0	0	0
110 ... 130	0	0	1	8	4	0	0
130 ... 150	0	0	1	1	5	2	0
150 ... 170	0	0	0	0	0	5	0
170 ... 190	0	0	0	0	0	0	2
190 ... 210	0	0	0	0	0	0	2

1.73.

y \ x	7,0 ... 7,2	7,2 ... 7,4	7,4 ... 7,6	7,6 ... 7,8	7,8 ... 8,0
2,15 ... 2,45	5	4	0	0	0
2,45 ... 2,75	0	12	8	1	0
2,75 ... 3,05	0	0	5	5	0
3,05 ... 3,35	0	0	4	7	0
3,35 ... 3,65	0	0	0	12	1
3,65 ... 3,95	0	0	0	0	1

5. Tratamiento previo de los resultados de observaciones con utilización de un ordenador. Para resolver los problemas reales relacionados con el tratamiento estadístico de los resultados de observaciones es cómodo utilizar calculadoras electrónicas. En el presente párrafo el tratamiento por ordenador se emplea para resolver los problemas de los apartados precedentes. Para realizar los métodos de tratamiento previo por una máquina de las observaciones se utiliza el lenguaje algorítmico Fortran-IV.

En los problemas 1.74—1.77 hacer en el Fortran los subprogramas para el cálculo de la serie estadística y del recorrido de la muestra, designando con X el nombre de la colección de la muestra, con N el volumen de la muestra, con W el recorrido de la muestra, con XMIN el elemento mínimo de la muestra, con XMAX el elemento máximo de la muestra, con Y el nombre de la colección ordenada, con NI el nombre de la colección de las frecuencias absolutas.

1.74. Preparar el subprograma de determinación de los elementos mínimo y máximo de la muestra.

1.75. Preparar el subprograma función para el cálculo del recorrido de la muestra.

1.76. Preparar el subprograma para el cálculo de la serie estadística.

1.77*. Utilizando los subprogramas obtenidos en los problemas 1.74—1.76, preparar en el Fortran los programas para la resolución de los problemas 1.1—1.3.

1.78. Preparar en el Fortran el subprograma de agrupación de la muestra, utilizando los subprogramas de los problemas 1.74 y 1.75 y designando con Y el nombre de la colección de puntos medios de los intervalos, con NI el nombre de la colección de frecuencias absolutas, con F el nombre de la colección de frecuencias relativas acumulativas, con NK el volumen de la muestra calculado para el control de funcionamiento del programa, con K el número de intervalos. El número de intervalos se calcula con ayuda de la fórmula $K = [5 \log N]$, donde N es el volumen de la muestra.

1.79*. Preparar en el Fortran el programa de resolución de los problemas 1.4 y 1.5, utilizando el programa del problema 1.78.

1.80. Utilizando los subprogramas de los problemas 1.74 y 1.76, preparar el subprograma para el cálculo de la función empírica de distribución. Los parámetros son los siguientes: X, Y, NI, N, I1, F, M, donde X es la colección inicial; Y, la colección ordenada; NI, la colección de las frecuencias; N, el volumen de la muestra; I1, el número total

de diferentes elementos de la muestra; F, la función de distribución; M, la anchura del «escalón» en el gráfico de la función de distribución.

1.81. Preparar en el Fortran el subprograma para el trazado del histograma de frecuencias absolutas. Los parámetros son los siguientes: X, Y, N, M, donde Y es el vector del número de puntos en el intervalo; X, el vector de los puntos medios de los intervalos; N, el número de puntos; M, el número de blancos entre los intervalos.

1.82. Programar en el Fortran el cálculo de los histogramas para las muestras de los programas 1.4, 1.5 y 1.16, utilizando el subprograma del problema 1.81.

1.83. Programar en el Fortran las resoluciones de los problemas 1.8, 1.9, 1.14 y 1.15, utilizando el subprograma del problema 1.80.

En los problemas 1.84—1.86 preparar en el Fortran los subprogramas para el cálculo de las características numéricas de distribución según la muestra. Como parámetros se utilizan N, o sea, el volumen de la muestra; X, o sea, la colección de los datos de entrada; NI, o sea, la colección de las frecuencias absolutas; K, o sea, el orden del momento central; AMK, o sea, el momento central de K-ésimo orden; XSR, o sea, la media; D, o sea, la varianza; AS, o sea, el coeficiente de asimetría; EX, o sea, el coeficiente de exceso.

1.84. Preparar el subprograma para el cálculo de la media y de la varianza.

1.85. Preparar el subprograma para el cálculo de los momentos centrales de K-ésimo orden.

1.86. Preparar el subprograma para el cálculo de los coeficientes de asimetría y de exceso con ayuda de las fórmulas (16) y (17), utilizando los subprogramas de los problemas 1.84 y 1.85.

1.87. Programar en el Fortran las resoluciones de los problemas 1.45—1.50 (la transformación con ayuda de la fórmula (9) no se cumplirá), utilizando los subprogramas de los problemas 1.84—1.86.

En los problemas 1.88—1.90 preparar en el Fortran los subprogramas para el cálculo de las características numéricas de distribución de un sistema de dos variables aleatorias según la muestra, utilizando en calidad de los parámetros: X e *Y*, que son los nombres de las colecciones de entrada; N, el volumen de la muestra; QX, QY, QXY, SXR,

1.91.

x	y
0	0,321
0,1	0,282
0,2	0,266
0,3	0,245
0,4	0,232
0,5	0,227
0,6	0,214
0,7	0,208
0,8	0,201
0,9	0,200
1,0	1,199
1,1	0,202
1,2	0,203
1,3	0,209
1,4	0,215
1,5	0,223
1,6	0,234
1,7	0,262

1.92.

x	y
1,0	0,22
1,5	0,23
2,0	0,31
2,5	0,43
3,0	0,56
3,5	0,82
4,0	1,06
4,5	1,25
5,0	1,72
5,5	2,28
6,0	2,67
6,5	3,26
7,0	3,72
7,5	4,32
8,0	5,11
8,5	5,98
9,0	6,64
9,5	7,02
10,0	8,32

1.93.

x	y
0,00	15
0,05	16
0,10	24
0,15	17
0,20	26
0,25	30
0,30	31
0,35	36
0,40	32
0,45	40
0,50	42
0,55	41
0,60	51
0,65	45
0,70	46
0,75	53
0,80	57
0,85	62
0,90	59
0,95	63

SYR, DX, DY, KXY y RXY, los nombres de las variables que identifican las características numéricas a calcular; BØXY y B1YX, los cooficientes de regresión de Y en X; BØXY y B1XY, los coeficientes de regresión de X en Y.

1.88. Preparar el subprograma para el cálculo de QX, QY y QXY.

1.89. Preparar el subprograma para el cálculo de SXR, SYR, DX, DY, KXY y RXY, utilizando el subprograma del problema 1.88.

1.90. Proparar el subprograma para el cálculo de los coeficientes de regresión de X en Y e Y en X, utilizando los subprogramas de los problemas 1.88 y 1.89.

En los problemas 1.91—1.96 programar en el Fortran el cálculo de las características numéricas del sistema de dos variables aleatorias y de los coeficientes de regresiones de Y en X y de X en Y según las muestras dadas, utilizando los subprogramas de los problemas 1.88—1.90.

1.94.

x	y
0	0,051
1	0,082
2	0,151
3	0,240
4	0,352
5	0,383
6	0,448
7	0,502
8	0,692
9	0,702
10	0,798
11	0,875
12	0,956
13	1,160
14	1,249
15	1,482
16	1,723
17	1,986

1.95.

x	y
3,0	0,422
3,2	0,405
3,4	0,415
3,6	0,438
3,8	0,467
4,0	0,521
4,2	0,546
4,4	0,600
4,6	0,640
4,8	0,712
5,0	0,832
5,2	0,871
5,4	0,988
5,6	1,268
5,8	1,408
6,0	1,500

1.96.

x	y
0,1	0,96
0,2	0,83
0,3	0,81
0,4	0,90
0,5	1,11
0,6	1,12
0,7	1,32
0,8	1,60
0,9	1,70
1,0	1,90
1,1	2,36
1,2	2,77
1,3	3,28
1,4	3,31
1,5	4,35
1,6	4,78

§ 2. Estimaciones estadísticas de los parámetros de distribución

1. Distribución de estadísticas y distribución de una muestra. Supongamos que la ley de distribución de una población madre es conocida con exactitud hasta los valores que forman parte de la definición de los parámetros de esta ley $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Uno de los problemas de la estadística matemática consiste en hallar las estimaciones de los parámetros desconocidos en la muestra de observaciones $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Como hemos señalado en el § 1, en calidad de estimación de uno u otro parámetro se toman las funciones de los elementos de la muestra, o sea, las *estadísticas*. Es evidente que los valores de las estadísticas varían aleatoriamente de una muestra a otra o bien, en otros términos, las *estadísticas son variables aleatorias*. Las distribuciones de estas variables aleatorias se llaman *distribuciones muestrales*. En este sentido se habla de la distribución de la media muestral, de la varianza muestral y de otras estadísticas cuyos ejemplos hemos examinado en el § 1.

Para determinar las distribuciones muestrales la muestra obtenida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *se considera como cierta realización del vector aleatorio con n componentes independientes* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *cada una de las cuales tiene la distribución de la población madre.* La distribución de este vector se denomina distribución de la muestra. Conociendo la distribución de la muestra, con ayuda de los métodos de la teoría de las probabilidades se puede hallar la distribución de las estadísticas que se utilizan.

EJEMPLO 1. La muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ está obtenida de una población madre que tiene la distribución normal $N(m, \sigma)$. Hallar la densidad de distribución de la muestra y la densidad de distribución de la media muestral.

◀ La densidad de distribución de las variables aleatorias X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tiene la forma

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

Por consiguiente, la densidad de distribución de la muestra

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} e^{\frac{-\sum (x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

La media muestral se calcula, haciendo uso de la fórmula

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$$

y, por lo tanto, también tiene la distribución normal. Encontremos los parámetros de esta distribución:

$$\mathbf{M}[\overline{X}] = \frac{1}{n} \sum \mathbf{M}[X_i] = \frac{1}{n} \cdot nm = m,$$

$$\mathbf{D}[\overline{X}] = \frac{1}{n^2} \sum \mathbf{D}[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \blacktriangleright$$

2.1. Sean X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, las variables aleatorias que tienen la distribución binominal $B(p, k)$, en otros términos, sea X_i el número de los «casos favorables» en la i-ésima serie de k pruebas independientes con la particularidad de que la probabilidad del «caso favorable» en cada prueba sea igual a p. Hallar la ley de distribución de la muestra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. ¿Qué parámetros tiene la distribución de la muestra?

En los problemas 2.2—2.4 hallar la distribución de la muestra $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ obtenida a partir de la población madre que tiene la distribución indicada y enumerar los parámetros de las poblaciones madre.

2.2. Distribución de Poisson con parámetro λ.

2.3. Distribución exponencial Ex (λ).

2.4. Distribución uniforme $R(a, b)$.

Los resultados principales de la estadística matemática utilizan las distribuciones de las estadísticas calculadas según la muestra de la población madre distribuida normalmente. Estas distribuciones están ligadas con las χ^2, las de Student y las de Fisher. Por eso se emplean las designaciones siguientes:

U, la variable aleatoria que tiene la distribución normal $N(0, 1)$;

$\chi^2(k)$, la variable aleatoria que tiene la distribución χ^2 con k grados de libertad;

$T(k)$, la variable aleatoria que tiene la distribución de Student con k grados de libertad;

$F(k_1, k_2)$, la variable aleatoria que tiene la distribución de Fisher con k_1 y k_2 grados de libertad.

Los cuantiles de orden p de estas distribuciones se designan por u_p, $\chi^2_p(k)$, $t_p(k)$ y $F_p(k_1, k_2)$, respectivamente. Las tablas de los cuantiles citados se dan en el suplemento (tablas S1, S5 — S7). Puesto que la densidad de la distribución normal $N(0, 1)$ es simétrica respecto al cero, $u_p = -u_{1-p}$.

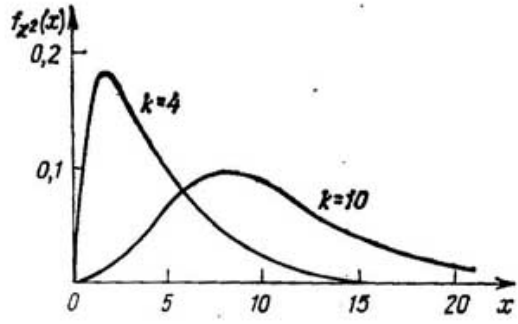


Fig. 173

Demos las definiciones y señalemos algunas propiedades de las distribuciones χ^2, de Student y de Fisher.

La variable aleatoria $\chi^2(k)$ es igual, por definición, a la suma de cuadrados de k variables aleatorias independientes U_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, cada una de las cuales tiene la distribución $N(0, 1)$, o sea,

$$\chi^2(k) = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_k^2.$$

La distribución de esta variable aleatoria se llama *distribución χ^2 con k grados de libertad*. La densidad de esta distribución $f_{\chi^2}(x)$ se define por la fórmula

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0. \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} x^{\frac{k-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0. \end{cases}$$

El gráfico de la función $f_{\chi^2}(x)$ se muestra en la fig. 173. La media y la varianza de la distribución de $\chi^2(k)$ son iguales a $M[\chi^2(k)] = k$, $D[\chi^2(k)] = 2k$, respectivamente.

Sean $\chi^2(k_1)$ y $\chi^2(k_2)$ las variables aleatorias independientes que tienen la distribución χ^2 con k_1 y k_2 grados de libertad, respectivamente. La suma de estas variables aleatorias tiene la distribución χ^2 con $k_1 + k_2$ grados de libertad

$$\chi^2(k_1) + \chi^2(k_2) = \chi^2(k_1 + k_2).$$

Para grandes valores de k ($k > 30$) la distribución χ^2 (k) se aproxima, con una exactitud suficiente para los cálculos prácticos, por la distribución normal $N(k, \sqrt{2k})$, o bien, en otros términos, la distribución χ^2 (k) es asintóticamente normal con la media k y la varianza $2k$. Para calcular los cuantiles de las distribuciones χ^2 (k) para grandes k ($k > 30$) se utiliza la fórmula

$$\chi_p^2(k) \approx \frac{1}{2}[u_p + \sqrt{2k-1}]^2. \quad (1)$$

Para cuantiles de pequeño orden p un valor más exacto puede ser determinado de la relación

$$\chi_p^2(k) \approx k\left[1 - \frac{2}{9k} + u_p \sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3. \quad (2)$$

EJEMPLO 2. Hallar los cuantiles $\chi^2_{0,01}(10)$, $\chi^2_{0,95}(100)$ y $\chi^2_{0,01}(100)$.

◀ Con ayuda de la tabla de cuantiles de la distribución χ^2 (tabla S5) encontramos $\chi^2_{0,01}(10) = 2{,}56$. Para calcular el cuantil

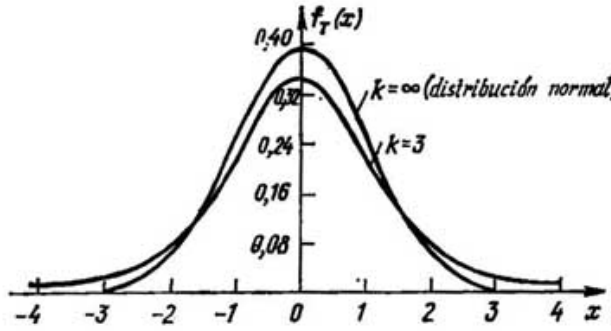


Fig. 174

$\chi^2_{0,95}(100)$ se utiliza la fórmula (1). Puesto que $u_{0,95} = 1{,}645$ (tabla S1), entonces

$$\chi^2_{0,95}(100) \approx \frac{1}{2}[1{,}645 + \sqrt{2 \cdot 100 - 1}]^2 \approx 124{,}06.$$

Calculemos el cuantil $\chi^2_{0,01}(100)$ con ayuda de fórmula (2). Puesto que $u_{0,01} = -2{,}326$, entonces

$$\chi^2_{0,01}(100) \approx 100\left[1 - \frac{2}{9 \cdot 100} + (-2{,}326) \cdot \sqrt{\frac{2}{9 \cdot 100}}\right]^3 \approx 70{,}13. \blacktriangleright$$

La variable aleatoria $T(k)$ es la relación de dos variables aleatorias independientes U y $\sqrt{\chi^2(k)/k}$, o sea,

$$T(k) = \frac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}.$$

La distribución de la variable aleatoria $T(k)$ se llama *distribución de Student con k grados de libertad*. La distribución de Student con k

grados de libertad tiene la densidad $f_T(x)$ (fig. 174):

$$f_T(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

la media $\mathbf{M}[T(k)]=0$ y la varianza $\mathbf{D}[T(k)]=\frac{k}{k-2}$. La densidad de distribución de Student es simétrica respecto a $x=0$, por lo tanto,

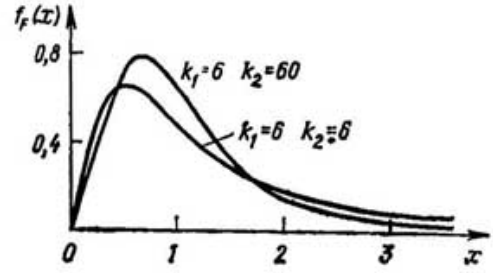


Fig. 175

para los cuantiles tenemos la relación siguiente:

$$t_{1-p}(k)=-t_p(k). \tag{3}$$

La distribución de Student es asintóticamente normal con la media nula y la varianza unidad. Para calcular los cuantiles de la distribución de Student en el caso en que k son grandes ($k>30$) se utiliza la relación

$$t_p(k)\approx u_p. \tag{4}$$

EJEMPLO 3. Hallar los cuantiles $t_{0,05}$ (8) y $t_{0,90}$ (40).

◀ Con ayuda de la tabla S6 encontramos $t_{0,95}$ (8) = 1,86. Utilizando la relación (3), obtenemos $t_{0,05}$ (8) = −1,86. Determinemos el cuantil $t_{0,90}$ (40) de la relación (4): $t_{0,90}$ (40) $\approx u_{0,90}\approx 1{,}28$. El valor exacto del cuantil $t_{0,90}$ (40) es igual a 1,303. ▶

Por definición, la variable aleatoria $F(k_1, k_2)$ es igual a la relación de dos variables aleatorias independientes $\chi^2(k_1)/k_1$ y $\chi^2(k_2)/k_2$, o sea,

$$F(k_1, k_2)=\frac{\chi^2(k_1)/k_1}{\chi^2(k_2)/k_2}.$$

La distribución de la variable aleatoria $F(k_1, k_2)$ se llama *distribución de Fisher con k_1 y k_2 grados de libertad*. La distribución de Fisher con k_1 y k_2 grados de libertad tiene la densidad $f_F(x)$ (fig. 175):

$$f_F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}}\dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x>0,\end{cases}$$

La media $\mathbf{M}[F]=\frac{k_2}{k_2-2}$, $k_2>2$.

Los cuantiles de la distribución de Fisher de orden p y $1-p$ están ligados por la fórmula siguiente:

$$F_{1-p}(k_1, k_2) = \frac{1}{F_p(k_2, k_1)}. \tag{5}$$

Entre las variables aleatorias que tienen la distribución normal, las distribuciones χ^2, de Student y de Fisher, existen las relaciones

$$T^2(k) = F(1, k), \tag{6}$$

$$F(k, \infty) = \frac{\chi^2(k)}{k}, \tag{7}$$

$$\chi^2(1) = U^2. \tag{8}$$

EJEMPLO 4. Hallar los cuantiles $F_{0,01}(3,5)$, $F_{0,9}(4,100)$ y $F_{0,05}(1,80)$.

◀ Utilizando la relación (5) y la tabla S6, obtenemos

$$F_{0,01}(3, 5) = \frac{1}{F_{0,99}(5,3)} = \frac{1}{28,24} \approx 0,035.$$

Luego, haciendo uso de la relación (7) y de la tabla S5, tenemos

$$F_{0,9}(4,100) \approx \frac{\chi^2_{0,9}(4)}{4} = \frac{7,78}{4} = 1,945.$$

Por último, tomando en consideración las relaciones (7) y (8) y la tabla S1, encontramos

$$F_{0,05}(1,80) \approx u^2_{0,05} = (-u_{0,95})^2 = 1,645^2 \approx 2,706. \blacktriangleright$$

Las distribuciones de las estadísticas principales que se calculan basándose en una muestra de volumen n obtenida a partir de la población madre normalmente distribuida $N(m, \sigma)$ se pueden hallar si se tienen en cuenta los hechos siguientes.

I. La media muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$ tiene la distribución normal $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

II. La varianza muestral $S_0^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - m)^2$ está ligada con la variable aleatoria que tiene la distribución χ^2 con n grados de libertad por la relación $S_0^2 = \frac{\sigma^2}{n}\chi^2(n)$.

III. La varianza muestral $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X_i - \overline{X})^2$ está ligada con la variable aleatoria que tiene la distribución χ^2 con $(n-1)$ grados de libertad por la relación $S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2(n-1)$.

IV. La estadística $\frac{\overline{X} - m}{S/\sqrt{n}}$ es una variable aleatoria que tiene

la distribución de Student con $(n-1)$ grados de libertad, o sea,

$$\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}=T(n-1).$$

V. Sean S_1^2 y S_2^2 las varianzas muestrales calculadas basándose en las muestras independientes de volumen n_1 y n_2 obtenidas a partir de dos poblaciones madre distribuidas normalmente que tienen las varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente; entonces la relación $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}$ tiene la distribución de Fisher con (n_1-1) y (n_2-1) grados de libertad, o sea,

$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=F(n_1-1,\ n_2-1).$$

Utilizando las tablas de cuantiles y las propiedadas de las distribuciones, determinar los cuantiles:

2.5. $\chi^2_{0,05}$ (8) $\chi^2_{0,99}$ (130).

2.6. $t_{0,01}$ (7) y $t_{0,95}$ (100).

2.7. $F_{0,05}$ (2, 3), $F_{0,99}$ (100,5) y $G_{0,01}$ (1,90).

2.8*. Utilizando las propiedades de las distribuciones χ^2, de Student y de Fisher, demostrar la relación (6).

En los problemas 2.9—2.11 se examinan las muestras de volumen n_1 y n_2 obtenidas a partir de las poblaciones madre normalmente distribuidas que tienen las distribuciones $N(m_1, \sigma)$ y $N(m_2, \sigma)$, respectivamente. Mostrar que:

2.9. Si la varianza de distribución σ^2 es conocida, entonces la estadística $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(m_1-m_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$ tiene la distribución $N(0, 1)$.

2.10. Si la varianza de distribución σ^2 es desconocida, entonces la estimación asociada de la varianza S^2, calculada por la fórmula $S^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$, está ligada con la distribución χ^2 del modo siguiente:

$$S^2=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\chi^2(n_1+n_2-2).$$

2.11. La estadística $\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(m_1-m_2)}{S\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ tiene la distribución de Student con (n_1+n_2-2) grados de libertad.

2.12. Supongamos que las estadísticas S_0^2 y S^2 se calculan basándose en la muestra de volumen n obtenida a partir de la población madre distribuida normalmente. Hallar las esperanzas matemáticas y las varianzas de estas estadísticas.

2. Propiedades principales de las estimaciones estadísticas de los parámetros de distribución. Por regla general, para estimar un parámetro pueden utilizarse varias estadísticas, obteniendo en este caso diferentes valores de estimaciones. Es evidente que en calidad de estimación conviene tomar tal estadística cuyos valores para diferentes muestras de la población madre dada sean, «por término medio», próximos al valor real del parámetro. Es deseable también que con el aumento del volumen de la muestra crezca la fiabilidad de la estimación. La calidad de las estimaciones es caracterizada por ciertas propiedades, entre las cuales figuran como principales las siguientes.

1. La estimación $\widetilde{\theta}$ se llama *insesgada* si la esperanza matemática de la misma es igual al parámetro que se estima:

$$\mathbf{M}[\widetilde{\theta}] = \theta.$$

La diferencia $\mathbf{M}[\widetilde{\theta}] - \theta$ se denomina *sesgo*.

2. La estimación $\widetilde{\theta} - \widetilde{\theta}(n)$ se llama *conciliable* si al aumentar el volumen de muestra n la estimación $\widetilde{\theta}(n)$ converge en probabilidad hacia θ. Lo último significa que para todos $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ existe N tal que para $n > N$

$$\mathbf{P}[|\widetilde{\theta}(n) - \theta| < \varepsilon] > 1 - \eta.$$

3. Sean $\widetilde{\theta}_1$ y $\widetilde{\theta}_2$ dos diferentes estimaciones insesgadas del parámetro θ. Si $\mathbf{D}[\widetilde{\theta}_1] < \mathbf{D}[\widetilde{\theta}_2]$, entonces se dice que la estimación $\widetilde{\theta}_1$ es *más efectiva* que la $\widetilde{\theta}_2$.

EJEMPLO 5. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra obtenida a partir de la población madre con la esperanza matemática m y la varianza σ^2. Mostrar que la media muestral $\overline{X}$ es la estimación insesgada nciliable de m.

Utilizando el resultado del ejemplo 1, tenemos

$$\mathbf{M}[\overline{X}] = m, \quad \mathbf{D}[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

El carácter insesgado de $\overline{X}$ se deduce de lo que $\mathbf{M}[\overline{X}] = m$. Para demostrar el carácter conciliable hagamos uso de la segunda desigualdad de Chébishev; para toda variable aleatoria X que tiene $\mathbf{M}[X] = m$ y $\mathbf{D}[X] = \sigma^2$ y para todos los $\delta > 0$ tenemos

$$\mathbf{P}[|X - m| > \sigma\delta] < \frac{1}{\delta^2}.$$

Aplicando esta desigualdad a la media muestral, obtenemos

$$\mathbf{P}\left[|\overline{X} - m| > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\delta\right] < \frac{1}{\delta^2}.$$

Designemos $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\delta$ con ε y determinemos la probabilidad del suceso contrario. Tenemos $\mathbf{P}[\,|\,\overline{X}-m\,|<\varepsilon]>1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$. Esto demuestra la convergencia en probabilidad de la media muestral X hacia m, o sea, el carácter conciliable de la media muestral como estimación de m. ▶

2.13. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra obtenida a partir de la población madre con la media conocida m y la varianza desconocida σ^2. Mostrar que la estadística

$$S_0^2=\frac{1}{n}\sum (X_i-m)^2$$

será la estimación insesgada para σ^2.

2.14*. Examinemos una muestra de volumen n obtenida a partir de la población madre con la media desconocida m y la varianza desconocida σ^2. Mostrar que la estadística

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum (X_i-\overline{X})^2$$

será la estimación insesgada para σ^2.

2.15. Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra de las observaciones de la variable aleatoria X con los momentos iniciales desconocidos

$$\alpha_l=\mathbf{M}[X^l],\quad l=1,\ 2,\ \ldots,\ 2k.$$

Mostrar que $\widetilde{\alpha}_l=\frac{1}{n}\sum X_i^l$ es la estimación insesgada de α_l y calcular la varianza de esta estimación.

2.16. Examinar dos muestras de volúmenes n_1 y n_2 obtenidas a partir de la población madre que tiene la media m y la varianza σ^2. Sean $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, S_1^2 y S_2^2 las estimaciones insesgadas de las medias y varianzas, determinadas basándose en estas muestras. Mostrar que las estimaciones asociadas que se calculan por las fórmulas

$$\overline{X}=\frac{n_1\overline{X}_1+n_2\overline{X}_2}{n_1+n_2},$$

$$S^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

serán:

a) estimaciones insesgadas para m y σ^2, respectivamente;

b)* estimaciones más efectivas de estos parámetros que las calculadas basándose en una sola muestra. (Examinar sólo el caso de una población madre distribuida normalmente.)

2.17*. Sea $\tilde{\theta}$ la estimación insesgada del parámetro θ, $D[\tilde{\theta}] < \infty$. Mostrar que $\tilde{\theta}^2$ es la estimación sesgada para θ^2 y calcular el sesgo.

2.18. Mostrar que la media muestral calculada basándose en una muestra obtenida a partir de la población madre que tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ será una estimación insesgada y conciliable de este parámetro.

2.19. Al realizar n experimentos independientes en las mismas condiciones, el suceso aleatorio A se ha producido x veces.

a) Mostrar que la frecuencia relativa $h = \frac{x}{n}$ de aparición del suceso A será la estimación insesgada y conciliable de la estimación de la probabilidad del suceso A : $P(A) = p$ en un experimento.

b) Determinar tal valor de p para el cual la varianza h será máxima.

2.20. Sea $\tilde{\theta}$ la estimación conciliable del parámetro θ y y $\psi(\tilde{\theta})$ es la función continua en el campo de variación de $\tilde{\theta}$. Demostrar que $\psi(\tilde{\theta})$ es la estimación conciliable de $\psi(\theta)$.

3. Método de verosimilitud máxima. El método de verosimilitud máxima es uno de los más aplicables para determinar las estimaciones de los parámetros. En calidad de estimaciones de los parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ en este método se toman tales valores $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \ldots, \tilde{\theta}_k$ que proporcionen el máximo de la función de verosimilitud. Estos valores se llaman *estimaciones* VM. La *función de verosimilitud* se determina del modo siguiente. Supongamos que para hallar las estimaciones de los parámetros de una población madre se obtiene una muestra concreta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de volumen n. Para estos valores concretos de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la ley de distribución de la muestra es la función de los parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Esta función se denomina función de verosimilitud y se designa con $L(\theta_1, \ldots, \theta_k)$. En particular, si se determinan las estimaciones de los parámetros de distribución de una *variable aleatoria discreta* X y la ley de distribución tiene la forma $P[X = x_i] = p_i(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces la función de verosimilitud es igual a la probabilidad de que los elementos de la muestra (variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_n$) tomen los valores concretos $x_1, x_2, \ldots$

$\ldots, x_n$, o sea,

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = \mathrm{P}[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n] = \\ = \mathrm{P}[X_1 = x_1]\,\mathrm{P}[X_2 = x_2] \ldots \mathrm{P}[X_n = x_n]. \quad (9)$$

Si se determinan las estimaciones de los parámetros de distribución de una *variable aleatoria continua* X con la densidad de distribución $f(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$, entonces la función de verosimilitud se define así:

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k) = f(x_1; \theta_1, \ldots, \theta_k)\, f(x_2; \theta_1, \ldots, \theta_k) \ldots \\ \ldots f(x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k). \quad (10)$$

En algunos casos, para simplificar el cálculo de las estimaciones VM, es cómodo examinar el *logaritmo de la función de verosimilitud*, o sea, $\ln L(\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Las estimaciones de los parámetros que se obtienen aplicando el método de verosimilitud máxima están distribuidas asintóticamente normales y para ciertas leyes de distribución de la población madre tienen la varianza mínima.

EJEMPLO 6. Hallar las estimaciones VM:

a) para la varianza de una población madre normalmente distribuida que tiene la media m;

b) para el parámetro λ de la distribución de Poisson.

◀ a) La función de verosimilitud para una muestra de volumen n obtenida a partir de la población madre normalmente distribuida con la media m se determina con ayuda de la fórmula (10):

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum (x_i - m)^2}{2\sigma^2}}.$$

La eliminación de la constante $\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$ y la determinación por logaritmos de $L(\sigma^2)$ no cambiará el valor que proporciona el máximo de esta función; por consiguiente, la estimación VM para σ^2 puede ser definida como valor que proporciona el máximo de la función

$$\ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - m)^2.$$

Utilizando las condiciones necesarias del máximo, obtenemos la ecuación que define la estimación VM:

$$\frac{d \ln L}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{\sum (x_i - m)^2}{2(\sigma^2)^2} = 0.$$

De aquí se deduce que

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m)^2.$$

No es difícil comprobar que en el punto $\sigma^2 = \tilde{\sigma}^2$ se satisfacen las condiciones suficientes del máximo.

b) Para la muestra de la distribución de Poisson con el parámetro λ la función de verosimilitud se determina con ayuda de la fórmula (9)

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} P[X_i=x_i]=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_n!}\;e^{-\lambda n}.$$

Al eliminar la constante $\frac{1}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_n!}$, al determinar por logaritmos $L(\lambda)$ y al utilizar las condiciones necesarias del máximo, obtenemos la ecuación que define la estimación VM para λ:

$$\frac{d\ln L}{d\lambda}=\frac{\sum x_i}{\lambda}-n=0.$$

De aquí resulta que

$$\tilde{\lambda}=\frac{1}{n}\sum x_i=x.$$

En el punto $\lambda=\tilde{\lambda}$ las condiciones suficientes del máximo se satisfacen. ▶

2.21.* Hallar la estimación VM del parámetro basándose en una muestra de volumen n obtenida de la población madre normalmente distribuida que tiene la media m. Mostrar que la estimación obtenida es sesgada.

2.22. Sea x el valor observable de una magnitud aleatoria que tiene la distribución binomial $B(n, p)$ o, en otros términos, sea x el número de «casos favorables» en n pruebas independientes con la particularidad de que p sea la probabilidad del «caso favorable» en una prueba. Hallar la estimación VM del parámetro p. Mostrar que la estimación obtenida es insesgada y conciliable.

En los problemas 2.23 y 2.24, basándose en la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de volumen n, hallar las estimaciones VM para los parámetros de las distribuciones indicadas. Mostrar que las estimaciones obtenidas son insesgadas y conciliables.

2.23. Distribución exponencial Ex $(1/\lambda)$.

2.24. Distribución normal $N(m, 1)$.

2.25. Las variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_k$ tienen la distribución binomial $B(n_1, p)$, $(B\ n_2, p)$, $\ldots$, $B(n_k, p)$, respectivamente. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ los valores que estas variables aleatorias toman en cierto experimento. Hallar la estimación VM del parámetro p. Mostrar que la estimación obtenida es insesgada y calcular su varianza.

2.26. La variable aleatoria X tiene la densidad de distribución $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{para } x \in [0, \sqrt{2/k}], \\ 0 & \text{para } x \notin [0, \sqrt{2/k}]. \end{cases}$$

Hallar la estimación VM de la esperanza matemática de X, basándose en la muestra de volumen n.

2.27. Con ayuda de n diferentes aparatos se obtienen n mediciones de una variable aleatoria X. Suponiendo que X tiene la distribución normal y la varianza de la i-ésima medición es igual a σ_i^2, $i = 1, 2, \ldots, n$, hallar la estimación VM de la esperanza matemática m de la variable aleatoria X. Mostrar que la estimación obtenida es insesgada y calcular la varianza de la misma.

2.28. Un aparato ha fallado durante la k-ésima prueba. Hallar la estimación VM de la probabilidad de fallo p durante una prueba y calcular la esperanza matemática de la misma.

2.29*. Para que un suceso A se produzca exactamente x veces se realizan n pruebas ($n \geqslant x$). Hallar la estimación VM para la probabilidad p de que el suceso A aparezca en una prueba. Mostrar que la estimación obtenida es sesgada y hallar la estimación insesgada.

2.30. Basándose en la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de volumen n, hallar la estimación VM del parámetro a de la distribución exponencial Ex (a). Calcular la esperanza matemática de esta estimación, basándose en una observación.

4. Método de momentos. Supongamos que la distribución de la población madre depende de k parámetros. Para obtener las estimaciones de los mismos se puede hacer uso del *método de momentos* cuya idea consiste en lo siguiente: basándose en la muestra, se calculan k momentos muestrales y se igualan a los momentos correspondientes de distribución de la población madre. Las estimaciones buscadas de cada uno de k parámetros se hallan como soluciones del sistema obtenido de k ecuaciones.

EJEMPLO 7. Valiéndose del método de momentos, encontrar las estimaciones de los parámetros de la distribución gamma.

◀ La densidad de la distribución gamma(véase el capítulo 14, § 2) depende de dos parámetros a y b. La esperanza matemática y la varianza de la distribución gamma son iguales

$$m = \frac{a}{b}, \quad \sigma^2 = \frac{a}{b^2}.$$

Basándonos en la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$, encontramos las estimaciones insesgadas para la esperanza matemática y la varianza:

$$\tilde{m}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i, \quad \tilde{\sigma}^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum (x_i-\bar{x})^2.$$

Ahora bien, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \bar{x}=\dfrac{a}{b}, \\ s^2=\dfrac{a}{b^2} \end{cases}$$

del cual hallamos las estimaciones para a y b:

$$\tilde{a}=\frac{\bar{x}^2}{s^2}, \quad \tilde{b}=\frac{\bar{x}}{s^2}. \blacktriangleright$$

2.31. En n pruebas independientes un suceso A se produce x veces. Con ayuda del método de momentos hallar la estimación de la probabilidad p de que aparezca el suceso A en una prueba.

En los problemas 2.32—2.35 hallar, basándose en la muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de volumen n, las estimaciones de los parámetros de las distribuciones indicadas, haciendo uso del método de momentos.

2.32. Distribución de Poisson con el parámetro λ.

2.33. Distribución normal $N(m, \sigma)$.

2.34. Distribución exponencial $\mathrm{Ex}(\lambda)$.

2.35. Distribución $\chi^2(k)$.

2.36. Utilizando la tabla de números aleatorios (tabla S4), obtener 50 números uniformemente distribuidos en el intervalo [0, 10]. Aplicando el método de momentos, hallar las estimaciones de los parámetros de la distribución uniforme con ayuda de estos datos.

§ 3. Estimaciones por intervalo

1. Intervalos confidenciales y probabilidad. Intervalos confidenciales para los parámetros de una población madre normalmente distribuida. Se llama *intervalo confidencial* para el parámetro θ el intervalo (θ_1, θ_2) que contiene el valor real del parámetro con la probabilidad dada $p = 1 - \alpha$. Así pues, $\mathbf{P}[\theta_1 < \theta < \theta_2] = 1 - \alpha$. El número $1 - \alpha$ se denomina *probabilidad confidencial* y el valor α, *nivel de significación*. Las cotas inferior y superior del intervalo confidencial θ_1 y θ_2 se determinan basándose en los resultados de observaciones y, por consiguiente, son variables aleatorias. Por eso se dice

que el intervalo confidencial *cubre* el parámetro que se estima con una probabilidad igual a $1 - \alpha$ o bien en $100\,(1 - \alpha)\%$ de los casos.

La elección de la probabilidad confidencial se determina por las condiciones concretas. Por regla general, los valores utilizables de $1 - \alpha$ son iguales a 0,90; 0,95; 0,99.

Frecuentemente se emplean intervalos confidenciales unilaterales cuyas cotas se determinan de las condiciones

$$P[\theta < \theta_2] = 1 - \alpha \quad \text{o bien} \quad P[\theta_1 < \theta] = 1 - \alpha.$$

Estos intervalos se llaman intervalos confidenciales *a la izquierda* y *a la derecha*, respectivamente.

La operación de determinar las cotas del intervalo confidencial para el parámetro θ, basándose en la probabilidad confidencial dada, consiste, en el caso elemental, en lo siguiente. Supongamos que existe la función, monótona en θ, de los elementos de la muestra, o sea, la estadística Y, $Y = Y(\widetilde{\theta}, \theta)$ tal que la distribución de la misma no dependa de θ ni de otros parámetros desconocidos. Conociendo la distribución de Y, determinemos dos números y_1 e y_2 que satisfagan la condición $P[y_1 < Y < y_2] = 1 - \alpha$, donde α es el nivel dado de significación. Ahora las cotas del intervalo confidencial para el parámetro θ se pueden determinar, despejando θ en la desigualdad

$$y_1 < Y(\widetilde{\theta}, \theta) < y_2.$$

EJEMPLO 1. Una variable aleatoria X tiene la distribución normal $N(m, \sigma)$. Hallar el intervalo confidencial para el parámetro m, basándose en los resultados de n observaciones a condición de que la varianza σ^2 sea conocida y la probabilidad confidencial sea igual a $1 - \alpha$.

◀ Tomemos en calidad de estimación de m la media muestral $\overline{X}$. Examinemos la estadística $Y = \dfrac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ que tiene la distribución normal $N(0, 1)$ no dependiente de m ni de otros parámetros (véase el § 2, ejemplo 1). Es evidente que

$$P[u_{\alpha/2} < Y < u_{1-\alpha/2}] = 1 - \alpha.$$

Resolviendo la desigualdad

$$u_{\alpha/2} < \frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$$

respecto a m, obtenemos que, con la probabilidad igual a $1 - \alpha$, se cumple la condición siguiente:

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}.$$

Utilizando la relación $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, el intervalo confidencial obtenido para m puede escribirse del modo siguiente:

$$X - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < m < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}. \blacktriangleright$$

En la tabla 3.1 se muestran los intervalos confidenciales para los parámetros de una población madre normalmente distribuida, así como los intervalos confidenciales para la diferencia de los valores medios de dos tales poblaciones.

EJEMPLO 2. Las mediciones efectuadas para determinar la dureza de 16 muestras de un acero legado (en unidades convencionales) dan los resultados siguientes:

13,1; 12,8; 11,9; 12,4; 13,5; 13,7; 12,0; 13,8; 10,6; 12,4; 13,5; 11,7; 13,9; 11,5; 12,5; 11,9.

Suponiendo que la muestra de mediciones está obtenida a partir de una población madre normalmente distribuida, hallar los intervalos confidenciales para la media y la varianza si la probabilidad confidencial $1-\alpha=0,95$.

◀ Basándose en la muestra, hallamos las estimaciones de la media, de la varianza y de la desviación estándar (típica)

$$\bar{x}=\bar{x}_1\approx 12,57;\quad s^2=s_1^2\approx 0,91;\quad s_1\approx 0,95.$$

Con ayuda de las tablas S6 y S5 hallamos los cuantiles

$$t_{0,975}(15)=2,131,\quad \chi^2_{0,025}(15)=6,26,\quad \chi^2_{0,975}(15)=27,49.$$

Según las fórmulas colocadas en la segunda y quinta línea de la tabla 3.1 tenemos

$$12,57-\frac{0,95}{\sqrt{16}}\cdot 2,131<m<12,57+\frac{0,95}{\sqrt{16}}\cdot 2,131.$$

Por consiguiente, $12,06<m<13,08$ y

$$\frac{15\cdot 0,91}{27,49}<\sigma^2<\frac{15\cdot 0,91}{6,26},$$

o sea, $0,498<\sigma^2<2,186$.

EJEMPLO 3. Para precisar, a base de los datos del ejemplo 2, las estimaciones de la media y de la varianza, se miden adicionalmente las durezas de 9 muestras del acero legado de la misma partida y se obtienen las estimaciones siguientes:

$$\bar{x}_2=11,870,\quad s_2^2=0,95.$$

a) ¿Se puede considerar que la diferencia de las estimaciones para la media se debe a los errores aleatorios de mediciones?

b) Hallar los intervalos confidenciales para m y σ^2, basándose en las estimaciones precisadas de la media y de la varianza si la probabilidad confidencial es igual a 0,95.

◀ a) Encontremos los intervalos confidenciales para la diferencia de las medias, suponiendo que ambas muestras han sido obtenidas a partir de las poblaciones madres con la misma varianza. La estimación asociada es igual a (véase (13) del § 1)

$$s^2=\frac{15\cdot 0,91+8\cdot 0,95}{16+9-2}\approx 0,924.$$

Tabla 3.1.

Intervalos confidenciales para los parámetros m y σ^2 de una población madre distribuida normalmente

	Parámetro	Suposición	Estimación del parámetro	Intervalo confidencial	Distribución de la estimación
1	m	σ^2 es conocida	$\bar{X}$	$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}<m<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha/2}$	$\bar{X}\sim N\left(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
2	m	σ^2 es desconocida $\tilde{\sigma}^2=S^2$	$\bar{X}$	$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)<$ $<m<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{1-\alpha/2}(n-1)$	$\frac{\bar{X}-m}{S/\sqrt{n}}=T(n-1)$
3.	m_1-m_2	σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas	$\bar{X}_1-\bar{X}_2$	$(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<$ $<m_1-m_2<(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+$ $+u_{1-\alpha/2}\times\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$	$\bar{X}_1-\bar{X}_2\sim N\left(m_1-m_2,\right.$ $\left.\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

Continuación de la tabla 3.1.

	Parámetro	Suposición	Estimación del parámetro	Intervalo confidencial	Distribución de la estimación
4	$m_1 - m_2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, pero no son conocidas; $\tilde{\sigma}_1^2 = S_1^2$; $\tilde{\sigma}_2^2 = S_2^2$	$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{1-\alpha/2}\,(n_1+n_2-2) \times$ $\times S \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < m_1 - m_2 <$ $< (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{1-\alpha/2}\,(n_1+$ $+n_2-2)\, S \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$, donde $S^2 = \frac{(n_1-1)\,S_1^2 + (n_2-1)\,S_2^2}{n_1+n_2-2}$	$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (m_1 - m_2)}{S \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} =$ $= T\,(n_1+n_2-2)$
5	σ^2	m es conocida	S_0^2	$\frac{nS_0^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)} < \sigma^2 < \frac{nS_0^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}$	$S_0^2 = \frac{\sigma^2}{n}\,\chi^2(n)$
6	σ^2	m es desconocida	S^2	$\frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\,S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$	$S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}\,\chi^2(n-1)$

Luego encontramos $s \approx 0{,}961$, $\overline{x_1} - \overline{x_2} = 0{,}705$ y el cuantil $t_{0{,}975}(16+9-2) = 2{,}069$. Con ayuda de la cuarta línea de la tabla 3.1 obtenemos

$$0{,}705 - 2{,}069 \cdot 0{,}961 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}} < m_1 - m_2 <$$

$$< 0{,}705 + 2{,}069 \cdot 0{,}961 \cdot \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}},$$

por lo tanto, $-0{,}123 < m_1 - m_2 < 1{,}533$. Puesto que el intervalo confidencial para la diferencia de las medias cubre el cero, con una probabilidad igual a 0,95 se puede suponer que la diferencia entre las estimaciones de las medias se debe a errores aleatorios de medición.

b) La estimación asociada de la media, basándose en dos muestras, según la fórmula (12) del § 1 es igual a

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 12{,}57 + 9 \cdot 11{,}87}{16+9} \approx 12{,}32.$$

La estimación asociada de la varianza ha sido calculada en a). Con ayuda de las fórmulas de la segunda línea de la tabla 3.1 encontramos el intervalo confidencial para m:

$$12{,}32 - 2{,}069 \cdot \frac{0{,}961}{\sqrt{25}} < m < 12{,}32 + 2{,}069 \cdot \frac{0{,}961}{\sqrt{25}},$$

por consiguiente, $11{,}92 < m < 12{,}72$. Puesto que los cuantiles $\chi^2_{0{,}025}(23)$ y $\chi^2_{0{,}975}(23)$ son iguales a 11,7 y 38,1, respectivamente, por las fórmulas de la sexta línea de la tabla 3.1 el intervalo confidencial para σ^2 es igual a

$$\frac{23 \cdot 0{,}924}{38{,}1} < \sigma^2 < \frac{23 \cdot 0{,}924}{11{,}7},$$

o sea, $0{,}558 < \sigma^2 < 1{,}816$. ▶

En los problemas 3.1—3.19 se supone que la distribución de las poblaciones madre es normal o suficientemente próxima a la normal.

En los problemas 3.1—3.4 las estimaciones muestrales se han determinado basándose en los resultados de n observaciones. Utilizando estos datos, hallar los intervalos confidenciales de 90% y de 99% para la esperanza matemática (media) de las características siguientes:

3.1. La capacidad del condensador si $\bar{x} = 20$ μF, $n = 16$, la desviación estándar es conocida y vale 4μF.

3.2. El tiempo de funcionamiento irreprochable de un tubo electrónico si $\bar{x} = 500$, $n = 100$, la desviación estándar se conoce y es igual a 10 h.

3.3. El diámetro del árbol si $\bar{x} = 30$ mm, $n = 9$, $s^2 = 9$ mm^2.

3.4. El contenido del carbono en la unidad del producto si $\bar{x} = 18$ g, $n = 25$, $s = 4$ g.

3.5*. Supongamos que a partir de una población madre están obtenidas dos muestras de volúmenes n_1 y n_2, respectivamente. Las estimaciones muestrales de las medias y de las varianzas para estas muestras son iguales a $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, S_1^2 y S_2^2. Las estimaciones asociadas de la media y de la varianza para la muestra de volumen $n_1 + n_2$ se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\bar{X} = \frac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}, \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Mostrar que si la varianza de la población madre se conoce y es igual a σ^2, el intervalo confidencial para la media se determina del modo siguiente:

$$\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} u_{1-\alpha/2} < m < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n_1 + n_2}} u_{1-\alpha/2};$$

si la varianza de la población madre es desconocida y $\tilde{\sigma}^2 = S^2$, el intervalo confidencial para la media se define así:

$$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n_1 + n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) < m < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n_1 + n_2}} t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2).$$

Para precisar las características dadas en los problemas 3.1—3.4 han sido realizados los experimentos repetidos y se han obtenido nuevas estimaciones muestrales. Utilizando las estimaciones muestrales asociadas (véase el problema 3.5), hallar los intervalos confidenciales de 90% y de 99% para la media (problemas 3.6—3.9).

3.6. La capacidad del condensador si $n = 9$, $\bar{x} = 18$ μF.

3.7. El tiempo de funcionamiento irreprochable del tubo electrónico si $n = 64$, $\bar{x} = 480$ h.

3.8. El diámetro del árbol si $n = 16$, $\bar{x} = 29$ mm, $s^2 = 4{,}5$ mm^2.

3.9. Contenido del carbono en la unidad del producto si $n = 9$, $\bar{x} = 18{,}8$ g, $s^2 = 20$ g^2.

3.10. Basándose en los datos del problema 3.8, hallar los intervalos confidenciales de 90% y de 95% para la varianza.

3.11. Basándose en los datos del problema 3.9, hallar los intervalos confidenciales de 99% y de 90% para la varianza.

3.12. Los resultados de 10 mediciones de la capacidad del condensador, efectuadas por un aparato que no tiene el error sistemático, muestran las siguientes desviaciones a partir del valor nominal (pF):
5,4; —13,9; —11; 7,2; —15,6; 29,2; 1,4; —0,3; 6,6; —9,9.
Hallar el intervalo confidencial de 90% para la varianza y la desviación estándar.

3.13. La estimación de la resistencia para una gran partida de resistores de un mismo tipo, determinada basándose en los resultados de mediciones de 100 piezas escogidas al azar, es igual a $\bar{x} \pm 10$ kΩ.

a) Suponiendo que la desviación estándar de medición es conocida: $\sigma = 1$ kΩ, encontrar la probabilidad de que para los resistores de toda la partida la resistencia esté dentro de los límites de $10 \pm 0{,}1$ kΩ.

b) ¿Cuántas mediciones hay que realizar para que con una probabilidad igual a 0,95 se pueda afirmar que en toda la partida de resistores la resistencia está dentro de los límites de $10 \pm 0{,}1$ kΩ?

3.14. Resolver el problema 3.13 si $\sigma = 2$ kΩ.

3.15. Para determinar el ángulo vertical de un punto de referencia se utiliza la media aritmética de varias mediciones del ángulo con ayuda de un sextante. Para los ángulos medidos por el sextante la desviación estándar se toma igual a $\sigma = 1{,}5'$. Hallar la cantidad de mediciones que es necesario realizar para que:

a) el error del resultado no exceda 1′ con una probabilidad igual a 0,99.;

b) el error del resultado no exceda 1,5′ con una probabilidad igual a 0,95.

3.16. Deducir las fórmulas para calcular los intervalos confidenciales para la diferencia de las medias (tercera y cuarta líneas de la tabla 3.1).

3.17. La variable aleatoria Z es igual a la diferencia de dos variables aleatorias independientes X e Y. Las estimaciones muestrales para X e Y se han determinado basándose en los resultados de $n_1 = 16$ y $n_2 = 36$ observaciones,

respectivamente. Hallar el intervalo confidencial de 95% para la esperanza matemática de Z si $\bar{x} = 10$, $\bar{y} = 4$, las desviaciones estándar σ_X y σ_Y se conocen y son iguales a $\sigma_X = 1$ y $\sigma_Y = 2$.

3.18. La amplitud de oscilaciones se ha determinado por dos auxiliares de laboratorio. El primer auxiliar, al realizar 10 observaciones, ha obtenido el valor medio de la amplitud $\bar{x}_1 = 81$ mm y el segundo auxilar, al realizar 15 observaciones, ha obtenido el valor medio de la amplitud $\bar{x}_2 = 84$ mm. Suponiendo que las desviaciones estándar de mediciones se conocen y son iguales $\sigma_1 = 8$ mm y $\sigma_2 = 9$ mm para el primero y el segundo auxiliares de laboratorio, respectivamente, hallar el intervalo confidencial de 99% para la diferencia entre las medias $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$. ¿Se puede considerar que los resultados de los auxiliares de laboratorio se distinguen realmente?

3.19. De una gran partida de diodos se toman dos muestras con intervalo de un mes. Los resultados de medición del tiempo de regeneración en los diodos de la primera muestra son los siguientes (ns): 51, 62, 53, 52, 63. La media muestral y la varianza del tiempo de regeneración para 7 diodos de la segunda muestra son las siguientes: $\bar{x}_2 = 60{,}3$, $s_2^2 = 36{,}06$.

a) Hallar el intervalo confidencial de 95% para la media, basándose en los datos de la primera muestra.

b) Hallar el intervalo confidencial de 99% para la variación de la media durante un mes, suponiendo que la varianza del tiempo de regeneración de los diodos en este período de tiempo no se ha cambiado. ¿Se puede considerar que el tiempo medio de regeneración no se ha cambiado?

2. Intervalos confidenciales para el parámetro p de una distribución binomial. Sea x el valor observado de una variable aleatoria X que tiene la distribución $B(n, p)$. En calidad de estimación para p sirve la *frecuencia relativa* $h = \frac{x}{n}$. Si $n > 50$, $nh > 5$ y $n(1 - h) > 5$, entonces la distribución de la variable aleatoria

$$Z = \frac{h - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}, \quad \text{donde } q = 1 - p,$$

se aproxima con suficiente exactitud por la distribución normal $N(0, 1)$. Utilizando este resultado, se puede obtener las siguientes

fórmulas para las cotas p_1 y p_2 del intervalo confidencial:

$$p_{1,2} \approx h \mp \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} \sqrt{h(1-h)}, \tag{1}$$

$$p_{1,2} \approx \frac{1}{n+u_{1-\alpha/2}^2}\left(x+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{2} \mp u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{x(n-x)}{n}+\frac{u_{1-\alpha/2}^2}{4}}\right). \tag{2}$$

La fórmula (2) da una estimación más exacta de las cotas confidenciales.

EJEMPLO 4. Al controlar 100 piezas de una gran partida se han revelado 10 piezas defectuosas. Hallar el intervalo confidencial de 95% para la porción de las piezas defectuosas en toda la partida.

◀ Puesto que $n > 50$, $h = \frac{1}{10}$, $nh = 10$ y $n(1-h) = 90$ más que 5, entonces para determinar las cotas del intervalo confidencial pueden utilizarse las fórmulas (1) ó (2). Con ayuda de la tabla S1 encontramos $u_{0,975} = 1{,}96$. Según la fórmula (1) el intervalo confidencial será

$$0{,}041 < p < 0{,}159.$$

La fórmula (2), que es más exacta, da un intervalo un poco diferente:

$$0{,}055 < p < 0{,}174. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 5. ¿Qué volumen mínimo de la muestra ha de tomarse en las condiciones del ejemplo precedente para que, con una probabilidad igual a 0,95, se pueda afirmar que la porción de las piezas defectuosas en toda la partida difiere de la frecuencia de aparición de las piezas defectuosas presentes en la muestra en 1%, como máximo?

◀ Utilicemos la aproximación normal de la distribución de la variable aleatoria

$$Z = \frac{h-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}.$$

Representemos el intervalo confidencial con las cotas (1) en forma de la desigualdad

$$|h-p| < u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}$$

que se cumple con la probabilidad de $1-\alpha = 0{,}95$. Puesto que según los datos del problema $|h-p| \leqslant 0{,}01$, para determinar n obtenemos la desigualdad siguiente:

$$u_{0,975} \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \leqslant 0{,}01.$$

De aquí resulta que

$$1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 \cdot (1-0.1)}{n}} \leqslant 0{,}01$$

y $n \geqslant (0{,}3 \cdot 196)^2 = 3457{,}44$. Así pues, el volumen mínimo de la muestra $n = 3458$. ▶

Si $n < 50$ o al menos uno de los números $n(1-h)$ o nh es menor que 5, las fórmulas (1) y (2) no se pueden aplicar. En este caso para determinar las cotas confidenciales p_1 y p_2 se utilizan las tablas de la función de distribución para la ley binomial: p_1 se determina como el valor máximo de p que satisfaga la desigualdad

$$\mathbf{P}[X \geqslant x] = \sum_{k=x}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

y p_2, como el valor mínimo de p que satisfaga la desigualdad

$$\mathbf{P}[X \leqslant x] = \sum_{k=0}^{x} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Las cotas confidenciales exactas pueden ser determinadas también con ayuda de las fórmulas

$$p_1 = \frac{xF_{\alpha/2}(m_1, m_2)}{n-x+1+xF_{\alpha/2}(m_1, m_2)}, \tag{5}$$

donde $m_1 = 2x$, $m_2 = 2(n-x+1)$;

$$p_2 = \frac{(x+1)F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)}{n-x+(x+1)F_{1-\alpha/2}(k_1, k_2)}, \tag{6}$$

donde $k_1 = 2(x+1)$, $k_2 = 2(n-x)$.

Al efectuar los cálculos con ayuda de las fórmulas (5) y (6) es cómodo utilizar la relación entre los cuantiles de la distribución de Fisher (véase el § 2, p. 1)

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1, n_2)}. \tag{7}$$

EJEMPLO 6. De 15 tubos electrónicos de un mismo tipo 10 tubos han fallado, después de 1000 horas de funcionamiento, debido a la ruptura del filamento. Hallar el intervalo confidencial de 90% para una porción de tales tubos en una gran partida de los mismos.

◀ Puesto que el volumen de la muestra es menor que 50, las fórmulas (1) ó (2) son inaplicables. Calculemos las cotas del intervalo confidencial con ayuda de las fórmulas (5) y (6). Tenemos

$$m_1 = 2 \cdot 10 = 20, \quad m_2 = 2 \cdot (15 - 10 + 1) = 12,$$

$$k_1 = 2 \cdot (10 + 1) = 22, \quad k_2 = 2 \cdot (15 - 10) = 10.$$

Con ayuda de las tablas S7 determinemos los cuantiles;

$$F_{0,95}(12, 20) = 2{,}28, \quad F_{0,95}(22, 10) = 2{,}75$$

Utilizando la relación (7), obtenemos $F_{0,05}(20, 12) = \frac{1}{2,28} \approx 0,44$. Haciendo uso de las fórmulas (5) y (6), tenemos

$$p_1 = \frac{10 \cdot 0,44}{15 - 10 + 1 + 10 \cdot 0,44} \approx 0,423,$$

$$p_2 = \frac{(10+1) \cdot 2,75}{15 - 10 + (10+1) \cdot 2,75} \approx 0,858.$$

Así pues, el intervalo confidencial de 90% para la porción de los tubos cuyos filamentos están rotos después de 1000 horas de funcionamiento de los mismos será (0,423; 0,858). ▶

3.20. De una gran partida de transistores de un mismo tipo han sido escogidos al azar y controlados 100 transistores. 36 transistores tienen el factor de amplificación menor que 10. Hallar el intervalo confidencial de 95% para la porción de tales transistores en toda la partida.

3.21. En una línea automática que fabrica cojinetes han sido escogidos 400 cojinetes entre los cuales 10 son defectuosos. Hallar el intervalo confidencial de 90% para la probabilidad de que aparezca un cojinete defectuoso. ¿Cuántos cojinetes es necesario comprobar para que, con una probabilidad igual a 0,9973, se pueda afirmar que la probabilidad de que aparezca un cojinete defectuoso no difiere de la frecuencia en más que el 5%?

3.22. En 10 000 sesiones del juego con un autómata la ganancia ha aparecido 4000 veces. Hallar el intervalo confidencial de 95% para la probabilidad de ganar. ¿Cuántas sesiones es necesario llevar a cabo para que, con una probabilidad iqual a 0,99, la probabilidad de ganar se distinga de la frecuencia en el 1%, como máximo?

3.23. Al revisar 60 cajones se han revelado 10 cajones defectuosos. Hallar el intervalo confidencial de 90% para la porción de los cajones defectuosos en toda la partida, haciendo uso de las fórmulas (5) y (6) y utilizando la aproximación normal.

3.24. De una urna que contiene, en la razón desconocida, bolas negras y blancas, indistingibles a tientas, se extraen al azar 10 bolas (con devolución). Hallar: a) el intervalo confidencial de 90% y b) el intervalo confidencial de 95% para la porción de las bolas negras si entre las sacadas son 3 negras.

3.25. Para comprobar la afirmación de que la probabilidad de fallar un aparato p es igual a 0,01 han sido sometidos

a la prueba 5 aparatos y ninguno de los aparatos ha fallado. Construir la cota superior de 95% del intervalo confidencial unilateral para p, basándose en estos datos. ¿Se puede considerar que el experimento realizado ha confirmado realmente la suposición de que $p = 0{,}01$?

3.26. De 10 piezas controladas que se han fabricado en una máquina herramienta automática una es defectuosa. Hallar el intervalo confidencial de 99% para la porción de las piezas defectuosas en la producción de la máquina herramienta examinada.

3. Intervalos confidenciales para el parámetro λ de la distribución de Poisson. Sea x el valor observable de una variable aleatoria X que tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ, las cotas inferior y superior λ_1 y λ_2 del intervalo confidencial para el parámetro λ se determinan como raíces de las ecuaciones

$$\sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = \frac{\alpha}{2}, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} = \frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Para resolver las ecuaciones (8) y (9) se necesita la tabla de probabilidades sumarias para la distribución de Poisson (véase la tabla S4). Es más cómodo utilizar la aproximación de la distribución de Poisson por la distribución χ^2. Tal aproximación lleva a las siguientes fórmulas de cálculo de las cotas confidenciales para el parámetro λ:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \chi^2_{\alpha/2}\,(2x), \tag{10}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \chi^2_{1-\alpha/2}\,(2x+2). \tag{11}$$

Por regla general, para la estimación del parámetro λ se utilizan los resultados de n observaciones de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ cada una de las cuales tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ. En este caso las cotas confidenciales se calculan para el parámetro $n\lambda$ de la variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Supongamos que el intervalo confidencial para $n\lambda$ tenga la forma $\lambda_1 < n\lambda < \lambda_2$. El intervalo confidencial para λ será definido por la desigualdad

$$\frac{\lambda_1}{n} < \lambda < \frac{\lambda_2}{n}.$$

EJEMPLO 7. Durante los ensayos de cinco nuevos motores en el banco se han revelado dos desperfectos en el motor N° 4 y un desperfecto

en el motor N° 1 y en el motor N° 5. Suponiendo que el número de desperfectos para cada motor tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ, hallar el intervalo confidencial para el parámetro λ si la probabilidad confidencial es igual a 0,90.

◀ La cantidad total de desperfectos es igual a

$$x = \sum_{i=1}^{5} x_i = 4.$$

Utilizando la tabla S5, encontramos (para $x = 4$)

$$\chi^2_{0,05}(8) = 2{,}73, \quad \chi^2_{0,95}(10) = 18{,}3.$$

Ahora bien, el intervalo confidencial para $n\lambda$ será (véase (10) y (11)) $1{,}365 < 5\lambda < 9{,}15$; el intervalo confidencial para λ sera: $0{,}273 < \lambda < 1{,}83$. ▶

3.27. El número de elementos que forman parte de un equipo de aparatos y han fallado durante la prueba tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ. Hallar el intervalo confidencial de 95% para λ, basándose en los datos siguientes:

a) durante las pruebas han fallado 3 elementos en un equipo de aparatos;

b) en cuatro equipos en prueba han fallado 1, 0, 2, 1 elementos, respectivamente.

3.28. En tres centrales telefónicas automáticas en el período de 2 a 3 horas había 2 llamadas. Hallar las cotas superior e inferior de los intervalos confidenciales unilaterales para el número medio de llamadas a cada central si la probabilidad confidencial es igual a 0,90.

3.29. En dos ordenadores del mismo tipo el número de errores transitorios al día es 2 y 3, respectivamente. Hallar el intervalo confidencial de 95% para el número medio de errores transitorios en los ordenadores al día, suponiendo que este número en cada ordenador tiene la distribución de Poisson.

3.30. Durante cada una de 5 horas de funcionamiento un radiofaro respondedor recibe 10, 12, 8, 3 y 15 interrogaciones, respectivamente. Hallar el intervalo confidencial de 90% para el número medio de interrogaciones durante una hora, suponiendo que este número tiene la distribución de Poisson.

4. Intervalos confidenciales para el coeficiente de correlación ρ. Supongamos que la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, ha sido obtenida a partir de la población madre que tiene la distribución normal bidi-

mensional y r es el coeficiente de correlación muestral que se calcula con ayuda de la fórmula (28) del § 1. Si n son suficientemente grandes, la estadística

$$Z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}=\operatorname{Arth} r$$

tiene una distribución aproximadamente normal

$$N\left(\operatorname{Arth} r, \frac{1}{\sqrt{n-3}}\right).$$

El intervalo confidencial para Arth ρ tiene la forma

$$\operatorname{Arth} r-\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n-3}}<\operatorname{Arth}\rho<\operatorname{Arth} r+\frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n-3}}. \qquad (12)$$

El intervalo confidencial para ρ se calcula con ayuda de las tablas de tangente hiperbólica $\rho = \operatorname{th} z$ (véase la tabla S8).

EJEMPLO 9. El coeficiente de correlación muestral, calculado a base de la muestra de volumen 10, $r = -0{,}64$. Hallar el intervalo confidencial de 90% para el coeficiente de correlación ρ.

◀ Con ayuda de la tabla S8 encontramos Arth $(-0{,}64) = -\operatorname{Arth} 0{,}64 = -0{,}76$. Puesto que $u_{0.95} = 1{,}645$, entonces según la fórmula (12) el intervalo confidencial para Arth ρ tiene la forma

$$-0{,}76-\frac{1{,}645}{\sqrt{10-3}}<\operatorname{Arth}\rho<-0{,}76+\frac{1{,}645}{\sqrt{10-3}},$$

o sea,

$$-1{,}38<\operatorname{Arth}\rho<-0{,}14.$$

Volviéndose una vez más a la tabla S8, obtenemos el intervalo confidencial de 90% para el coeficiente de correlación:

$$-0{,}881<\rho<-0{,}139. \blacktriangleright$$

Construir los intervalos confidenciales para los coeficientes de correlación de una población bidimensional normalmente distribuida, basándose en los datos siguientes:

3.31. $r = 0{,}687$, $n = 50$, $1-\alpha = 0{,}95$.

3.32. $r = 0{,}71$, $n = 28$, $1-\alpha = 0{,}95$.

3.33. $r = -0{,}65$, $n = 12$, $1-\alpha = 0{,}99$ y $1-\alpha = 0{,}95$.

3.34. $r = 0{,}14$, $n = 300$, $1-\alpha = 0{,}99$ y $1-\alpha = 0{,}95$.

3.35. $r = -0{,}36$, $n = 28$, $1-\alpha = 0{,}99$ y $1-\alpha = 0{,}95$.

§ 4. Verificación de las hipótesis estadísticas

1. Conceptos principales. En muchos casos los resultados de observaciones se utilizan para verificar suposiciones (hipótesis) respecto a unas u otras propiedades de la distribución de una población madre. En particular, los problemas de este género surgen al comparar dife-

rentes procesos tecnológicos o métodos de elaboración por determinadas características que se miden, por ejemplo, por la precisión, el rendimiento, etc.

Sea X una variable discreta o continua que se observa. Se llama *hipótesis estadística* H la suposición acerca de los parámetros o la forma de distribución de la variable aleatoria X. La hipótesis estadística H se denomina *simple* si determina unívocamente la distribución de la variable aleatoria X; en el caso contrario la hipótesis H se denomina *compuesta*. Por ejemplo, la suposición de que la variable aleatoria X está distribuida por la ley normal $N(0, 1)$ es una hipótesis simple; sin embargo, si se enuncia la suposición de que la variable aleatoria X tiene la distribución normal $N(m, 1)$, donde $a \leqslant m \leqslant b$, esto es una hipótesis compuesta. Un otro ejemplo de hipótesis compuesta es la suposición de que la variable aleatoria continua X toma, con una probabilidad igual a 1/3, un valor del intervalo (1, 5); en este caso la distribución de la variable aleatoria X puede ser cualquiera de la clase de distribuciones continuas.

A menudo la distribución de una variable aleatoria X se conoce y, basándose, en la muestra de observaciones, es necesario comprobar la suposición sobre el valor de los parámetros de esta distribución. Semejantes hipótesis se llaman *paramétricas*. En este párrafo (a excepción del p. 5) y en el § 5 se examina la verificación de hipótesis paramétricas.

La hipótesis sujeta a verificación se denomina *hipótesis nula* y se designa H_0. Paralelamente con la hipótesis H_0 se examina una de las hipótesis alternativas H_1. Por ejemplo, si se comprueba la hipótesis de que el parámetro θ es igual a cierto valor dado θ_0, o sea, H_0: $\theta = \theta_0$, entonces en calidad de la alternativa se puede examinar una de las hipótesis siguientes: $H_1^{(1)}$: $\theta > \theta_0$; $H_1^{(2)}$: $\theta < \theta_0$; $H_1^{(3)}$: $\theta \neq \theta_0$; $H_1^{(4)}$: $\theta = \theta_1$, donde θ_1 es el valor dado, $\theta_1 \neq \theta_0$. La elección de la hipótesis alternativa se determina por la enunciación concreta del problema.

La regla conforme a la cual se toma la decisión de aceptar o rechazar la hipótesis H_0 se llama *criterio* $\mathcal{K}$. Puesto que la decisión se adopta basándose en la muestra de observaciones de la variable aleatoria X, es necesario elegir una estadística conveniente que en este caso se denomina *estadística* Z *del criterio* $\mathcal{K}$. Al verificar una hipótesis paramétrica simple H_0: $\theta = \theta_0$ en calidad de estadística del criterio se escoge la misma estadística que para la estimación del parámetro θ, o sea $\tilde{\theta}$.

La verificación de una hipótesis estadística se basa sobre el principio de acuerdo con el cual sucesos poco probables se consideran imposibles y sucesos que tienen gran probabilidad se consideran ciertos. Este principio puede realizarse del modo siguiente. Antes de proceder al análisis de la muestra se fija cierta probabilidad pequeña α llamada *nivel de significación*. Sea V el conjunto de valores de la estadística Z y $V_k \subseteq V$ un subconjunto tal que, a condición de ser cierta la hipótesis H_0, la probabilidad de que la estadística del criterio vaya a parar en V_k es igual a α, o sea, $\mathbf{P}\{Z \in V_k / H_0\} = \alpha$.

Designemos con z_m el valor muestral de la estadística Z, calculado basándose en la muestra de observaciones. El criterio se formula del modo siguiente: rechazar la hipótesis H_0 si $z_m \in V_k$; aceptar la hipótesis H_0 si $z_m \in V \setminus V_k$. El criterio fundado en la utilización del nivel

de significación fijado de antemano se llama *criterio de significación*. El conjunto V_k de todos los valores de la estadística del criterio Z para los cuales se toma la decisión de rechazar la hipótesis H_0 se denomina *dominio crítico*; el dominio $V \setminus V_k$ se llama dominio de aceptación de la hipótesis H_0.

El nivel de significación α determina el «tamaño» del dominio crítico V_k. La posición que el dominio crítico ocupa sobre el conjunto de valores de la estadística Z depende de la formulación de la hipótesis alternativa H_1. Por ejemplo, si se verifica la hipótesis H_0: $\theta = \theta_0$ y la hipótesis alternativa H_1 se enuncia como H_1: $\theta > \theta_0$ ($\theta < \theta_0$), entonces el dominio crítico se sitúa en la «cola» derecha (izquierda) de

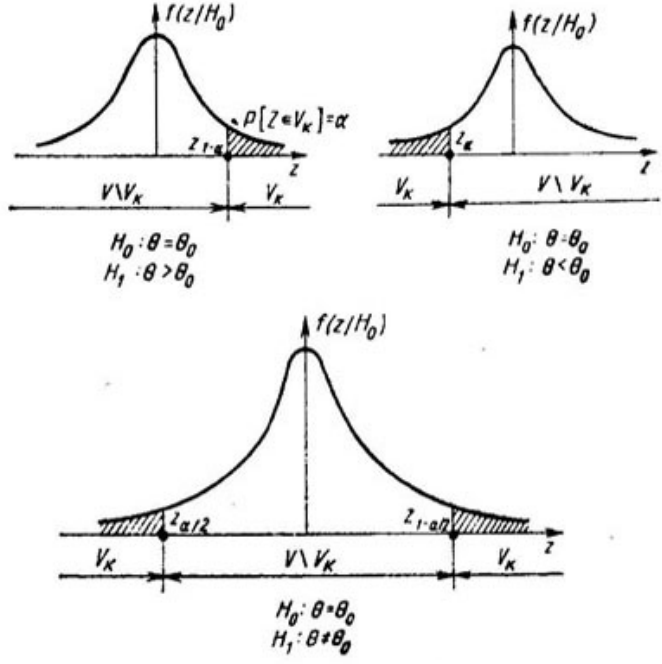


Fig. 176

distribución de la estadística Z, o sea, tiene la forma de la desigualdad $Z > z_{1-\alpha}(Z < z_\alpha)$, donde $z_{1-\alpha}$ y z_α son los cuantiles de distribución de la estadística Z a condición de que sea justa la hipótesis H_0. En este caso el criterio se denomina *unilateral*, o sea, el criterio a la derecha o el a la izquierda, respectivamente. Si la hipótesis alternativa se formula como H_1: $\theta \neq \theta_0$, entonces el dominio crítico se sitúa en ambas «colas» de la distribución de Z, o sea, se define por el conjunto de las desigualdades $Z < z_{\alpha/2}$ y $Z > z_{1-\alpha/2}$; en este caso el criterio se llama *bilateral*.

La figura 176 muestra la disposición del dominio crítico V_k para diferentes hipótesis alternativas. Aquí $f(z/H_0)$ es la densidad de distribución de la estadística Z del criterio, a condición de que sea justa la hipótesis H_0; $V \setminus V_k$, el dominio de aceptación de la hipótesis; $\mathbf{P}[Z \in V \setminus V_k] = 1 - \alpha$.

Ahora bien, la verificación de una hipótesis estadística paramétrica con ayuda del criterio de significación puede subdividirse en las etapas siguientes:

1) enunciar la hipótesis que se verifica (H_0) y la alternativa (H_1);

2) asignar el nivel de significación α;

3) elegir la estadística Z del criterio para verificar la hipótesis H_0;

4) determinar la distribución muestral de la estadística Z a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta;

5) en dependencia de la enunciación de la hipótesis alternativa determinar el dominio crítico V_k valiéndose de una de las desigualdades $Z > z_{1-\alpha}$, $Z < z_\alpha$ o con ayuda del conjunto de desigualdades $Z > z_{1-\alpha/2}$ y $Z < z_{\alpha/2}$;

6) obtener la muestra de observaciones y calcular el valor muestral z_m de la estadística del criterio;

7) tomar la decisión estadística: si $z_m \in V_k$, rechazar la hipótesis H_0, puesto que no concuerda con los resultados de observaciones;

si $z_m \in V \setminus V_k$, aceptar la hipótesis H_0, o sea, suponer que la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observación.

OBSERVACIÓN. Por lo general, en las etapas 4) — 7) se utiliza una estadística cuyos cuantiles están tabulados: estadística con distribución normal $N(0, 1)$, estadística de Student, estadística χ^2 o estadística de Fisher. Sin embargo, la interpretación de la decisión y el cálculo de probabilidades de los errores cometidos durante la verificación de las hipótesis se llevan a cabo con comodidad para la estadística que es la estimación directa del parámetro θ, o sea, para la estadística $\widetilde{\theta}$.

EJEMPLO 1. Según los datos contenidos en el certificado técnico de un motor de automóvil el consumo de combustible para 100 km de recorrido constituye 10 l. Como resultado de modificación de la estructura del motor se espera que el consumo de combustible disminuye. Para verificar esto se efectúan pruebas de 25 automóviles, escogidos al azar y provistos de un motor modernizado; en este caso la media muestral de los consumos de combustible para 100 km de recorrido constituye, según los resultados de pruebas, $\bar{x} = 9{,}3$ l. Supongamos que la muestra de los consumos de combustible se ha obtenido a partir de una población madre distribuida normalmente con la media m y la varianza $\sigma^2 = 4\ \text{l}^2$. Utilizando el criterio de significación, verificar la hipótesis consistente en que la modificación de la estructura del motor no ha ejercido influencia en el consumo de combustible.

◀ Se verifica la hipótesis de la media (m) de una población madre normalmente distribuida. Realicemos la comprobación de la hipótesis, observando las etapas siguientes:

1) La hipótesis que se comprueba H_0: $m = 10$ y la alternativa H_1: $m < 10$.

2) Escojamos el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

3) En calidad de estadística del criterio utilicemos la estimación de la esperanza matemática, o sea, la media muestral $\overline{X}$.

4. Puesto que la muestra se ha obtenido a partir de la población madre normalmente distribuida, la media muestral también tiene la distribución normal con la varianza $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25}$. A condición de que la hipótesis H_0 sea cierta, la esperanza matemática de esta distribución

es igual a 10. La estadística normalizada del criterio $U = \dfrac{\overline{X} - 10}{\sqrt{4/25}}$ tiene la distribución normal N (0, 1).

5. La hipótesis alternativa H_1: $m < 10$ supone la disminución del consumo de combustible, por consiguiente, es necesario utilizar el criterio unilateral. El dominio crítico se define por la desigualdad $U < u_\alpha$. Con ayuda de la tabla S1 encontramos $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}645$.

6. El valor muestral de la estadística normalizada del criterio es igual a $u_m = \dfrac{9{,}3 - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}75$.

7. La resolución estadística: puesto que el valor muestral de la estadística del criterio pertenece al dominio crítico, la hipótesis H_0 se rechaza: conviene suponer que la modificación de la estructura del motor ha originado la disminución del consumo de combustible.

La frontera $\overline{x}_k$ del dominio crítico para la estadística inicial X del criterio puede ser obtenida a partir de la relación

$$\frac{\overline{x}_k - 10}{\sqrt{4/25}} = -1{,}645,$$

de donde obtenemos $\overline{x}_k = 9{,}342$, o sea, el dominio crítico para la estadística $\overline{X}$ es definido por la desigualdad $\overline{X} < 9{,}342$. ▶

La resolución que se toma basándose en el criterio de significación puede ser errónea. Supongamos que el valor muestral de la estadística del criterio va a parar en el dominio crítico y la hipótesis H_0 se rechaza de acuerdo con el criterio. No obstante, si la hipótesis H_0 es cierta, la resolución que se toma es injusta. El error que se comete al rechazar una hipótesis cierta H_0 se llama *error de primer género*. Es evidente que la probabilidad de que se cometa el error de primer género es igual a la probabilidad de que la estadística del criterio tome un valor perteneciente al dominio crítico a condición de que sea justa la hipótesis H_0, es decir, sea igual al nivel de significación α:

$$\mathbf{P}[Z \in V_k / H_0] = \alpha. \tag{1}$$

Un error de segundo género ocurre en el caso en que se acepta la hipótesis H_0, pero en realidad es cierta la hipótesis alternativa H_1. La probabilidad del error de segundo género β puede ser calculada (para una hipótesis alternativa H_1 simple) con ayuda de la fórmula

$$\beta = \mathbf{P}[Z \in V \setminus V_k / H_1]. \tag{2}$$

EJEMPLO 2. Quedando válidos los datos del ejemplo 1, supongamos que junto con la hipótesis H_0: $m = 10$ l se examina la hipótesis alternativa H_1 : $m = 9$ l. En calidad de estadística del criterio volvamos a tomar la media muestral $\overline{X}$. Supongamos que el dominio crítico está definido por la desigualdad siguiente $\overline{X} < 9{,}44$ l. Hallar la probabilidad de los errores de primero y segundo géneros para el criterio con tal dominio crítico.

◀ Hallemos la probabilidad del error de primer género. La estadística $\overline{X}$ del criterio, a condición de que sea cierta la hipótesis H_0: $m = 10$, tiene la distribución normal $N(10, \sqrt{4/25})$. Con ayuda de la fórmula (1), utilizando la tabla S1, encontramos

$$\alpha = \mathbf{P}[\overline{X} < 9{,}44/H_0: m = 10] =$$

$$= \Phi\left(\frac{9{,}44 - 10}{\sqrt{4/25}}\right) = \Phi(-1{,}4) = 1 - \Phi(1{,}4) \approx 0{,}08.$$

Esto quiere decir que el criterio aceptado clasifica ~8% de automóviles que tienen el consumo de 10 l para 100 km de recorrido como automóviles que tienen un gasto menor de combustible. A condición

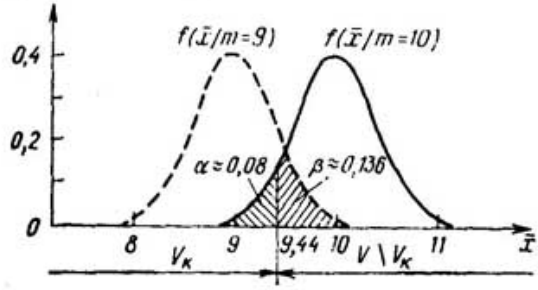


Fig. 177

de que sea justa la hipótesis H_1: $m = 9$, la estadística $\overline{X}$ tiene la distribución normal $N(9, \sqrt{4/25})$. Según la fórmula (2) la probabilidad del error de segundo género es igual a

$$\beta = P[\overline{X} \geqslant 9{,}44/H_1: m = 9] = 1 - \Phi\left[\frac{9{,}44 - 9}{\sqrt{4/25}}\right] = 1 - \Phi(1{,}1) \approx 0{,}136.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el criterio aceptado, el 13,6% de automóviles que tienen el consumo de combustible igual a 9 l por 100 km de recorrido se clasifican como automóviles que tienen el consumo de 10 l. Las probabilidades de los errores de primero y segundo géneros se muestran en la fig. 177 en forma de áreas rayadas debajo de las curvas de densidades de distribución de la estadística del criterio. ▶

Supongamos que se verifica la hipótesis H_0: $\theta = \theta_0$ y V_k es el dominio crítico del criterio que tiene el valor asignado del nivel de significación α. Se denomina *función de potencia* $\mathcal{M}(V_k, \theta)$ del criterio la probabilidad de que se rechace la hipótesis H_0 como función del parámetro θ, o sea,

$$\mathcal{M}(V_k, \theta) = \mathbf{P}[Z \in V_k \mid \theta]. \qquad (3)$$

La probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 para cada valor concreto del parámetro θ se llama *potencia del criterio*. Es claro que $\mathcal{M}(V_k, \theta_0) = \alpha$. Si la hipótesis alternativa H_1 es simple, con la particularidad de que H_1: $\theta = \theta_1$, entonces la potencia del criterio es igual a $1 - \beta$, o sea,

$$\mathcal{M}(V_k, \theta_1) = 1 - \beta.$$

Por lo general se construye un *gráfico de la función de potencia*, calculando la potencia del criterio para varios valores del parámetro θ.

EJEMPLO 3. Construir el gráfico de la función de potencia del criterio de significación en el ejemplo 2 si se utilizan:

a) muestra de volumen $n = 25$;

b) muestra de volumen $n = 100$.

◀ a) Calculemos la potencia del criterio para varios valores del parámetro m. Utilizando los datos del ejemplo 2 (V_k: $\overline{X} < 9{,}44$, $\sigma^2 = 4$) y la fórmula (3), para $n = 25$ tenemos

$$\mathcal{M}(V_k, m) = \mathbf{P}[\overline{X} < 9{,}44 \mid_m] = \Phi\left(\frac{9{,}44 - m}{\sqrt{4/25}}\right).$$

Haciendo uso de la tabla S1, obtenemos los siguientes valores de la potencia del criterio:

m	$z = \frac{9{,}44 - m}{\sqrt{4/25}}$	$\mathcal{M}(V_k, m)$
8,50	2,350	0,991
8,75	1,725	0,958
9,00	1,100	0,864
9,25	0,475	0,682
9,50	—0,150	0,440
9,75	—0,775	0,219
10,00	—1,400	0,081

b) Análogamente, para $n = 100$ obtenemos los siguientes valores de la potencia del criterio:

m	$z = \frac{9{,}44 - m}{\sqrt{4/100}}$	$\mathcal{M}(V_k, m)$
8,50	4,70	1,000
8,75	3,45	1,000
9,00	2,20	0,986
9,25	0,95	0,829
9,50	—0,30	0,302
9,75	—1,55	0,061
10,00	—2,80	0,003

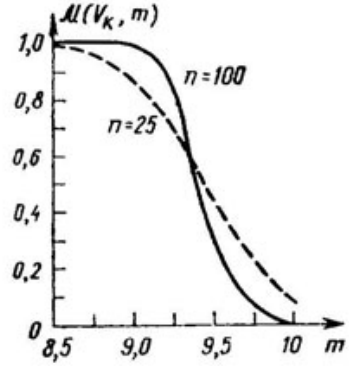


Fig. 178

Los gráficos de las funciones de potencia están representados en la fig. 178. ▶

Para la probabilidad dada α del error de primer género la del error de segundo genero puede ser disminuida aumentado el volumen de la muestra. En este caso si la probabilidad del error de segundo género no debe sobrepasar el valor dado β, el volumen mínimo n de la

muestra se puede encontrar resolviendo el sistema

$$\begin{cases} P[Z \in V_k/H_0] = \alpha, \\ P[Z \in V \setminus V_k/H_1] \leqslant \beta. \end{cases}$$

La resolución analítica de este sistema no es posible sino en casos elementales.

EJEMPLO 4. ¿Qué volumen mínimo n de la muestra es necesario tomar, quedando válidos los datos del ejemplo 1, para que al verificar la hipótesis H_0: $m = 10$ l frente a la hipótesis alternativa H_1: $m = 9$ l el error de primer género sea igual a $\alpha = 0{,}01$ y el de segundo género no exceda 0,1? ¿Cuál es el dominio crítico en este caso?

◀ Puesto que en la hipótesis alternativa H_1 se supone menor valor del parámetro m, el dominio crítico V_k se define por la desigualdad $\overline{X} < \overline{x}_k$. Según los datos del problema tenemos

$$\begin{cases} P[\overline{X} < \overline{x}_k/H_0\colon\ m = 10] = \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_k - 10}{\sqrt{4/n}}\right) = 0{,}01. \\ P[\overline{X} \geqslant \overline{x}_k/H_1\colon m = 9] = 1 - \Phi\left(\dfrac{\overline{x}_k - 9}{\sqrt{4/n}}\right) \leqslant 0{,}1. \end{cases}$$

Podemos escribir este sistema así:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{x}_k - 10}{2}\sqrt{n} = u_{0{,}01} = -2{,}326, \\ \dfrac{\overline{x}_k - 9}{2}\sqrt{n} \geqslant u_{0{,}9} = 1{,}282. \end{cases}$$

Eliminando $\overline{x}_k$, obtenemos que $n \geqslant 53$. Sustituyendo el valor mínimo de n en la primera ecuación del sistema, hallamos la frontera del dominio crítico:

$$\overline{x}_k = 10 - \frac{2 \cdot 2{,}326}{\sqrt{53}} \approx 9{,}361.$$

Por consiguiente, el dominio crítico V_k es definido por la desigualdad $\overline{X} < 9{,}361$. ▶

La verificación de las hipótesis estadísticas con utilización de los criterios de significación puede ser realizada basándose en los *intervalos confidenciales. Para todas las hipótesis paramétricas que se examinan en los puntos* 2—4 *el dominio de acepción de la hipótesis* H_0: $\theta = \theta_0$ *al nivel de significación* α *coincide con el intervalo confidencial para el parámetro* θ, *siendo la probabilidad fiducial igual a* $1 - \alpha$. En este caso al criterio unilateral de significación corresponde el intervalo confidencial unilateral y al criterio bilateral de significación, el intervalo confidencial bilateral. La hipótesis H_0 se acepta si el valor θ_0 es cubierto por el intervalo confidencial respectivo; en el caso contrario la hipótesis H_0 se rechaza.

Si se verifica la hipótesis H_0: $\theta_1 = \theta_2$, se examina el intervalo confidencial para la diferencia $\theta_1 - \theta_2$. La hipótesis H_0 se acepta si el intervalo confidencial para la diferencia $\theta_1 - \theta_2$ cubre el valor nulo.

La excepción consiste en la verificación de la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas de H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; puesto que el intervalo confidencial se construye para la relación de las varianzas, la hipótesis H_0 en este caso se acepta si el intervalo en cuestión cubre el valor igual a la unidad.

EJEMPLO 5. Quedando válidos los datos del ejemplo 1, verificar la hipótesis H_0: $m = 10$ l con la hipótesis alternativa H_1: $m < 10$ l al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, utilizando el intervalo confidencial para el parámetro m.

◀ Encontremos la cota m_2 del intervalo confidencial a la izquierda $(-\infty, m_2)$ para el parámetro m, siendo la probabilidad fiducial $1 - \alpha = 0{,}95$ (§ 3, p. 1). Utilizando la media muestral $\bar{x} = 9{,}3$ y el valor del cuantil $u_{0{,}95} = 1{,}645$, obtenemos

$$m_2 = \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 9{,}3 + \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1{,}645 = 9{,}958.$$

Puesto que el valor $m = 10$ no es cubierto por el intervalo $(-\infty, 9{,}958)$, la hipótesis H_0 debe ser rechazada, lo que coincide con el resultado obtenido al resolver el ejemplo 1. ▶

4.1. Una máquina automática fabrica bolas de 10 mm de diámetro. Los artículos producidos por la máquina se someten al control verificando la magnitud X, o sea, la desviación del diámetro de la bola respecto al tamaño nominal igual a 10 mm. Supongamos que X es una variable aleatoria normalmente distribuida que tiene por esperanza matemática m y por varianza $\sigma^2 = 0{,}1$ mm^2. Examinar las hipótesis siguientes:

$H^{(1)}$: $m = 0$,

$H^{(2)}$: $m \neq 0$,

$H^{(3)}$: $-1 \leqslant m \leqslant 1$,

$H^{(4)}$: material utilizado para fabricar las bolas contiene aditivos especiales.

Determinar ¿cuáles de las hipótesis $H^{(1)} - H^{(4)}$ son estadísticas, qué hipótesis estadísticas son simples y qué hipótesis estadísticas son compuestas?

4.2. Al lanzar una moneda 10 veces, el escudo sale X veces. Clasificar las hipótesis siguientes:

$H^{(1)}$: X tiene la distribución binomial $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$;

$H^{(2)}$: X tiene la distribución binomial $B(10, p)$ con la particularidad de que $\frac{1}{3} \leqslant p \leqslant \frac{2}{3}$;

$H^{(3)}$: $\mathbf{P}[X \leqslant 3] > 1/2$;

$H^{(4)}$: la moneda no es simétrica.

4.3. Se considera que un revestimiento anticorrosivo nuevo tiene una efectividad igual al 99% si entre 20 muestras

probadas no hay ninguna que contenga los vestigios de corrosión; en el caso contrario la efectividad del revestimiento se toma igual al 90%. Sea p la probabilidad de que aparezcan vestigios de corrosión en una muestra. Supongamos que las muestras se elaboran y se ensayan independientemente unas de otras. Examinemos la hipótesis nula $H_0 : p = 0{,}10$ y la hipótesis alternativa $H_1 : p = 0{,}01$. Responder a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué estadística del criterio se utiliza en el problema dado y cuáles son la distribución y el dominio de variación de la misma?

b) ¿Cuál es el dominio crítico del criterio?

c) ¿En qué consisten los errores de primero y segundo géneros y a qué son iguales sus probabilidades?

4.4. ¿ En qué casos y qué género de error ha sido cometido al verificar la hipótesis H_0 con ayuda de cierto criterio si:

a) H_0 es cierta, pero debe ser rechazada según el criterio;

b) H_0 no es cierta, pero debe ser aprobada según el criterio;

c) H_0 es cierta y debe ser aprobada según el criterio;

d) H_0 no es cierta y debe ser rechazada según el criterio?

4.5. El objeto que se observa puede ser objeto amigo o enemigo. Según el sistema de detección el objeto pertenece a una de las clases de acuerdo con los resultados de varias mediciones de determinadas características. Enunciar las hipótesis nula y alternativa si debido al error de primer género el objeto enemigo se toma por amigo. ¿En qué consiste el error de segundo género?

4.6. El funcionamiento de un dispositivo se comprueba con ayuda de un test especial. Si el dispositivo funciona bien, la probabilidad de superar el test es igual a 0,99; en el caso contrario la probabilidad de pasar el test es igual a 0,40. El dispositivo se admite para el trabajo si el test se supera 5 veces seguidas. Suponiendo que el número de veces de pasar el test se subordina a la distribución binomial, responder a las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es el dominio de variación y el dominio crítico del criterio? ¿Qué distribución tiene la estadística del criterio?

b) ¿Cómo formular la hipótesis nula si el error de primer género consiste en que se rechaza el dispositivo que funciona bien?

c) ¿Cuál es la hipótesis alternativa y en qué consiste el error de segundo género?

d) ¿A qué son iguales los errores de primero y segundo géneros?

4.7. Una gran partida de artículos puede contener cierta porción de artículos defectuosos. El proveedor afirma que esta porción constituye el 5%, mientras que el comprador supone que la porción de artículos defectuosos es igual al 10%. Las condiciones de suministro son las siguientes: de la partida se escogen al azar 10 artículos y se someten a la comprobación. La partida se recibe con las condiciones del proveedor si durante la comprobación se revela un solo artículo defectuoso; en el caso contrario la partida se recibe considerando válidas las condiciones del comprador. Enunciar este problema utilizando los términos de la teoría de verificación de las hipótesis estadísticas y responder a las preguntas siguientes:

a) ¿Cuál es la estadística del criterio y el dominio de valores de la misma? ¿Cuál es el dominio crítico?

b) ¿Qué distribución tiene la estadística del criterio?

c) ¿En qué consisten la hipótesis en comprobación y la alternativa?

d) ¿En qué consisten los errores de primero y segundo géneros y cuáles son sus probabilidades?

4.8. Se toma una muestra de pernos de volumen $n = 36$ fabricados por una máquina automática que elabora estos artículos, siendo $m_0 = 40$ mm el valor nominal del tamaño sometido al control. La media muestral de la dimensión que se controla $\bar{x} = 40{,}2$ mm. Los resultados de las mediciones precedentes permiten suponer que las dimensiones reales de los pernos forman una población normalmente distribuida con la varianza $\sigma^2 = 1$ mm^2. Basándose en los resultados de la investigación muestral realizada ¿se puede afirmar que el tamaño sometido al control de los pernos fabricados por la máquina automática no tiene una desviación positiva respecto al tamaño nominal? Tomar $\alpha = 0{,}01$. ¿Cuál es el dominio crítico en este caso?

4.9. Resolver el problema 4.8, utilizando el intervalo confidencial para el parámetro m.

4.10. Supongamos que, quedando válidos los datos del problema 4.8, la partida de pernos con el tamaño nominal $m_0 = 40$ mm se desecha si el tamaño medio muestral some-

tido al control será más que 40,1 mm. Cumplir las tareas siguientes:

a) Hallar la probabilidad de los errores de primero y segundo géneros, siendo la hipótesis alternativa H_1: $m = 40{,}3$, si la resolución se toma basándose en la muestra de volumen $n = 36$.

b) Calcular la potencia del criterio para los valores de $m = 40,\ 0;\ 40{,}1;\ 40{,}2;\ \ldots;\ 40{,}5$ a condición de que la resolución se tome basándose en la muestra de volumen $n = 36$ y en la muestra de volumen $n = 100$. Utilizando estos resultados, construir el gráfico de la función de potencia.

4.11*. Resolver el problema 4.10 si la partida de pernos se desecha al cumplirse una de las desigualdades $\bar{x} > 40{,}1$ mm y $\bar{x} < 39{,}9$ mm, donde $\bar{x}$ es la media muestral media del tamaño sometido al control.

4.12. Quedándo válidos los datos del problema 4.10, para verificar la hipótesis H_0: $m = 40$ mm frente a la hipótesis alternativa H_1: $m = 40{,}3$ mm se propone escoger el dominio crítico V_k: $40{,}15 < \bar{x} < 40{,}20$. Hallar las probabilidades de los errores de primero y segundo géneros. Mostrar estos errores en los gráficos de densidades de distribución de la estadística $\bar{X}$: $f(\bar{x}/H_0)$ y $f(\bar{x}/H_1)$.

4.13. Quedando válidos los datos del problema 4.8 ¿qué volumen mínimo n de la muestra es necesario tomar para que durante la verificación de la hipótesis H_0: $m = 40$ mm frente a la hipótesis alternativa H_1: $m = 40{,}3$ mm, siendo la probabilidad del error de primer género $\alpha = 0{,}10$, la probabilidad del error de segundo género no exceda 0,10? ¿Qué dominio crítico corresponde a estas condiciones para el volumen n de la muestra?

2. Verificación de las hipótesis sobre los parámetros de una población madre normalmente distribuida. En las tablas 4.1 y 4.2 se muestran las estadísticas de los criterios de significación y del dominio de acepción de las hipótesis para verificar las hipótesis de dos especies: hipótesis H_0: $\theta = \theta_0$, donde θ_0 es el valor conocido (patrón) e hipótesis H_0: $\theta_1 = \theta_2$. En el segundo caso, basándose en dos muestras de volúmenes n_1 y n_2 obtenidas a partir de diferentes poblaciones madre, se comparan los valores de dos parámetros θ_1 y θ_2.

EJEMPLO 6. (Comparación de las medias.) Al medir el rendimiento de los grupos han sido obtenidos los siguientes resultados (en kg de materia por una hora de trabajo):

Tabla 4.1.

Criterios de significación para verificar las hipótesis sobre las varianzas de una población madre normalmente distribuida

Hipótesis en comprobación H_0	Suposición respecto a m	Estadística Z del criterio*)	Distribución de Z: $f(z/H_0)$	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio bilateral	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio a la derecha
$\sigma^2=\sigma_0^2$	m es conocida	$\frac{nS_0^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n)<\frac{ns_0^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha/2}(n)$	$H_1\colon \sigma^2>\sigma_0^2$ $\frac{ns_0^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n)$
	m es desconocida $\tilde{m}=\bar{X}$	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)<\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<$ $<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$	$H_1\colon \sigma^2>\sigma_0^2$ $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	m_1 y m_2 son conocidas	S_{01}^2/S_{02}^2, $s_{01}^2>s_{02}^2$	$F(n_1, n_2)$	$\frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}<F_{1-\alpha/2}(n_1, n_2)$	$H_1\colon \sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}<F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	m_1 y m_2 son desconocidas, $\tilde{m}_1=\bar{X}_1$, $\tilde{m}_2=\bar{X}_2$	S_1^2/S_2^2, $s_1^2>s_2^2$	$F(n_1-1,$ $n_2-1)$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,$ $n_2-1)$	$H_1\colon \sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha}(n_1-1,$ (n_2-1)

$\sigma_1^2=\sigma_2^2$	m_1 y m_2 son desconocidas, $\tilde{m}_1=\overline{X}_1$, $\tilde{m}_2=\overline{X}_2$	S_1^2/S_2^2, $s_1^2>s_2^2$	$F(n_1-1, n_2-1)$	$\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$	$H_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$ $\frac{s_1^2}{s_2^2}<F_{1-\alpha}(n_1-1, (n_2-1)$

Continuación de la tabla 4.1.

Criterio de Bartlett para comparar las varianzas de varias poblaciones

H_0	Suposición respecto a m_1	Estadística Z del criterio*)	$f(z/H_0)$	Dominio de aceptación de la hipótesis
$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\ldots$ $\ldots=\sigma_l^2$	m_i son desconocidas, $i=1, 2, \ldots, l$	$\frac{1}{c}\left[\sum_{i=1}^{l}(n_i-1)\ln S^2-\sum_{i=1}^{l}(n_i-1)\times\ln S_i^2\right]$, donde $c=1+\frac{1}{3(l-1)}\times\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{n_i-1}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{l}(n_i-1)}\right]$, $S^2=\frac{\sum(n_i-1)S_i^2}{\sum(n_i-1)}$	$\chi^2(l-1)$	$z_m<\chi^2_{1-\alpha}(l-1)$

*) El valor de la estadística Z se da a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta.

Criterios de significación para verificar las hipótesis sobre las medias de una población madre normalmente distribuida

Hipótesis en comprobación H_0	Suposición respecto a σ^2	Estadística Z del criterio*)	Distribución de Z: $f(z/H_0)$	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio bilateral	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio a la derecha
$m = m_0$	σ^2 es conocida	$\dfrac{\bar{X}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$N(0, 1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x}-m_0\rvert}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha/2}$	$\dfrac{\bar{x}-m_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{1-\alpha}$
	σ^2 es desconocida	$\dfrac{\bar{X}-m_0}{S/\sqrt{n}}$	$T(n-1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x}-m_0\rvert}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha/2}(n-1)$	$\dfrac{\bar{x}-m_0}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)$
$m_1 = m_2$	σ_1^2 y σ_2^2 son conocidas	$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0, 1)$	$\dfrac{\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}$	$\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} < u_{1-\alpha}$

Continuación de la tabla 4.2.

Hipótesis en comprobación H_0	Suposición respecto a σ^2	Estadística Z del criterio*)	Distribución de Z: $f(z/H_0)$	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio bilateral	Dominio de aceptación de la hipótesis H_0 para el criterio a la derecha
$m_1=m_2$	σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas, la hipótesis H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ se acepta, $\tilde{\sigma}_1^2=S_1^2$, $\tilde{\sigma}_2^2=S_2^2$	$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{S\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$ donde $S=\left(\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\right)^{1/2}$	$T(n_1+n_2-2)$	$\dfrac{\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert}{s\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s\sqrt{1/n_1+1/n_2}}<t_{1-\alpha}(n_1+n_2-2)$
$m_1=m_2$	σ_1^2 y σ_2^2 son desconocidas, la hipótesis H_0: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ se rechaza, $\tilde{\sigma}_1^2=S_1^2$, $\tilde{\sigma}_2^2=S_2^2$	$\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}}$	$T(k)$, donde $k=\dfrac{(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)^2}{\dfrac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\dfrac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$	$\dfrac{\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}<t_{1-\alpha/2}(k)$	$\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2/n_1+s_2^2/n_2}}<t_{1-\alpha}(k)$

*) El valor de la estadística Z se da a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta.

Nº de medición	1	2	3	4	5
Grupo A	14,1	10,1	14,7	13,7	14,0
Grupo B	14,0	14,5	13,7	12,7	14,1

¿Se puede considerar que los rendimientos de los grupos A y B son iguales suponiendo que ambas muestras han sido obtenidas a partir de las poblaciones madre normalmente distribuidas? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Se verifica la hipótesis H_0: $m_1 = m_2$ frente a la hipótesis alternativa H_1: $m_1 \neq m_2$. Calculemos las estimaciones de las medias y de las varianzas:

$$\bar{x}_1 = 13{,}32, \quad \bar{x}_2 = 13{,}80, \quad s_1^2 \approx 3{,}37, \quad s_2^2 \approx 0{,}46.$$

Verifiquemos previamente la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (tabla 4.1, cuarta fila) $\frac{s_1^2}{s_2^2} \approx \frac{3{,}37}{0{,}46} \approx 7{,}33$; puesto que $F_{1-\alpha/2}(n_1-1,\ n_2-1) = F_{0{,}95}(4,4) = 6{,}39$

(tabla S7), la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas se rechaza. Para comprobar la hipótesis sobre la igualdad de las medias utilicemos el criterio contenido en la tabla 4.2 (fila inferior). Calculemos el valor muestral de la estadística del criterio:

$$\frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}} = \frac{|13{,}32 - 13{,}80|}{\sqrt{\frac{3{,}37}{5} + \frac{0{,}46}{5}}} \approx 0{,}55.$$

El número de los grados de libertad $k \approx \dfrac{\left(\frac{3{,}37}{5} + \frac{0{,}46}{5}\right)^2}{\frac{\left(\frac{3{,}37}{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{0{,}46}{5}\right)^2}{4}} \approx 5.$

Puesto que según la tabla S6 $t_{0{,}95}(5) = 2{,}015$, la hipótesis sobre la igualdad de las medias se acepta.

EJEMPLO 7. (Comparación de las varianzas de varias poblaciones madre.) En la tabla 4.3 se dan los resultados de mediciones del rendimiento de 6 grupos y las estimaciones de las varianzas s_i^2, $i = 1, 2, \ldots, 6$, de estas mediciones. Utilizando estos datos, verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas σ_i^2. Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Para verificar la hipótesis H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_6^2$ hagamos uso del criterio de Bartlett (tabla 4.1, fila inferior). Previamente cal-

Tabla 4.3

Nº de medición	Grupos					
	1	2	3	4	5	6
1	14,0	14,1	14,0	14,5	12,5	14,0
2	14,5	10,1	12,3	14,2	12,3	14,0
3	13,7	14,7	12,8	15,0	11,5	13,5
4	12,7	13,7	11,0	14,7	12,9	14,7
5	14,1	14,0	13,1	13,5	12,8	13,6
s_i^2	0,46	3,37	1,22	0,33	0,31	0,22

culemos

$$s^2 = \frac{4 \cdot (0{,}46 + 3{,}37 + 1{,}22 + 0{,}33 + 0{,}31 + 0{,}22)}{4 \cdot 6} \approx 0{,}98,$$

$$c \approx 1 + \frac{1}{3 \cdot (6-1)} \left[6 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{6 \cdot 4} \right] \approx 1{,}097.$$

El valor muestral z_m de la estadística del criterio es igual a

$$z_m \approx \frac{1}{1{,}097} [6 \cdot 4 \cdot \ln 0{,}98 - 4 (\ln 0{,}46 + \ln 3{,}37 + \ln 1{,}22 + \\ + \ln 0{,}33 + \ln 0{,}31 + \ln 0{,}22] \approx 11{,}07.$$

Con ayuda de la tabla S5 hallamos $\chi^2_{0,90}(5) = 9{,}24$. Puesto que el valor muestral de la estadística del criterio supera el cuantil $\chi^2_{0,90}(5)$, la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas se rachaza. ▶

En los problemas 4.14—4.43 se supone que las muestras están obtenidas a partir de las poblaciones madre que tienen la distribución normal o una distribución suficientemente próxima a la normal.

4.14. De acuerdo con las condiciones técnicas el tiempo medio del funcionamiento irreprochable para los aparatos que forman una gran partida debe constituir 1000 horas, como mínimo, con la desviación típica (estándar) igual a 100 horas. La media muestral del tiempo en que 25 aparatos escogidos al azar han funcionado irreprochablemente es igual a 970 horas. Supongamos que la desviación típica del tiempo de un funcionamiento irreprochable de los aparatos contenidos en la muestra coincide con la desviación típica en toda la partida. ¿Se puede considerar que toda la

partida de aparatos no satisface las condiciones técnicas si: a) $\alpha = 0{,}10$; b) $\alpha = 0{,}01$?

4.15. Resolver el problema 4.14 a condición de que la estimación de la desviación típica del tiempo de un funcionamiento irreprochable, calculada sobre la base de la muestra, es igual a $s = 115$ horas.

4.16. Hallar la potencia del criterio utilizado en el problema 4.14 si la hipótesis alternativa supone que el tiempo medio del trabajo irreprochable es igual a 950 horas. ¿Qué volumen debe tener la muestra para que en estas condiciones la probabilidad del error de segundo género no exceda 0,1?

4.17. Se afirma que las bolas fabricadas por una máquina automática tienen el diámetro medio $d_0 = 10$ mm. Utilizando el criterio unilateral para $\alpha = 0{,}05$, verificar esta hipótesis si en la muestra compuesta por $n = 16$ bolas el diámetro medio es igual a 10,3 mm, al suponer que a) la varianza es conocida y equivale a $\sigma^2 = 1$ mm^2; b) la estimación de la varianza, determinada según la muestra, $s^2 = 1{,}21$ mm^2.

4.18. Calcular la potencia del criterio en el problema 4.17, suponiendo que la varianza se conoce y es $\sigma^2 = 1$, para varias hipótesis alternativas $H_1 : d = d_1$ con la particularidad de que $d_1 = 10{,}1; 10{,}2; \ldots; 10{,}5$, si a) el volumen de la muestra $n = 100$; b) el volumen de la muestra $n = 16$. Utilizando los resultados obtenidos, construir el gráfico de la función de potencia del criterio y hallar las probabilidades de los errores de segundo género frente a la hipótesis alternativa $H_1 : d_1 = 10{,}25$.

4.19. De una gran partida de resistores del mismo tipo y del mismo valor nominal han sido escogidas al azar 36 piezas. En este caso la resistencia media muestral es igual a 9,3 kΩ. Utilizando el criterio bilateral para $\alpha = 0{,}05$, comprobar la hipótesis de que la muestra ha sido tomada de la partida con el valor nominal de 10 kΩ, si:

a) la varianza de la resistencia es conocida y equivale a 4 kΩ^2;

b) la varianza de la resistencia es desconocida, mientras que la varianza muestral es igual a 6,25 kΩ^2.

4.20. Resolver el problema 4.19, utilizando los intervalos confidenciales para el valor medio de la resistencia.

4.21. Calcular la potencia del criterio en el problema 4.19 a) si la hipótesis alternativa supone que el valor nominal de la partida es igual a 9,5 kΩ. ¿Qué volumen de la

muestra es necesario tomar para que el error de segundo género no exceda 0,01?

4.22*. Construir los gráficos de la función de potencia del criterio para el problema 4.19 a) si $n = 36$ y $n = 100$.

4.23. La tecnología de fabricación de cierta sustancia permite obtener, por término medio, 1000 kg de materia al día con la desviación típica de la media igual a 80 kg. Una nueva tecnología de fabricación da la posibilidad de obtener, por término medio, 1100 kg de materia al día con la misma desviación típica. ¿Se puede considerar que la nueva tecnología asegura el aumento del rendimiento si: a) $\alpha = 0{,}05$; b) $\alpha = 0{,}10$?

4.24. Calcular en el problema 4.23 la probabilidad del error de segundo género frente a la hipótesis alternativa que afirma que el rendimiento ha crecido al utilizar la nueva tecnología y alcanza 1200 kg de sustancia al día.

4.25. Se espera que la adición de sustancias especiales hace disminuir la dureza del agua. Las estimaciones de la dureza del agua, realizadas antes de añadir sustancias especiales y después de añadirlas en 40 y 50 muestras, respectivamente, han mostrado los valores medios de la dureza (en grados de dureza) iguales a 4,0 y 3,8 grados. En ambos casos la varianza de mediciones se supone igual a 0,25 grad^2. ¿Confirman estos resultados el efecto que se espera? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.26. Resolver el problema 4.25, utilizando el método de intervalos confidenciales.

4.27. Dos oficiales de derrota han determinado la marcación de un faro, efectuando varias mediciones con ayuda de diferentes goniómetros. Los resultados de las mediciones son los siguientes: $\bar{x}_1 = 70{,}2°$ para $n_1 = 4$ y $\bar{x}_2 = 70{,}5°$ para $n = 9$. Valiéndose del criterio bilateral, comprobar para $\alpha = 0{,}05$ la hipótesis de que la diferencia de los resultados se debe exclusivamente a los errores aleatorios si las desviaciones típicas para ambos goniómetros son conocidas y equivalen a $\sigma_1 = 0{,}5°$ y $\sigma_2 = 1°$.

4.28. Resolver el problema 4.27, utilizando el método de intervalos confidenciales.

4.29.** A partir de las poblaciones madre que tienen por distribuciones $N(m_1, \sigma)$ y $N(m_2, \sigma)$ han sido obtenidas dos muestras de volúmenes n_1 y n_2. Se propone rechazar la hipótesis H_0: $m_1 = m_2$ si los intervalos confidenciales para m_1 y m_2 no se intersecan. Mostrar que para la probabilidad

fiducial igual a $1 - \alpha$ el nivel de significación de este criterio es menor que α.

4.30. El ajuste preciso de una máquina automática que fabrica ciertas piezas es caracterizado por la varianza de la longitud de las piezas. Si esta magnitud es mayor que 400 μm^2 la máquina se para para el ajuste. La varianza muestral de las longitudes de 15 piezas escogidas al azar entre un gran número de estos artículos resulta igual a $s^2 = 680\ \mu^2$. ¿Es necesario realizar el ajuste de la máquina si: a) el nivel de significación $\alpha = 0{,}01$; b) el nivel de significación $\alpha = 0{,}10$?

4.31. Un nuevo método de medir la longitud de piezas ha sido probado valiéndose del patrón con la particularidad de que la varianza de los resultados de medición, determinada con diez mediciones, constituye 100 μ^2. ¿Concuerda o no este resultado con la afirmación: «la varianza de los resultados de medición con ayuda del método propuesto no excede 50 μ^2»? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.32. Al aplicar una operación determinada relacionada con la comprobación del coeficiente de frotamiento de un neumático contra el asfalto de una carretera, se ha determinado que la varianza de los resultados de medición de este coeficiente constituye 0,1. El valor muestral de la varianza, calculado basándose en los resultados de 25 mediciones del coeficiente de frotamiento resulta igual a 0,20.

a) Utilizando el criterio bilateral, verificar la hipótesis de que la varianza de los resultados de medición del coeficiente de frotamiento es igual a 0,1 si $\alpha = 0{,}1$.

b) Resolver el problema, utilizando el método de intervalos confidenciales.

4.33. Dos tornos automáticos fabrican las piezas según el mismo dibujo. Entre los artículos fabricados por el primer torno han sido escogidas $n_1 = 9$ piezas y entre los fabricados por el segundo torno, $n_2 = 11$ piezas. Las varianzas muestrales del tamaño de control, determinadas basándose en estas muestras, son $s_1^2 = 5{,}9\ \mu^2$ y $s_2^2 = 23{,}3\ \mu^2$. Verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas para $\alpha = 0{,}05$ si la hipótesis alternativa afirma que: a) las varianzas no son iguales; b) la varianza del tamaño para el segundo torno es mayor que para el primero.

4.34. Antes de someter al ajuste una máquina herramienta ha sido comprobada la precisión de fabricación de 10 casquillos y hallado el valor de estimación de la varianza del diámetro $s^2 = 9{,}6\ \mu^2$. Una vez realizado el ajuste, han

sido controlados 15 casquillos más y obtenido un nuevo valor de estimación de la varianza $s^2 = 5{,}7\ \mu^2$. ¿Se puede considerar que como resultado del ajuste del torno la precisión de fabricación de las piezas se ha aumentado? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.35. La presión creada en una cámara se controla con ayuda de dos manómetros. Para comparar la precisión de estos aparatos se leen simultáneamente las indicaciones de los mismos. Basándose en los resultados de 10 mediciones las estimaciones muestrales (en las unidades de la escala de los aparatos) resultan las siguientes: $\bar{x}_1 = 15{,}3$, $\bar{x}_2 = 16{,}1$, $s_1^2 = 0{,}2$ y $s_2^2 = 0{,}15$. Utilizando los criterios bilateral y unilateral, comprobar para $\alpha = 0{,}1$: a) la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas; b) la hipótesis sobre la igualdad de las medias.

4.36. En dos máquinas herramientas A y B se fabrican unos mismos artículos cuyos diámetros interiores se someten al control. Entre los artículos producidos por la máquina A se toma una muestra compuesta de 16 piezas y entre los artículos producidos por la máquina B, una muestra compuesta de 25 piezas. Las estimaciones muestrales de las medias y de las varianzas de las dimensiones que se controlan $\bar{x}_A = 37{,}5$ mm para $s_A^2 = 1{,}21$ mm^2 y $\bar{x}_B = 36{,}8$ mm para $s_B^2 = 1{,}44$ mm^2. Utilizando el criterio bilateral, verificar la hipótesis sobre la igualdad de las esperanzas matemáticas de las dimensiones sometidas al control en la producción de ambas máquinas, si: a) $\alpha = 0{,}05$; b) $\alpha = 0{,}10$.

4.37. Para la tercera máquina C, que está instalada en el mismo taller que las máquinas A y B del problema 4.36 y fabrica los mismos artículos, las estimaciones de la media y de la varianza del tamaño sometido al control, calculadas basándose en una muestra de 13 artículos, son $\bar{x}_C = 38{,}3$ mm y $s_C^2 = 3{,}08$ mm^2. Utilizando el criterio bilateral al nivel de significación $\alpha = 0{,}10$, verificar la hipótesis sobre la igualdad de las esperanzas matemáticas de la dimensión controlada en la producción de las máquinas: a) A y C); b) B y C.

4.38. Al investigar la influencia que ejercen los revestimientos de dos tipos en la conductividad de los tubos de televisión han sido obtenidos los resultados siguientes (en unidades convencionales):

Nº del tubo	1	2	3	4	5	6	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
Tipo I	6	5	12	9	10	—	42	386
Tipo II	14	11	0	5	6	8	44	442

Basándose en estos datos ¿se puede suponer que el tipo de revestimiento influye en la conductividad de los tubos? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

4.39. Para determinar qué influencia ejerce la temperatura del medio ambiente en el error sistemático del instrumento goniométrico han sido efectuadas las mediciones del ángulo horizontal δ de un objeto durante una mañana ($t = 10$ °C) y durante un día ($t = 26$ °C). Los resultados de medición de δ en segundos angulares son los siguientes:

De mañana	38,2	36,4	37,7	36,1	37,9	37,8	—	—
De día	39,5	38,7	37,8	38,6	39,2	39,1	38,9	39,2

¿Se puede considerar que la temperatura ambiente influye en el error sistemático del instrumento goniométrico? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.40. Durante las pruebas de un radiotelémetro han sido realizadas 16 mediciones independientes de la distancia hasta el objeto de control. El tratamiento de los resultados de medición ha proporcionado los siguientes valores del error del radiotelémetro: $\bar{x}_1 = -0{,}03$ km, $s_1^2 = 0{,}0324$ km^2. Una vez realizado el ajuste del dispositivo, se han efectuado 18 mediciones independientes más y se han obtenido los siguientes valores de las estimaciones: $\bar{x}_2 = 0{,}05$ km, $s_2^2 = 0{,}0225$ km^2. ¿Se puede considerar que el ajuste no ha influido en el error sistemático del radiotelémetro? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

4.41. Al investigar el estabilizador de tensión de un avión en el banco, han sido realizadas 9 pruebas independientes y obtenida la estimación de la varianza de la tensión de salida, igual a 0,08 V^2. En vuelo han sido efectuados 15 ensayos más según los cuales la estimación de la varianza de

la tensión de salida resulta igual a 0,13 V^2. ¿Hay razones para suponer que los factores que influyen sobre el estabilizador en vuelo ejercen una influencia considerable en la precisión del mismo? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

4.42. Verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas de tres poblaciones, utilizando los siguientes resultados de observaciones:

Nº de la muestra	Nº de la observación					$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
	1	2	3	4	5		
1	6	5	12	9	10	42	386
2	14	11	5	6	—	36	378
3	12	4	7	—	—	23	209

Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.43. Verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas, basándose en los datos que se dan a continuación.

a) Varianzas muestrales calculadas según los resultados de tres series de mediciones independientes de la concentración (en tanto por ciento):

$$s_1^2 = 11{,}2,\ s_2^2 = 15{,}8,\ s_3^2 = 10{,}1,\ n_1 = 10,\ n_2 = 7,\ n_3 = 12;$$

tomar $\alpha = 0{,}10$.

b) Varianzas muestrales del tamaño sometido al control (en μ), obtenidas según los resultados de las muestras tomadas de la producción de cuatro máquinas que fabrican unas mismas piezas:

$$s_1^2 = 1{,}16,\ s_2^2 = 4{,}33;\ s_3^2 = 2{,}17;\ s_4^2 = 6{,}41,$$

$$n_1 = 5,\ n_2 = 9,\ n_3 = 6,\ n_4 = 8;$$

tomar $\alpha = 0{,}05$.

3. Verificación de las hipótesis sobre el parámetro p de una distribución binomial. Sea x el valor observable de la variable aleatoria X que tiene la distribución binomial $B(n, p)$ y h, la estimación del parámetro p calculada por la fórmula $h = x/n$. Si el número de observaciones $n > 50$ y el valor muestral de h satisface las condiciones $nh > 5$ y $n(1-h) > 5$, entonces para verificar la hipótesis H_0: $p = p_0$ se utiliza la estadística

$$Z = \frac{h - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}. \qquad (4)$$

A condición de que la hipótesis H_0 sea cierta, la estadística (4) tiene una distribución próxima a la normal $N(0, 1)$. El dominio crítico del criterio, al nivel de significación α, es definido por las desigualdades

$z_m > u_{1-\alpha}$ para la hipótesis alternativa $H_1^{(1)}$: $p > p_0$,

$z_m < u_\alpha$ para la hipótesis alternativa $H_1^{(2)}$: $p < p_0$,

$z_m > u_{1-\alpha/2}$ para la hipótesis alternativa $H_1^{(3)}$: $p \neq p_0$.

Para verificar la hipótesis H_0: $p = p_0$ pueden ser utilizados también los intervalos confidenciales para el parámetro p (§ 3, p. 2). En este caso la hipótesis H_0 se acepta al nivel de significación α si el intervalo confidencial unilateral o bilateral respectivo cubre el valor de p_0; en el caso contrario la hipótesis H_0 se rechaza.

Si el volumen de la muestra $n \leqslant 50$ o no se satisface al menos una de las desigualdades $nh < 5$ y $n(1-h) > 5$, entonces no se pueden utilizar los intervalos confidenciales construidos sobre la base de la aproximación normal. En este caso las cotas de los intervalos confidenciales se determinan con ayuda de las fórmulas (5) y (6) del § 3.

EJEMPLO 8. Se supone que una gran partida de piezas contiene el 15% de la producción defectuosa. Para comprobar esta suposición se escogen de la partida al azar 100 piezas, entre las cuales 10 piezas son defectuosas. Suponiendo que el número de las piezas de desecho en la partida tiene una distribución binomial y utilizando el criterio bilateral para $\alpha = 0{,}05$, verificar la hipótesis de que en la partida hay un 15% de las piezas defectuosas.

◀ Se verifica la hipótesis H_0: $p = 0{,}15$, siendo la hipótesis alternativa H_1: $p \neq 0{,}15$. El valor de $h = \frac{10}{100} = 0{,}1$. Puesto que $n > 50$, $nh = 10$ y $n(1-h) = 9$, para la verificación de la hipótesis H_0 puede utilizarse la estadística (4). El valor muestral

$$z_m = \frac{0{,}1 - 0{,}15}{\sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{100}}} \approx -1{,}4.$$

Con ayuda de la tabla S1 encontramos $u_{0{,}975} = 1{,}96$. El valor z_m está en el dominio de acepción de la hipótesis H_0 por consiguiente, la

suposición de que en la partida hay un 15% de las piezas de desecho se concuerda con los resultados de observaciones. Este mismo resultado se obtiene, utilizando el intervalo confidencial bilateral (0,041; 0,159) para p, siendo la probabilidad fiducial igual a 0,95 (véase el ejemplo 4 del § 3). Como este intervalo confidencial cubre el valor de $p = 0{,}15$, la hipótesis H_0 se acepta. ▶

4.44. En una partida la cantidad de producción defectuosa no debe exceder el 5%. Al controlar 100 piezas de esta partida, se revelan 6 defectuosas. ¿Se puede considerar que el porcentaje de las piezas de desecho sobrepasa el valor admisible cuando $\alpha = 0{,}01$?

4.45. Al lanzar 600 veces un dado el seis aparece 75 veces.

a) ¿Se puede afirmar que el dado es perfecto? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

b) ¿Es cierta la hipótesis de que la probabilidad de que aparezca el seis es menor que 1/6 si $\alpha = 0{,}01$?

4.46. Una urna contiene bolas negras y blancas indistinguibles al tacto. Se supone que la cantidad de bolas negras es igual a la de las blancas. Esta hipótesis se acepta si al extraer 50 bolas (volviendo a meterlas en la urna) el número de bolas negras está dentro de los límites de 20 a 30.

a) ¿Cuál es la probabilidad del error de primer género?

b) Hallar la probabilidad del error de segundo género si la probabilidad de que aparezca una bola negra es igual a 1/3.

4.47*. Al investigar 50 cajas para los microcircuitos, que han sido escogidas al azar de una gran partida de estos artículos, resulta que dos de ellas no tienen resistencia mecánica necesaria. ¿Se concuerdan estos datos con la afirmación de que la partida dada contiene el 99% de las cajas resistentes? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.48*. Entre los artículos producidos por un taller durante un día han sido escogidos al azar y comprobados 20 aparatos. En este caso 16 aparatos han sido reconocidos aptos para el empleo. ¿Se puede considerar que la producción útil del taller constituye el 90% si $\alpha = 0{,}10$?

Para verificar la hipótesis H_0: $p_1 = p_2$ sobre la igualdad de los parámetros de dos poblaciones distribuidas binomialmente se llevan a cabo dos series de pruebas. Supongamos que cierto suceso A en la serie de n_1 pruebas aparece n_{11} veces y en la serie de n_2 pruebas aparece n_{21} veces. Se verifica la hipótesis sobre la igualdad de las probabilidades de producirse el suceso A en ambas series de pruebas. Representemos los resultados de las pruebas en las dos series en forma de una tabla

Serie	Suceso		Suma
	A	$\bar{A}$	
1	n_{11}	n_{12}	n_1
2	n_{21}	n_{22}	n_2
Suma	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	$n_{\cdot\cdot}=n$

Designemos $h_1=\frac{n_{11}}{n_{1\cdot}}$, $h_2=\frac{n_{21}}{n_{2\cdot}}$, $h=\frac{n_{11}+n_{21}}{n_{1\cdot}+n_{2\cdot}}=\frac{n_{\cdot 1}}{n}$.

A condición de que entre las magnitudes $\frac{n_{\cdot i}n_{j\cdot}}{n}$, $i,\ j=1,\ 2,$ la mínima sea mayor que 5, en calidad de la estadística del criterio para verificar la hipótesis H_0: $p_1=p_2$ se utiliza la estadística

$$Z=\frac{h_1-h_2}{\sqrt{\tilde{\sigma}^2_{h_1-h_2}}}, \tag{5}$$

donde $\tilde{\sigma}^2_{h_1-h_2}$ es la estimación de la varianza de la diferencia de las variables h_1 y h_2 que se calcula con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\sigma}^2_{h_1-h_2}=h\,(1-h)\left(\frac{1}{n_{1\cdot}}+\frac{1}{n_{2\cdot}}\right). \tag{6}$$

Si la hipótesis H_0 es cierta, la distribución de la estadística (5) es próxima a la distribución normal $N\,(0,\ 1)$. El dominio crítico del criterio, siendo el nivel de significación α, es definido por las desigualdades

$z_m > u_{1-\alpha}$ siendo la hipótesis alternativa $H(\frac{1}{1})$: $p_1 > p_2$,

$z_m < u_\alpha$ siendo la hipótesis alternativa $H(\frac{2}{1})$: $p_1 < p_2$,

$z_m > u_{1-\alpha/2}$ siendo la hipótesis alternativa $H(\frac{3}{1})$: $p_1 \neq p_2$.

Cuando los resultados de observaciones son tales que la condición $\frac{n_{\cdot i}n_{j\cdot}}{n} > 5$, $i,\ j=1,\ 2,$ no se satisfaga, para la verificación de la hipótesis H_0 conviene utilizar el criterio χ^2 (véase el § 6, p. 3).

EJEMPLO 9. A continuación se representan los resultados de una investigación muestral de dos partidas de artículos:

Nº de la partida	Cantidad de artículos		Suma
	defectuosos	no defectuosos	
1	8	92	100
2	13	287	300
Suma	21	379	400

¿Se puede considerar que la porción de artículos defectuosos en ambas partidas es una misma si el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$?

◀ Se comprueba la hipótesis H_0: $p_1 = p_2$, siendo la hipótesis alternativa H_1: $p_1 \neq p_2$. La condición $\frac{n_{i\cdot} n_{j\cdot}}{n} > 5$, $i, j = 1, 2$, se cumple, por lo tanto, para verificar la hipótesis H_0 puede utilizarse la estadística (5). Basándonos en los resultados de investigación, determinemos

$$h_1 = \frac{8}{100} = 0{,}08, \quad h_2 = \frac{13}{300} \approx 0{,}043, \quad h = \frac{21}{400} \approx 0{,}052.$$

Haciendo uso de la fórmula (6), hallamos previamente la estimación de la varianza:

$$\tilde{\sigma}^2_{h_1 - h_2} = 0{,}052 \cdot (1 - 0{,}052) \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300} \right) \approx 6{,}57 \cdot 10^{-4}.$$

El valor muestral z_m de la estadística del criterio según la fórmula (5)

$$\frac{0{,}08 - 0{,}043}{\sqrt{6{,}57 \cdot 10^{-4}}} \approx 1{,}44.$$

Puesto que $u_{0{,}975} = 1{,}96$, el valor, muestral de la estadística del criterio pertenece al dominio de aceptación de la hipótesis H_0; por eso conviene considerar que la porción de los artículos de desecho en ambas partidas es una misma. ▶

4.49. Dos prensas fabrican piezas iguales. En una partida de piezas producidas por la primera prensa han sido comprobadas 1000 piezas entre las cuales 25 resultan inútiles. Entre 800 piezas producidas por la segunda prensa resultan inútiles 36. ¿Se concuerdan o no estos resultados con la suposición sobre la igualdad de las piezas defectuosas en la producción hecha por las dos prensas cuando $\alpha = 0{,}10$?

4.50. Se supone que el empleo de una nueva tecnología en

la producción de los microcircuitos proporciona un aumento de la producción de buena calidad. Los resultados de control de dos partidas de artículos fabricados con ayuda de la tecnología vieja y la nueva se muestran a continuación:

Artículos	Tecnología	
	vieja	nueva
Útiles	140	185
Inútiles	10	15
En total	150	200

¿Confirman estos resultados la suposición sobre el aumento de la producción útil? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

4.51. Para estudiar la efectividad de un medicamento contra la alergia han sido sometidos al examen dos grupos de individuos predispuestos a esta enfermedad. Los resultados del examen son los siguientes:

Han tomado el medicamento		No han tomado el medicamento	
Han caído enfermos	No han caído enfermos	Han caído enfermos	No han caído enfermos
3	172	32	168

¿Muestran estos resultados la efectividad del medicamento si el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$?

4.52. En 105 experimentos el suceso A se ha producido 42 veces. Una serie repetida de experimentos consta de 195 experimentos y en este caso el suceso A se produce 65 veces. ¿Se puede considerar que la probabilidad del suceso A en ambas series es una misma si los casos de los experimentos son independientes? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

4. Verificación de las hipótesis sobre el coeficiente de correlación ρ. Sea r el coeficiente muestral de correlación calculado según la muestra de volumen n de una población madre que tiene una distribución normal bidimensional.

Para verificar la hipótesis H_0: $\rho_0 =$ donde ρ_0 es el valor dado, se utiliza la estadística

$$Z = \frac{\text{Arth } r - \text{Arth } \rho_0}{1/\sqrt{n-3}}. \tag{7}$$

Si la hipótesis H_0 es cierta, la estadística (7) tiene una distribución próxima a la normal N (0, 1).

El dominio crítico del criterio, siendo el nivel de significación α, es definido por las desigualdades

$z_m > u_{1-\alpha}$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(1)}$: $\rho > \rho_0$.

$z_m < u_\alpha$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(2)}$: $\rho < \rho_0$,

$| z_m | > u_{1-\alpha/2}$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(3)}$: $\rho \neq \rho_0$.

En el caso en que es necesario determinar la significación del valor muestral del coeficiente de correlación r, o sea, verificar la hipótesis H_0: $\rho = 0$, se puede utilizar un otro criterio cuya estadística sea r. Al nivel de significación α el dominio crítico de este criterio es definido por las desigualdades

$$r > \frac{t_{1-\alpha}(n-2)}{\sqrt{n-2+t_{1-\alpha}^2(n-2)}},$$

siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(1)}$: $\rho > 0$;

$$r < \frac{t_\alpha(n-2)}{\sqrt{n-2+t_\alpha^2(n-2)}},$$

siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(2)}$: $\rho < 0$;

$$| r | > \frac{t_{1-\alpha/2}(n-2)}{\sqrt{n-2+t_{1-\alpha/2}(n-2)}},$$

siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(3)}$: $\rho \neq 0$.

EJEMPLO 10. A partir de una población madre que tiene distribución normal bidimensional ha sido obtenida una muestra de volumen $n = 67$. Resulta que el coeficiente muestral de correlación $r = -0{,}159$. ¿Se puede considerar que las variables en observación están correlacionadas negativamente si el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$?

◀ Verifiquemos la hipótesis H_0: $\rho = 0$ siendo la hipótesis alternativa H_1: $\rho < 0$. Calculemos el valor muestral de la estadística del criterio (7). Encontramos el valor Arth r con ayuda de la tabla S8. Tenemos

$$z_m = \frac{\text{Arth } (-0{,}159) - \text{Arth } 0}{1/\sqrt{67-3}} \approx -1{,}28.$$

Puesto que $u_{0,05} = -1{,}645$, el valor muestral de la estadística del criterio pertenece al dominio de aceptación de la hipótesis H_0, por lo tanto, las variables observadas no están correlacionadas.

El mismo resultado se obtiene, haciendo uso del criterio cuya estadística es r. Hallemos la frontera del dominio crítico para la hipó-

tesis alternativa H_1: $\rho < 0$. Determinemos los cuantiles $t_{0,05}(65) = -t_{0,95}(65) \approx -1,67$ (tabla S6). Calculemos la frontera del dominio crítico:

$$\frac{t_\alpha (n-2)}{\sqrt{n-2+t_\alpha^2 (n-2)}} = \frac{-1,67}{\sqrt{67-2+(-1,67)^2}} \approx -0,203.$$

Dado que el valor muestral $r = -0,159$ de la estadística pertenece al dominio de aceptación de la hipótesis H_0, la hipótesis H_0 se acepta; conviene considerar que las variables observadas no están correlacionadas. ▶

Sean r_1 y r_2 los coeficientes muestrales de correlación calculados sobre la base de dos muestras de volúmenes n_1 y n_2 obtenidas a partir de las poblaciones madre que tienen distribución normal bidimensional. Para verificar la hipótesis H_0: $\rho_1 = \rho_2$ se utiliza la estadística

$$Z = \frac{\operatorname{Arth} r_1 - \operatorname{Arth} r_2}{\sqrt{1/(n_1-3)+1/(n_2-3)}}. \qquad (8)$$

A condición de que la hipótesis H_0 sea cierta, la estadística (8) tiene una distribución próxima a la normal $N(0, 1)$. El dominio crítico del criterio, para el nivel de significación α, es definido por las desigualdades

$z_m > u_{1-\alpha}$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(1)}$: $\rho_1 > \rho_2$.

$z_m < u_\alpha$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(2)}$: $\rho_1 < \rho_2$.

$|z_m| > u_{1-\alpha/2}$ siendo la hipótesis alternativa $H_1^{(3)}$: $\rho_1 \neq \rho_2$.

EJEMPLO 11. Comparar los coeficientes de correlación de dos poblaciones madre distribuidas normalmente, basándose en los datos muestrales siguientes: $r_1 = 0,77$, $n_1 = 28$, $r_2 = 0,604$, $n_2 = 33$. Tomar $\alpha = 0,10$.

◀ Tenemos H_0: $\rho_1 = \rho_2$; H_1: $\rho_1 < \rho_2$. Calculemos el valor muestral de la estadística del criterio (8):

$$\frac{\operatorname{Arth} 0,77 - \operatorname{Arth} 0,604}{\sqrt{\frac{1}{28-3}+\frac{1}{33-3}}} \approx 1,85.$$

Puesto que $u_{0,95} \approx 1,645$, el valor muestral de la estadística del criterio pertenece al dominio crítico; los coeficientes de correlación de las poblaciones madre deben considerarse diferentes.

En los problemas 4.53—4.59 se supone que las muestras han sido obtenidas a partir de las poblaciones madre que tienen distribución normal bidimensional.

4.53. El coeficiente muestral de correlación r, calculado sobre la base de una muestra de volumen $n = 39$, es igual a 0,25. Verificar la significación de este resultado, tomando como hipótesis alternativas: a) H_1: $\rho \neq 0$, b) H_1: $\rho > 0$. Aceptar $\alpha = 0,05$.

4.54. Comprobar la significación del coeficiente de correlación, basándose en los datos siguientes:

a) $r = -0{,}41$, $n = 52$, $\alpha = 0{,}1$, hipótesis alternativa $H_1: \rho < 0$;

b) $r = 0{,}15$, $n = 39$, $\alpha = 0{,}01$, hipótesis alternativa $H_1: \rho \neq 0$;

c) $r = -0{,}32$, $n = 103$, $\alpha = 0{,}05$, hipótesis alternativa $H_1: \rho \neq 0$.

4.55. Basándose en una muestra de volumen $n = 28$, ha sido calculado el coeficiente de correlación $r = 0{,}88$. ¿Concuerdan las hipótesis siguientes respecto al coeficiente de correlación de una población madre ρ con los resultados de observaciones: a) $\rho > 0{,}90$; b) $\rho < 0{,}6$; c) $\rho \neq 0{,}96$? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.56. Basándose en dos muestras de volúmenes $n_1 = 28$ y $n_2 = 39$ para las observaciones sobre dos variables determinadas de cierto proceso, han sido calculadas las estimaciones del coeficiente de correlación iguales a $r_1 = 0{,}71$ y $r_2 = 0{,}85$, respectivamente.

a) ¿Se puede considerar que las estimaciones de los coeficientes de correlación, calculadas sobre la base de dos muestras, son verdaderamente diferentes?

b) ¿Para qué valores de r_2 se puede considerar que la diferencia entre las estimaciones de los coeficientes de correlación r_1 y r_2 es insignificativa? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

Resolver el problema 4.56 para los datos siguientes:

4.57. $n_1 = 124$, $r_1 = -0{,}87$, $n_2 = 147$, $r_2 = -0{,}65$, $\alpha = 0{,}10$.

4.58. $n_1 = 12$, $r_1 = 0{,}42$, $n_2 = 19$, $r_2 = 0{,}36$, $\alpha = 0{,}05$.

4.59. $n_1 = 84$, $r_1 = 0{,}95$, $n_2 = 67$, $r_2 = 0{,}82$, $\alpha = 0{,}01$.

5. Determinación del mejor dominio crítico para verificar hipótesis simples. Es evidente que sobre el conjunto de valores de la estadística de un criterio pueden escogerse tantos dominios críticos V_k como se quiera para el nivel dado de significación α; sin embargo, los criterios que les corresponden tendrán, hablando en general, diferentes probabilidades de los errores de segundo género (véase el problema 4.12). Se llama *dominio crítico mejor* (DCM) el dominio crítico el cual, al nivel dado de significación α, asegura la probabilidad mínima del error de segundo género. El criterio que utiliza el DCM tiene la potencia máxima.

Al verificar una hipótesis simple H_0 contra una alternativa simple H_1 el DCM se determina por el LEMA DE NEUMANN-PEARSON: *El DCM del criterio del nivel dado de significación α se compone de puntos del espacio muestral (de las muestras de volumen n) para los cuales se*

satisface la desigualdad

$$\frac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_0)}{L(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_1)} < c_\alpha, \tag{9}$$

donde c_α es la constante que depende del nivel dado de significación; $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los elementos de la muestra y $L(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_i)$, la función de verosimilitud calculada a condición de que sea cierta la hipótesis H_i, $i = 0, 1$.

Para los criterios examinados en los pp. 1—4 las significaciones del DCM se disponen en las «colas» de distribuciones de las estadísticas de criterios.

EJEMPLO 12. Supongamos que X es la variable aleatoria que tiene la distribución normal $N(m, \sigma)$ siendo conocida la varianza σ^2.

a) Hallar el DCM para la verificación de la hipótesis H_0: $m = m_0$ contra la hipótesis alternativa simple H_1: $m = m_1$, donde $m_1 > m_0$.

b) Hallar la función de potencia del criterio y calcular el valor de la misma para $m_1 = 1$ y $m_1 = 5$ si $m_0 = 0$, el volumen de la muestra $n = 25$ y la varianza de la población madre $\sigma^2 = 25$. Tomar el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

◀ a) Escribamos la relación de las funciones de verosimilitud:

$$\frac{L(x_1, x_2, \ldots, x_n/H_0)}{L(x_2, x_2, \ldots, x_n/H_1)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum (x_i - m_0)^2}{2\sigma^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum (x_i - m_1)^2}{2\sigma^2}}} = ae^{-\frac{\bar{x}(m_1 - m_0)}{\sigma^2/n}}$$

donde $a = e^{-\frac{(m_0^2 - m_1^2)}{2\sigma^2/n}}$, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$. Según el lema de Neumann—Pearson el DCM contiene sólo aquellos puntos del espacio muestral para los cuales se satisface la desigualdad (9): $ae^{-\frac{\bar{x}(m_1 - m_0)}{\sigma^2/n}} < c_\alpha$ con la particularidad de que según los datos del problema $m_1 - m_0 > 0$. Puesto que la relación de verosimilitud es una función decreciente del argumento $\bar{x}$, la condición del lema se satisface cuando $\bar{x} > \bar{x}_k$, donde la frontera del dominio crítico $\bar{x}_k$ se determina por el nivel dado de significación α, partiendo de la relación

$$P[\bar{X} > \bar{x}_k/H_0] = \alpha.$$

A condición de que sea válida la hipótesis H_0, $\bar{X}$ tiene la distribución normal $N(m_0, \sigma/\sqrt{n})$, por lo tanto,

$$P[\bar{X} < \bar{x}_k/H_0] = \Phi\left(\frac{\bar{x}_k - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

de donde se deduce que

$$\frac{\bar{x}_k - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} = u_{1-\alpha}.$$

Ahora bien, la frontera $\bar{x}_k$ del dominio ctítico es igual a $m_0 + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y el DCM V_k tiene la forma $\bar{x} > m_0 + u_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

b) Determinemos la función de potencia del criterio obtenido:

$$\mathcal{M}(V_k, m) = P[\bar{X} > \bar{x}_{k\,|\,m}] = 1 - \Phi\left(\frac{\bar{x}_k - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \Phi\left(u_\alpha + \sqrt{n}\,\frac{m - m_0}{\sigma}\right).$$

Para los valores de $m_1 = 1$, $m_0 = 0$, $\alpha = 0{,}05$, $n = 25$ y $\sigma^2 = 25$ la potencia del criterio

$$\mathcal{M}(V_k, 1) = \Phi\left(-1{,}645 + \sqrt{25}\cdot\frac{1-0}{\sqrt{25}}\right) = 0{,}259.$$

Si $m_1 = 5$, la potencia del criterio

$$\mathcal{M}(V_k, 5) = \Phi\left(-1{,}645 + \sqrt{25}\cdot\frac{5-0}{\sqrt{25}} = 0{,}999.\right) \blacktriangleright$$

4.60*. Hallar el dominio crítico mejor para verificar la hipótesis H_0 sobre la distribución de la variable aleatoria X, que tiene por densidad de distribución

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

contra la hipótesis alternativa H_1, que supone la distribución normal de la variable aleatoria X para $m = 0$ y $\sigma^2 = 1$, si para verificar la hipótesis se utilizan los resultados de una sola observación. Calcular la potencia del criterio obtenido. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4.61. Resolver el problema 4.60, cambiando de papel las hipótesis nula y alternativa.

4.62. Una variable aleatoria X tiene la distribución exponencial Ex (θ). Determinar el mejor dominio crítico para la verificación de la hipótesis H_0: $\theta = 1$ contra la hipótesis alternativa H_1: $\theta = \theta_1$, donde $\theta_1 > 1$, basándose en los resultados de una sola observación. Hallar la función de potencia del criterio y calcular la potencia del criterio para $\theta_1 = 2$. Tomar $\alpha = 0{,}1$.

4.63. Una variable aleatoria tiene la distribución de Poisson con el parámetro λ. Utilizando una muestra de observaciones de volumen n, determinar el mejor dominio crítico para verificar la hipótesis H_0: $\lambda = \lambda_0$ contra la hipótesis alternativa H_1: $\lambda = \lambda_1$. Examinar los casos: a) $\lambda_0 < \lambda_1$; b) $\lambda_0 > \lambda_1$.

4.64. Supongamos que la variable aleatoria X es el número de casos favorables en ciertas pruebas independientes y p es la probabilidad del caso favorable en cada prueba. Determinar el mejor dominio crítico para verificar la hipótesis H_0: $p = p_0$ frente a la hipótesis alternativa H_1: $p = p_1$.

4.65. Una variable aleatoria X tiene la distribución normal $N(0, \sigma)$. Determinar el dominio crítico mejor para verificar la hipótesis H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ contra la hipótesis alternativa H_1: $\sigma^2 = \sigma_1^2$, utilizando la muestra de n observaciones de esta variable aleatoria.

4.66. La variable aleatoria X tiene la distribución normal $N(m, 1)$. Se verifica la hipótesis H_0: $m = 0$ contra la hipótesis alternativa H_1: $m = 1$ al nivel de significación $\alpha = 0{,}05$. ¿Cuántas observaciones se necesitan para que la potencia del criterio sea de 0,90, como mínimo?

4.67. Sea Θ cierto subconjunto del conjunto de valores del parámetro θ. El criterio para verificar la hipótesis simple H_0: $\theta = \theta_0$ frente a la hipótesis alternativa compuesta H_1: $\theta \in \Theta$ se llama *criterio uniformemente más potente* si para todo $\theta \in \Theta$ tiene la potencia máxima. ¿Es el criterio obtenido en el ejemplo 12 el uniformemente más potente al verificar la hipótesis simple H_0: $m = m_0$ frente a una hipótesis alternativa compuesta H_1 si: a) H_1: $m > m_0$; b) H_1: $m \neq m_0$?

4.68. El criterio para verificar la hipótesis simple H_0: $\theta = \theta_0$ frente a la hipótesis alternativa compuesta H_1: $\theta \in \Theta$ se denomina *insesgado* si para todo $\theta \in \Theta$ la función de potencia de este criterio satisface la condición $\mathcal{M}(V_k, \theta) \geqslant \alpha$, donde α es el nivel de significación del criterio.

a) Mostrar que el criterio obtenido en el ejemplo 12 para la verificación de la hipótesis simple H_0: $m = m_0$, frente a la hipótesis compuesta H_1: $m > m_0$, es insesgado y para la hipótesis alternativa H_1: $m \neq m_0$ es sesgado.

b) ¿Qué criterio insesgado puede ser propuesto para la verificación de la hipótesis H_0: $m = m_0$ frente a la hipótesis alternativa H_1: $m \neq m_0$?

§ 5. Análisis monofactorial de varianza

En el tratamiento práctico de los resultados de observaciones surge a menudo la cuestión de cómo grande es la influencia que la variación de cierto factor o de un grupo de factores ejerce sobre la magnitud sometida a la medición. Por ejemplo, se puede investigar la influencia de la cantidad de un catalizador en el tiempo de una reacción química. Al investigar más detalladamente las causas que contribuyen a la variación del tiempo de reacción será necesario, quizás, comprobar la influencia de dos factores, por ejemplo, la de la temperatura del catalizador y la de la cantidad de este último. Pueden considerarse los influjos de una cantidad mayor de factores. Los métodos respectivos constituyen el contenido *del análisis monofactorial, el bifactorial* y *el multifactorial*. Aquí limitémonos a examinar los métodos del análisis monofactorial de varianza.

La tarea del análisis monofactorial de varianza puede ser formulada del modo siguiente. Supongamos que una variable aleatoria X, normalmente distribuida, se observa cuando cierto factor tiene l valores constantes. Los resultados de observaciones son constituidos por l muestras (grupos) de volumen n_k, $k = 1, 1, \ldots, l$, pertenecientes a l poblaciones madre cuyas *varianzas* σ^2 *son iguales, pero incógnitas*, y cuyas esperanzas matemáticas son m_k, $k = 1, 2, \ldots, l$. Se comprueba la hipótesis H_0: $m_1 = m_2 = \ldots = m_l = m$.

Designemos con X_{ik} el i-ésimo valor de la k-ésima muestra, $k = 1, 2, \ldots, l$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, con $\overline{X}_k$, la media muestral del k-ésimo grupo:

$$\overline{X}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik} = \frac{1}{n_k} X_{\cdot k}$$

y con X, la media general:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} n_k \overline{X}_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} X_{ik},$$

donde $n = \sum_{k=1}^{l} n_k$,

La suma total de los cuadrados de desviaciones de las observaciones respecto a la media general X puede ser representada así:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \overline{X})^2 = \sum_{k=1}^{l} n_k (\overline{X}_k - \overline{X})^2 + \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} (X_{ik} - \overline{X}_k)^2. \qquad (1)$$

Es la identidad principal del análisis de varianza. Escribámosla en la forma de

$$Q = Q_1 + Q_2, \qquad (2)$$

donde Q es la suma total de los cuadrados de desviaciones de las observaciones respecto a la media general: Q_1, la suma de cuadrados de desviaciones de las medias muestrales $\overline{X}_k$ respecto a la media general $\overline{X}$

(*entre los grupos*); Q_2 es la suma de los cuadrados de desviaciones de las observaciones respecto a los grupos medios muestrales (*dentro de los groupos*). Si la hipótesis H_0 es cierta, las variables aleatorias independientes X_{ik} tienen la *distribución normal* $N(m, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, $k = 1, 2, \ldots, l$; las medias muestrales $\overline{X}_k$ son independientes y tienen la *distribución normal* $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n_k}}\right)$. Ahora bien, las sumas de los cuadrados de desviaciones Q, Q_1 y Q_2 están ligadas con la distribución χ^2 por las relaciones

$$Q = \sigma^2\chi^2(n-1), \tag{3}$$

$$Q_1 = \sigma^2\chi^2(l-1), \tag{4}$$

$$Q_2 = \sigma^2\chi^2(n-l). \tag{5}$$

Las estadísticas $S_1^2 = \frac{Q_1}{l-1}$ y $S_2^2 = \frac{Q_2}{n-l}$ son esitmaciones insesgadas de la varianza de los resultados de observaciones σ^2 y la relación entre estas estimaciones tiene la *distribución de Fisher* (§ 2, p. 1):

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{Q_1/(l-1)}{Q_2/(n-l)} = F(l-1, n-l). \tag{6}$$

La hipótesis H_0: $m_1 = m_2 = \ldots = m_l = m$ se acepta al nivel de significación α, si el valor muestral F_m de la estadística (6) es menor que el cuantil de $F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$, o sea, si

$$F_m < F_{1-\alpha}(l-1, n-l).$$

En este caso $\overline{X}$ y $\frac{Q_2}{n-l}$ son *esitmaciones insesgadas de los parámetros* m y σ^2. Si $F_m \geqslant F_{1-\alpha}(l-1, n-l)$, la hipótesis H_0 se rechaza y conviene considerar que entre las medias $m_1, m_2, \ldots, m_l$ hay al menos dos que no son iguales una a otra.

Es cómodo calcular Q, Q_1 y Q_2 con ayuda de las fórmulas

$$Q = A - C,$$

$$Q_1 = B - C,$$

$$Q_2 = A - B,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}^2,$$

$$B = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{n_k} \left(\sum_{i=1}^{n_k} x_{ik} \right)^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{n_k} x_{\cdot k}^2,$$

$$C = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} x_k \right)^2 = \frac{1}{n} x_{\cdot\cdot}^2.$$

Para controlar los cálculos se utiliza la identidad

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

OBSERVACIÓN. Si x_{ik} son números relativamente grandes, para la simplificación, los cálculos se realizan utilizando los elementos transformados de la muestra $y_{ik} = x_{ik} - d$, donde $d \approx \bar{x}$. En este caso las magnitudes Q_1, Q_2 y Q no varían.

EJEMPLO 1. La tabla 5.1 contiene tres muestras. Considerando que las muestras han sido obtenidas a partir de las poblaciones madre normalmente distribuidas, con iguales varianzas, verificar la hipótesis sobre la igualdad de las medias al nivel de significación igual al 5%.

◀ Calculemos las sumas en las columnas y en las filas inferiores de la tabla 5.1.

Tabla 5.1

Nº de la observación	Nº de la muestra			
	1	2	3	
1	1	2	4	
2	3	3	5	
3	2	2	3	
4	1	1	—	
5	0	4	—	
6	2	—	—	
7	1	—	—	Suma
n_k	7	5	3	$n=15$
$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}$	10	12	12	$x\,..=34$
$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}^2$	20	34	50	$A=104$
$\frac{1}{n_k}\left(\sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}\right)^2$	14,28	28,8	48	$B=91{,}08$

Luego calculamos

$$C=\frac{34^2}{15}=77{,}07,$$

$$Q=104-77{,}07=26{,}93,$$

$$Q_1=91{,}08-77{,}07=14{,}01,$$

$$Q_2=104-91{,}08=12{,}92.$$

Encontramos el valor muestral de la estadística (6):

$$F_{\text{m}}=\frac{\frac{1}{3-1}\cdot 14{,}02}{\frac{1}{11-3}\cdot 12{,}91}=6{,}51.$$

Con ayuda de la tabla S7 determinamos

$$F_{0{,}95}\,(2{,}12)=3{,}88.$$

Puesto que el valor muestral F_{m} sobrepasa el valor de cuantil $F_{0{,}95}$ (2, 12), la hipótesis sobre la igualdad de las medias se rechaza. ▶

CONTRASTES LINEALES. Si la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las medias se rechaza, es necesario determinar, qué grupos precisamente tienen una diferencia significativa de las medias. Para estos fines se utiliza el *método de los contrastes lineales*. El contraste lineal Lk se define como la combinación lineal:

$$\text{Lk}=\sum_{k=1}^{l} c_k m_k,$$

donde c_k, $k=1, 2, \ldots, l$ son las constantes definidas unívocamente en la enunciación de las hipótesis en verificación, con la particularidad de que $\sum_{k=1}^{l} c_k=0$. La estimación de Lk es igual a $\widetilde{\text{Lk}}=$ $=\sum_{k=1}^{l} c_k X_k$ y la estimación de la varianza de $\widetilde{\text{Lk}}$ es igual a

$$s^2_{\text{Lk}}=D\,[\widetilde{\text{Lk}}]=\tilde{\sigma}^2\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k^2}{n_k}=\frac{Q_2}{n-l}\sum_{k=1}^{l}\frac{c_k^2}{n_k}.$$

Las cotas del intervalo confidencial para Lk tienen la forma

$$\widetilde{\text{Lk}}\pm s_{\text{Lk}}\sqrt{(l-1)\cdot F_{1-\alpha}\,(l-1,\ n-l)}. \qquad (7)$$

EJEMPLO 2. Quedando válidos los datos del ejemplo 1, para las hipótesis alternativas bilaterales verificar las hipótesis $H_0^{(1)}$: $m_1=$ $=m_2$, $H_0^{(2)}$: $m_1=m_3$; $H_0^{(3)}$: $m_2=m_3$; $H_0^{(4)}$: $\frac{1}{2}\,(m_1+m_2)=m_3$.

◀ En consonancia con las hipótesis en verificación $H_0^{(i)}$, $i=$

$= 1, 2, 3, 4$, determinamos los contrastes lineales

$$\mathrm{Lk}_1 = m_1 - m_2; \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 0;$$

$$\mathrm{Lk}_2 = m_1 - m_3; \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -1;$$

$$\mathrm{Lk}_3 = m_2 - m_3; \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = -1;$$

$$\mathrm{Lk}_4 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) - m_3; \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = -1.$$

Determinemos las cotas de los intervalos confidenciales para los contrastes lineales Lk_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Calculemos previamente las estimaciones de los contrastes lineales y de las varianzas de los mismos. Las medias muestrales $\overline{x_1} = 1{,}43$, $\overline{x_2} = 2\,4$, $\overline{x_3} = 4$. La estimación de la varianza

$$\widetilde{\sigma^2} = \frac{Q_2}{n-l} = \frac{12{,}92}{15-3} \approx 1{,}08.$$

Las estimaciones de los contrastes y de las varianzas de éstos

$$\widetilde{\mathrm{Lk}_1} = 1{,}43 - 2{,}4 = -0{,}97, \quad s^2_{\mathrm{Lk}_1} = 1{,}08 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5}\right) \approx 0{,}37;$$

$$\widetilde{\mathrm{Lk}_2} = 1{,}43 - 4 = -2{,}57, \quad s^2_{\mathrm{Lk}_2} = 1{,}08 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}51;$$

$$\widetilde{\mathrm{Lk}_3} = 2{,}4 - 4 = -1{,}60, \quad s^2_{\mathrm{Lk}_3} = 1{,}08 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}58;$$

$$\widetilde{\mathrm{Lk}_4} = \frac{1}{2} \cdot (1{,}43 + 2{,}4) - 4 = -2{,}08,$$

$$s^2_{\mathrm{Lk}_4} = 1{,}08 \cdot \left(\frac{(1/2)^2}{7} + \frac{(1/2)^2}{5} + \frac{1}{3}\right) \approx 0{,}45.$$

Para $\alpha = 0{,}05$, con ayuda de la tabla S7 encontramos $F_{1-\alpha}(l - 1, n - l) = F_{0{,}95}(2{,}12) \approx 3{,}88$. Para determinar los intervalos confidenciales para los contrastes lineales calculemos previamente

$$\sqrt{(l-1)\, F_{1-\alpha}(l-1, n-l)} = \sqrt{(3-1) \cdot 3{,}88} \approx 2{,}79.$$

Ahora bien, las cotas confidenciales para los contrastes Lk_i, $i = 1, 2, 3, 4$, según la fórmula (7), son iguales a $-0{,}97 \pm 1{,}67$; $-2{,}57 \pm 2{,}00$; $-1{,}60 \pm 2{,}12$; $-2{,}08 \pm 1{,}87$. Puesto que el valor nulo se cubre por los intervalos confidenciales para Lk_1 y Lk_3, las hipótesis $H(\frac{1}{0})$ y $H(\frac{3}{0})$ se aceptan, las hipótesis $H(\frac{2}{0})$ y $H(\frac{4}{0})$ se rechazan. Así pues, son significativamente diferentes las medias del primero y el tercer grupo, así como la media de las medias aritméticas para los primeros dos grupos y la media del tercer grupo. ▶

En los problemas 5.1—5.8 se supone que las muestras han sido obtenidas a partir de las poblaciones madre normal-

mente distribuidas con las varianzas iguales. En cada problema se necesita verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las medias. Si la hipótesis H_0 se acepta, hay que hallar las estimaciones insesgadas de la media y de la varianza. Si la hipótesis H_0 se rechaza, hay que comparar dos a dos las medias, utilizando el método de los contrastes lineales.

5.1

N° de la muestra		
1	2	3
6	14	12
5	11	4
12	5	7
9	6	—
10	—	—

$\alpha = 0{,}05$

5.2

N° de la muestra		
1	2	3
4	6	8
2	5	9
3	4	10
4	7	7
5	6	8
3	8	6

$\alpha = 0{,}10$

5.3

N° de la muestra			
1	2	3	4
8	9	16	9
11	10	9	8
8	7	12	—
9	11	14	—
—	8	—	—
—	10	—	—

$\alpha = 0{,}05$

5.4. En tres tiendas que venden artículos de una misma especie los datos sobre la circulación de mercancías por 8 meses de trabajo (en mil rublos) han sido resumidos en el informe siguiente:

Tienda	Mes								$\sum_{i=1}^{8} x_{ik}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
I	19	23	26	18	20	20	18	35	179
II	20	20	32	27	40	24	22	18	203
III	16	15	18	26	19	17	19	18	148

$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{8} x_{ik}^2 = 12\,592$. Tomar $\alpha = 0{,}10$.

5.5. A continuación se muestran los datos sobre el contenido de la inmunoglobulina IgA en el suero sanguíneo (en mag %) referentes a los pacientes de cinco grupos de edad:

Grupo de edad	Contenido de IgA (mg %)											Suma
1	83	85	—	—	—	—	—	—	—	—	—	168
2	84	85	85	86	86	87	—	—	—	—	—	513
3	86	87	87	87	88	88	88	88	88	89	90	966
4	89	90	90	91	—	—	—	—	—	—	—	360
5	90	92	—	—	—	—	—	—	—	—	—	182

$\sum\sum x_{ik} = 2189$, $\sum\sum x_{ik}^2 = 191\,791$. Tomar $\alpha = 0{,}01$.

5.6. En una fábrica de productos químicos han sido elaboradas dos nuevas variantes del proceso tecnológico. Para estimar, cómo variará la productividad diaria al pasar a trabajar según las nuevas variantes del proceso tecnológico la fábrica funciona durante 10 días con cada variante, incluyendo la existente. La productividad diaria de la fábrica (en unidades convencionales) se da en la tabla:

Día del trabajo	Productividad diaria		
	Esquema existente	Variante 1	Variante 2
1	46	74	52
2	48	82	63
3	73	64	72
4	52	72	64
5	72	84	48
6	44	68	70
7	66	76	78
8	46	88	68
9	60	70	70
10	48	60	54
Suma	555	738	639

$\sum\sum x_{ik} = 1932$, $\sum\sum x_{ik}^2 = 128810$. Tomar $\alpha = 0{,}10$.

5.7. A partir de una gran partida de transistores de efecto de campo han sido obtenidas, con intervalo semanal, tres muestras. A continuación se muestran los resultados de medición de la capacidad electrodo de cierre — electrodo de drenaje en estos transistores (en picofaradios):

Nº de la muestra	Capacidad (pF)							
1	2,8	3,2	2,9	3,5	3,3	3,7	3,9	3,1
2	3,1	3,2	3,3	3,4	3,7	3,4	3,0	3,1
3	3,6	2,8	3,0	3,2	3,0	3,7	3,2	3,2

Nº de la muestra	Capacidad (pF)							
1	3,2	3,1	3,4	3,0	3,6	3,1	3,2	3,2
2	2,9	3,5	3,2	3,2	—	—	—	—
3	3,6	3,4	3,1	3,2	—	—	—	—

$\sum x_{i1} = 52{,}2$, $\sum x_{i2} = \sum x_{i3} = 39$, $\sum\sum x_{ik} = 130{,}2$, $\sum\sum x_{ik}^2 = 426{,}48$, $n = 40$. Aceptar $\alpha = 0{,}10$.

5.8. El tiempo de una reacción química en función de diferente contenido del catalizador se ha distribuido del modo siguiente (en segundos):

Contenido del catalizador	Nº del experimento												Suma
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
5%	5,9	6,0	7,0	6,5	5,5	7,0	8,1	7,5	6,2	6,4	7,1	6,9	80,1
10%	4,0	5,1	6,2	5,3	4,5	4,4	5,3	5,4	5,6	5,2	—	—	51,0
15%	8,2	6,8	8,0	7,5	7,0	7,2	7,9	8,1	8,5	7,8	8,1	—	85,1

$\sum\sum x_{ik}^2 = 1465{,}68$. Tomar $\alpha = 0{,}10$.

5.9*. Demostrar la identidad principal (1) del análisis de varianza.

5.10. Mostrar que si la hipótesis sobre la igualdad de las medias es cierta, la media general $\bar{x}$ y la estadística $\frac{Q_2}{n-l}$ son las estimaciones insesgadas de la esperanza matemática y de la varianza de la población madre.

5.11. Redactar en el lenguaje Fortran el subprograma para calcular las magnitudes de Q, Q_1, Q_2 y el valor muestral de la estadística de Fisher FB.

5.12*. Utilizando el subprograma, obtenido después de resolver el problema 5.11, es necesario resolver los problemas 5.4—5.8.

§ 6. Criterio χ^2 y su aplicación

1. Verificación de la hipótesis sobre la forma de distribución de una población madre. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la muestra de observaciones de una variable aleatoria X. Se verifica la hipótesis H_0 que afirma que X tiene la ley de distribución $F(x)$. La operación de aplicación del criterio χ^2 para verificar la hipótesis H_0 se compone de las etapas siguientes.

1. Basándose en la muestra de observaciones de la variable aleatoria X, es necesario hallar las estimaciones de los parámetros desconocidos de la ley de distribución hipotética $F(x)$.

2. Si X es una variable aleatoria discreta, hay que determinar las frecuencias n_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, con las cuales cada valor o grupo de valores se encuentra en la muestra. Si X es una variable aleatoria continua, es necesario partir el dominio de sus valores en r intervalos disjuntos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ y determinar el número de elementos de la muestra n_k, $k = 1, 2, \ldots, r$ que pertenecen a cada intervalo. Es evidente que en ambos casos $\sum_{k=1}^{r} n_k = n$.

3. Si X es una variable aleatoria discreta, entonces, utilizando la ley de distribución hipotética $F(x)$, es necesario calcular las probabilidades p_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, con las cuales la variable aleatoria X toma cada valor, o la probabilidad de aparición de un grupo de valores. Si X es una variable aleatoria continua, conviene determinar la probabilidad p_k de tomar un valor perteneciente a cada intervalo Δ_k:

$$P[X \in \Delta_k] = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, r.$$

Es evidente que en ambos casos $\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$.

4. Calcular el valor muestral de la estadística del criterio

$$\chi^2_m = \sum_{k=1}^{r} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}.$$

5. Tomar la resolución estadística: la hipótesis H_0 no contradice la muestra de observaciones para el nivel dado de significación α, si $\chi^2_m < \chi^2_{1-\alpha}(r - l - 1)$, donde l es el número de los parámetros de distribución $F(x)$ que se estiman con ayuda de la muestra; si $\chi^2_m \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(r - l - 1)$, la hipótesis H_0 se rechaza.

OBSERVACIÓN. El criterio χ^2 utiliza el hecho de que la variable aleatoria $\frac{n_k - np_k}{\sqrt{np_k}}$, $k = 1, 2, \ldots, r$, tiene una distribución próxima a la normal $N(0, 1)$. Para que esta afirmación sea suficientemente exacta es necesario que para todos los intervalos se cumpla la condición $np_k \geqslant 5$. Si en algunos intervalos esta condición no se cumple, es necesario unirlos con los vecinos.

EJEMPLO 1. Verificación de la hipótesis sobre la distribución según la ley de Poisson. En las primeras dos columnas de la tabla 6.1

Tabla 6.1

Número de fallos k	Cantidad de los casos en que se observaban k fallos, n_k	$p_k = \frac{0,6^k}{k!} e^{-0,6}$	Número hipotético de los casos con k fallos, np_k
0	427	0,54881	416
1	235	0,32929	249
2	72	0,09879	75
3	21	0,01976	15
4	1	0,00296	2
5	1	0,00036	0
6	0	0,00004	0
Suma	757	—	—

se muestran los datos sobre los fallos de aparatos durante 10 000 horas de funcionamiento. El número total de aparatos examinados $n = 757$, en este caso se observaban

$$0 \cdot 427 + 1 \cdot 235 + 2 \cdot 72 + 3 \cdot 21 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 451 \text{ fallos.}$$

Verificar la hipótesis de que el número de fallos tiene la distribución de Poisson:

$$p_k = \mathbf{P}[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots, \text{ para } \alpha = 0,01.$$

◀ La estimación del parámetro λ es igual al número medio de fallos: $\widetilde{\lambda} = 451/757 \approx 0,6$. Por medio de la tabla S3 con $\lambda = 0,6$ encontramos las probabilidades p_k y el número hipotético de los casos con k fallos (tercera y quarta fila de la tabla 6.1).

Para $k = 4$, 5 y 6 los valores de $np_k < 5$, por eso unimos estas filas con la fila para $k = 3$. Como resultado obtenemos los valores indicados en la tabla 6.2.

Puesto que por medio de la muestra se ha estimado un solo parámetro λ, entonces $l = 1$ y el número de grados de libertad es igual a $4 - 1 - 1 = 2$. Con ayuda de la tabla S5 hallamos $\chi^2_{0,99}(2) = 9,21$, por consiguiente, la hipótesis sobre la distribución del número de fallos según la ley de Poisson se acepta. ▶

Tabla 6.2

k	n_k	np_k	$\frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$
0	427	416	0,291
1	235	249	0,787
2	72	75	0,120
$\geqslant 3$	23	17	2,118
—	—	—	$\chi^2_m = 3{,}316$

EJEMPLO 2. Verificar la hipótesis sobre la distribución normal de los datos agrupados en el ejemplo 2 (§ 1). Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Los datos iniciales son los siguientes: la anchura del intervalo de agrupación $b = 2$, el volumen de la muestra $n = 55$, las estimaciones de la media y de la desviación típica son iguales a $\bar{x} = 17{,}84$ y $s = 2{,}92$, respectivamente. Los valores de las mitades de los intervalos x_i^* y las frecuencias respectivas n_i^*, $i = 1, 2, \ldots, 7$, se dan en la primera y la segunda columnas de la tabla 6.3.

Tabla 6.3

x_i^*	n_i^*	$z_i^* = \frac{\lvert x_i^* - \bar{x} \rvert}{s}$	$f(z_i)$	$np_i = \frac{nb}{s} f(z_i)$	np_i	$n_i^* - np_i$	$\frac{(n_i^* - np_i)^2}{np_i}$
11	2	2,34	0,0258	0,972			
13	4	1,66	0,1006	3,790	14,15	—0,15	0,0016
15	8	0,97	0,2492	9,388			
17	12	0,29	0,3825	14,409	14,409	2,409	0,403
19	16	0,40	0,3683	13,874	13,874	2,126	0,326
21	10	1,08	0,2227	8,389	11,527	1,473	0,188
23	3	1,77	0,0833	3,138			
							$\chi^2_m = 0{,}919$

En la tercera columna se dan los valores normalizados de x_i^*. En la cuarta columna se muestran las ordenadas de densidad $f(z_i)$ de la distribución normal $N(0, 1)$, determinadas con ayuda de la tabla S2. En la quinta columna se calculan los valores $np_i = \frac{nb}{s} f(z_i)$, donde $\frac{nb}{s} = 37{,}67$, y en la sexta, los valores de np_i después de unir los tres primeros y dos últimos intervalos. Por último, la séptima y la

octava columnas sirven para calcular el valor muestral de la estadística del criterio χ^2_m. Puesto que por medio de la muestra están determinadas las estimaciones de dos parámetros, entonces $l = 2$ y el número de grados de libertad es igual a $4 - 2 - 1 = 1$. Con ayuda de la tabla S5 encontramos $\chi^2_{0,90}(1) = 2{,}71$. Puesto que $\chi^2_m = 0{,}919$, la hipótesis sobre la distribución normal de los datos agrupados no contradice los resultados de observaciones. ▶

6.1**. Al lanzar 50 veces una moneda, el escudo aparece 20 veces. ¿Se puede considerar simétrica la moneda? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

6.2. Al lanzar 120 veces un dado, el seis sale 40 veces. ¿Concuerda este resultado con la afirmación de que el dado es perfecto? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

6.3. Resolver los problemas 6.1 y 6.2, utilizando los métodos de comprobación de las hipótesis, expuestos en el § 4, p. 3.

6.4. Al arrojar 20 veces dos monedas el número de salidas del escudo se distribuye del modo siguiente:

Cantidad de escudos	0	1	2
Número de lanzamientos	4	8	8

¿Concuerdan estos resultados con las suposiciones sobre la simetría de las monedas y sobre la independencia de los resultados de lanzamientos? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

6.5. A continuación se muestran los datos sobre los volúmenes reales de venta (en unidades convencionales) en cinco distritos:

Distrito	1	2	3	4	5
Volumen real de venta	110	130	70	90	100

¿Concuerdan estos resultados con la suposición de que la venta de producción en estos distritos debe ser igual? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

6.6. En un examen un estudiante responde sólo a una pregunta referida a una de las tres partes del curso. El análisis de las preguntas hechas a 60 estudiantes muestra que 23 estudiantes han sacado preguntas de la primera parte del curso, 15 de la segunda y 22 de la tercera.

¿Se puede suponer que el estudiante que va a pasar el examen sacará con igual probabilidad una pregunta referente a cualquiera de tres partes del curso? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

6.7. El método de obtención de los números aleatorios ha sido empleado 250 veces y han sido obtenidos los resultados siguientes:

Cifra	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frecuencia de aparición	27	18	23	31	21	23	28	25	22	32

¿Se puede considerar que el método empleado proporciona efectivamente números aleatorios? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

6.8. En un taller dotado de 10 máquinas herramientas se registraba cada día el número de máquinas averiadas. En total han sido realizadas 200 observaciones cuyos resultados ofrecemos a continuación:

Número de máquinas averiadas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de casos registrados	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Verificar la hipótesis H_0 de que el número de máquinas averiadas tiene la distribución de Poisson. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

6.9. Durante la Segunda Guerra Mundial en Londres cayeron 537 aviones-cohetes. Todo el territorio de la ciudad fue repartido en 576 sectores de 0,25 km² cada uno. A continuación se dan los números de sectores n_k alcanzados por k cohetes:

k	0	1	2	3	4	5	y más
n_k	229	211	93	35	7		1

¿Concuerdan estos datos con la hipótesis de que el número de cohetes caídos a cada uno de los sectores tiene la distribución de Poisson? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

6.10. A continuación se muestran los datos sobre el número de piezas que se suministran a la cadena transportadora en el transcurso de 600 intervalos de dos minutos:

Número de piezas	0	1	2	3	4	5	6
Número de intervalos	400	167	29	3	0	0	1

Utilizando el criterio χ^2 es necesario verificar la hipótesis H_0 sobre la distribución de Poisson del número de piezas para $\alpha = 0{,}05$.

6.11. Al ensayar un equipo radioelectrónico se ha fijado el número de fallos. Los resultados de 59 pruebas se dan a continuación:

Número de fallos	0	1	2	3
Número de pruebas	42	10	4	3

Comprobar la hipótesis H_0 de que el número de fallos tiene la distribución de Poisson para $\alpha = 0{,}10$.

En los problemas 6.12—6.16 para las muestras agrupadas dadas verificar, tomando el nivel de significación igual a 10%, la hipótesis H_0 de que las muestras han sido obtenidas a partir de una población madre normalmente distribuida.

6.12. 200 desiviaciones del tamaño de un árbol a partir del valor nominal (μ):

Mitad del intervalo	−0,14	−0,12	−0,10	−0,08	−0,06	−0,04	−0,02
Frecuencia	3	8	11	20	27	36	29

Mitad del intervalo	0,00,	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
Frecuencia	18	17	17	8	4	1	1

6.13. 150 desviaciones de los diámetros de las manguetas del eje delantero respecto al tamaño nominal (μ):

Mitad del intervalo	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
Frecuencia	1	4	13	23	22	29	29	16	11	2

6.14. Magnitud de la dimensión de control de 68 piezas fabricadas en una máquina herramienta (mm):

Cotas del intervalo	2,9 ... 3,9	3,9 ... 4,9	4,9 ... 5,9	5,9 ... 6,9	6,9 ... 7,9
Frecuencia	5	15	23	19	6

6.15. Resistencia de entrada de 130 lámparas termoiónicas (Ω):

Cotas del intervalo	3,0 ... 3,6	3,6 ... 4,2	4,2 ... 4,8	4,8 ... 5,4	5,4 ... 6,0	6,0 ... 6,6	6,6 ... 7,2
Frecuencia	2	8	35	43	22	15	5

6.16. Estatura de 1004 niñas a la edad de 16 años (cm):

Cotas del intervalo	134 ... 137	137 ... 140	140 ... 143	143 ... 146	146 ... 149	149 ... 152	152 ... 155
Frecuencia	1	4	16	53	121	197	229

Cotas del intervalo	155 ... 158	158 ... 161	161 ... 164	164 ... 167	167 ... 170	170 ... 173
Frecuencia	186	121	53	17	5	1

2. Verificación de la hipótesis sobre la independencia de dos variables aleatorias. Supongamos que han sido realizados n experimentos cuyos resultados son valores de las variables aleatorias discretas X e Y que toman los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$ e $y_1, y_2, \ldots, y_l$, respectivamente. Designemos con n_{ij} el número de experimentos en los cuales $X = x_i$ e $Y = y_j$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, l$. Si X e Y son variables aleatorias discretas, el dominio de valores de cada una de ellas se parte en un número finito de intervalos. En este caso n_{ij} es el número de experimentos en los cuales la variable aleatoria X toma el valor perteneciente al i-ésimo intervalo y la variable aleatoria Y toma el valor perteneciente al j-ésimo intervalo. Los resultados de n experimentos pueden representarse en forma de la *tabla de conjugación de los indicios* del tamaño $k \times l$ (tabla 6.4).

Se verifica la hipótesis H_0 que afirma que las variables aleatorias X e Y son independientes. Si la hipótesis H_0 es cierta, entonces, por definición,

$$\mathbf{P}[X = x_i;\ Y = y_j] = \mathbf{P}[X = x_i]\mathbf{P}[Y = y_j] = p_i q_j.$$

Sean $\tilde{p}_i = \frac{n_{i\cdot}}{n}$ y $\tilde{q}_j = \frac{n_{\cdot j}}{n}$ las estimaciones de las probabilidades p_i y q_j.

Si la hipótesis H_0 es cierta, el número supuesto de experimentos $\tilde{n}_{ij}$ en los cuales la variable aleatoria X toma un valor perteneciente al

Tabla 6.4

X \ Y	y_1	y_2	...	y_l	$\sum_{j=1}^{l} n_{ij} = n_i$
x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1l}	n_1
x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2l}	n_2
...	...	...	...	...	...
x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kl}	n_k.
$\sum_{i=1}^{k} n_{ij} = n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	...	$n_{.l}$	$n_{..} = n$

i-ésimo intervalo y la variable aleatoria Y toma un valor perteneciente al j-ésimo intervalo es igual a

$$\tilde{n}_{ij} = n\tilde{p}_i\tilde{q}_j = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}.$$

Para verificar la hipótesis H_0, basándose en el criterio χ^2, se utiliza la estadística siguiente:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{(n_{ij} - \tilde{n}_{ij})^2}{\tilde{n}_{ij}}. \qquad (1)$$

A condición de que la hipótesis H_0 sea cierta y todas las frecuencias $\tilde{n}_{ij} \geqslant 4$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 1, 2, \ldots, l$, la estadística (1) tiene la distribución χ^2 con $(k-1)(l-1)$ grados de libertad.

La hipótesis H_0 sobre la independencia de las variables aleatorias X e Y se acepta para el nivel de significación si el valor muestral de la estadística (1) es menor que el cuantil $\chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1))$, o sea si

$$\chi^2_m < \chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1)).$$

Si $\chi^2_m \geqslant \chi^2_{1-\alpha}((k-1)(l-1))$, la hipótesis H_0 se rechaza.

Para calcular el valor muestral de la estadística (1) del criterio es cómodo utilizar la fórmula

$$\chi^2_m = n\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}^2}{n_{i.}n_{.j}} - 1\right) = n\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_{i.}}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{n_{ij}^2}{n_{.j}}\right) - 1\right). \qquad (2)$$

OBSERVACIONES. 1. Si las frecuencias supuestas $\tilde{n}_{ij}$ para ciertas casillas de la tabla 6.4 no satisfacen la condición $\tilde{n}_{ij} \geqslant 4$, entonces las filas y columnas correspondientes deben unirse con las filas y columnas vecinas.

2. Si $(k-1)(l-1) \geqslant 8$ y $n \geqslant 40$, el valor mínimo admisible de las frecuencias hipotéticas puede ser igual a la unidad.

Las variables aleatorias X e Y pueden considerarse como dos indicios según los cuales se clasifica la muestra de volumen n; la independencia de X e Y corresponde a la independencia de estos indicios.

En muchos casos se necesita verificar la hipótesis sobre la homogeneidad de algunas muestras o, en otras palabras, la hipótesis de que estas muestras han sido obtenidas a partir de la misma población madre. Si se comprueba la homogeneidad de k diferentes muestras de volúmenes $n_1, n_2 \ldots, n_k$ y estas muestras pueden ser escritas en forma de la tabla de conjugación de los indicios del tamaño $k \times l$ (véase la tabla 6.4), entonces para la verificación se utiliza el mismo crirerio que para la comprobación de la independencia de dos indicios.

EJEMPLO 3. Los artículos integrantes que tienen la misma denominación se suministran de tres empresas A, B y C. Los resultados de la comprobación de los artículos son los siguientes:

Resultados de la comprobación	Proveedor			En total
	A	B	C	
Útiles	29	38	53	120
Inútiles	1	2	7	10
En total	30	40	60	130

¿Se puede considerar que la calidad de los artículos no depende del proveedor? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Se comprueba la hipótesis sobre la independencia de dos características: calidad del artículo y lugar de su fabricación. Con ayuda de la fórmula (2) encontramos

$$\chi^2_m = 130 \cdot \left(\frac{29^2}{30 \cdot 120} + \frac{38^2}{40 \cdot 120} + \frac{53^2}{60 \cdot 120} + \frac{1^2}{30 \cdot 10} + \frac{2^2}{40 \cdot 10} + \right.$$

$$\left. + \frac{7^2}{60 \cdot 10} - 1 \right) \approx 2{,}546;$$

el número de grados de libertad $(2-1)(3-1) = 2$. Puesto que según la tabla S5 $\chi^2_{0{,}90}(2) \approx 4{,}605$, conviene considerar qué calidad de los artículos no depende del proveedor.

Obsérvese que la afirmación de quo la calidad de los artículos no depende del proveedor se puede interpretar como verificación de la

hipótesis sobre la homogeneidad de tres muestras de artículos de volúmenes 30, 40 y 60, obtenidas de los proveedores A, B y C, respectivamente. ▶

6.17. Se afirma que el resultado de acción de un medicamento depende del método de su empleo. Comprobar esta afirmación para $\alpha = 0{,}05$, basándose en los datos siguientes:

Resultado	Método de empleo		
	A	*B*	*C*
Desfavorable	11	17	16
Favorable	20	23	19

6.18. La actitud de los espectadores hacia la inclusión de un programa en la transmisión por televisión se expresa por los datos siguientes:

	Positiva	Indiferente	Negativa
Hombres	14	24	2
Mujeres	29	36	15

¿Se puede considerar que la actitud hacia la inclusión de este programa en la transmisión por televisión no depende del sexo del espectador? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

6.19. Al efectuar las medidas A, B y C la variación de la productividad del trabajo en una empresa se expresa por los datos siguientes:

Productividad del trabajo	Medidas		
	A	*B*	*C*
Ha aumentado	14	47	16
No ha cambiado	22	37	7
Ha disminuido	20	25	2

¿Se puede considerar que la realización de estas medidas no influye en la productividad del trabajo? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

6.20. A continuación se muestran los resultados de una encuesta de 100 estudiantes que debían responder a la pregunta: «¿Cómo opina Ud, influye el fumar negativamente sobre los estudios?»

Respuesta	Curso		
	I	II	III
No	15	10	—
No sé	8	5	7
Sí	—	30	25

¿Confirman estos datos la suposición de que la actitud de los estudiantes de diferentes cursos hacia el fumar es diferente? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

6.21. Para determinar el hecho de que el color de los cabellos de habitantes depende de su residencia han sido examinados tres grupos de individuos procedentes de las regiones *A*, *B* y *C*. ¿Evidencian los resultados, citados a continuación, que el color de los cabellos de habitantes depende de la residencia de estos últimos? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

Región	Color de los cabellos		
	Rojo	Rubio	Moreno
A	2	9	9
B	3	6	21
C	15	15	20

6.22. El contenido de la nicotina (en mg) para dos marcas de cigarrillos se caracteriza por los datos siguientes:

Marca *A*	24	26	25	22
Marca *B*	27	28	25	29

¿Testimonian estos resultados que el contenido de la nicotina en los cigarrillos de estas marcas es diferente? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

3. Verificación de la hipótesis sobre la igualdad de los parámetros de dos distribuciones binomiales. Supongamos que se realizan independientemente dos series que contienen $n_{1.}$ y $n_{2.}$ pruebas, respectivamente. En la primera serie el suceso A se produce n_{11} veces y en la segunda, n_{21} veces. Se necesita verificar la hipótesis H_0 de que la probabilidad de aparecer el suceso A en ambas series es la misma, o sea, H_0: $p_1 = p_2$. Los resultados de ambas series se pueden representar en forma de la tabla de conjugación de los indicios del tamaño 2×2:

Serie	Suceso		Suma
	A	$\bar{A}$	
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
Suma	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..} = n$

La hipótesis H_0: $p_1 = p_2$ es equivalente a la hipótesis de que ambas muestras han sido obtenidas a partir de la misma población madre, o sea, son homogéneas y se verifica con ayuda del criterio χ^2 (véase el p. 2 de este párrafo).

En este caso para calcular el valor muestral de la estadística (1) del criterio es cómodo utilizar la fórmula

$$\chi^2_m = \frac{n\,(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}}. \qquad (3)$$

La hipótesis H_0 se acepta para el nivel de significación α si

$$\chi^2_m < \chi^2_{1-\alpha}(1);$$

si $\chi^2_m \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(1)$, la hipótesis H_0 se rechaza.

OBSERVACIÓN. El criterio χ^2 se puede utilizar a condición de que todas las frecuencias hipotéticas $n_{ij} = \frac{n_{i\cdot}\,n_{\cdot j}}{n} > 3$, $i, j = 1, 2$ y $n > 20$. Si se trata de n pequeños, al calcular χ^2_m con ayuda de la fórmula (3), es necesario sustituir n por $n - 1$; en este caso debe ser $n_{1.} > 5$ y $n_{2.} > \frac{n_1}{3}$.

EJEMPLO 4. Verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las probabilidades de que aparezca el suceso A en dos series de pruebas, basándose en los resultados de la tabla 6.5. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

Tabla 6.5

Serie	Suceso		Suma
	A	$\bar{A}$	
1	3	10	13
2	6	17	23
Suma	9	27	36

◀ El valor mínimo de la frecuencia hipotética

$$\tilde{n}_{11} = \frac{n_{1\cdot} n_{\cdot 1}}{n} = \frac{13 \cdot 9}{36} = 3{,}25 > 3,\ n = 36,$$

por consiguiente, para la comprobación de la hipótesis H_0 se puede utilizar el criterio χ^2. Según la fórmula (3) el valor muestral de χ^2_m es igual a $\frac{36 \cdot (3 \cdot 17 - 6 \cdot 10)^2}{13 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 27} \approx 0{,}04$. El número de grados de libertad $(2-1)\cdot(2-1) = 1$. Con ayuda de la tabla S5 encontramos $\chi^2_{0{,}95}(1) \approx 3{,}84$; puesto que $\chi^2_m < \chi^2_{0{,}95}(1)$, la hipótesis H_0 se acepta. ▶

6.23. Se investigan dos procesos de fabricación de los segmentos de émbolo. Utilizando el criterio χ^2, verifíquese la hipótesis sobre la igualdad del porcentaje de producción defectuosa en ambos procesos, basándose en los datos siguientes, para $\alpha = 0{,}01$:

Segmentos	Procesos	
	1	2
Útiles	195	149
Inútiles	5	2

6.24. En el transcurso de un mes una fábrica ha suministrado a la empresa 200 cajas entre las cuales 3 son defectuosas. En el mes siguiente se han suministrado 350 cajas entre las cuales 7 son defectuosas. ¿Ha cambiado la porción de las cajas defectuosas suministradas por la fábrica? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

6.25. 1000 individuos se han clasificado en cuanto al daltonismo. Basándose en los datos mostrados a continuación, verificar si existe la dependencia entre esta enfermedad de la vista y el sexo del individuo, para $\alpha = 0{,}05$.

	Hombres	Mujeres
Daltonianos	38	6
No daltonianos	442	514

6.26. Durante una epidemia de la gripe ha sido estudiada la eficacia de las inoculaciones contra esta enfermedad. Han sido obtenidos los resultados siguientes:

Después de la inoculación		Sin inoculación	
Quedaron enfermos	No quedaron enfermos	Quedaron enfermos	No quedaron enfermos
4 individuos	192 individuos	34 individuos	111 individuos

¿Indican estos resultados la eficacia de las inoculaciones? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

§ 7. Método de cuadrados mínimos y elementos del análisis de regresión lineal

1. Cálculo de estimaciones de los parámetros de un modelo lineal. Uno de los importantes problemas de la estadística matemática consiste en hallar la relación entre dos variables aleatorias X e Y. En muchos casos una de las variables, por ejemplo, X puede ser no aleatoria (o sea, tomar los valores dados), mientras que la otra variable Y tiene fluctuaciones aleatorias debidas a los errores de mediciones de esta variable o a otras causas. A continuación designaremos la variable no aleatoria con x.

Supongamos que la dependencia funcional entre las variables, llamada para brevedad modelo, es conocida a partir de las informaciones previas con una exactitud hasta los parámetros $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ y tiene la forma

$$y = f(x; \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}). \qquad (1)$$

Se necesita, basándose en los resultados de observaciones (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, hallar la estimación de los parámetros desconocidos $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$.

De acuerdo con el método de cuadrados mínimos (MCM) en calidad de estos parámetros (estimaciones MCM) se toman los valores

$\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}$ que dan el mínimo de la función

$$Q(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i; \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1})]^2. \qquad (2)$$

A partir de las condiciones necesarias del extremo de la función $Q(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1})$ encontramos que las estimaciones MCM $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}$ son las soluciones del siguiente sistema de k ecuaciones:

$$\frac{\partial Q(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1})}{\partial \beta_j} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1. \qquad (3)$$

En el caso general las ecuaciones (3) son no lineales y por eso su resolución y, sobre todo, el análisis ulterior de los resultados obtenidos tropiezan con considerables dificultades matemáticas. Por eso con más frecuencia se utilizan los *modelos lineales en parámetros* de la forma

$$y = \beta_0 a_0(x) + \beta_1 a_1(x) + \ldots + \beta_{k-1} a_{k-1}(x), \qquad (4)$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{k-1}(x)$ son las funciones conocidas. En este caso el sistema (3) es un sistema algebraico lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} \beta_0 \sum a_0(x_i) a_0(x_i) + \beta_1 \sum a_1(x_i) a_0(x_i) + \ldots \\ \qquad \ldots + \beta_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) a_0(x_i) = \sum y_i a_0(x_i), \\ \beta_0 \sum a_0(x_i) a_1(x_i) + \beta_1 \sum a_1(x_i) a_1(x_i) + \ldots \\ \qquad + \ldots + \beta_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) a_1(x_i) = \sum y_i a_1(x_i), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_0 \sum a_0(x_i) a_{k-1}(x_i) + \beta_1 \sum a_1(x_i) a_{k-1}(x_i) + \ldots \\ \qquad \ldots + \beta_{k-1} \sum a_{k-1}(x_i) a_{k-1}(x_i) = \sum y_i a_{k-1}(x_i) \end{cases} \qquad (5)$$

y se llama *sistema normal.*

A continuación será cómodo utilizar las siguientes designaciones matriciales:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$ es el vector de observaciones;

$$A = \begin{pmatrix} a_0(x_1) a_1(x_1) \ldots a_{k-1}(x_1) \\ a_0(x_2) a_1(x_2) \ldots a_{k-1}(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0(x_n) a_1(x_n) \ldots a_{k-1}(x_n) \end{pmatrix}$$ es la matriz de regresión de la dimensión $n \times k$;

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \ldots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$ es el vector de los parámetros.

En estas designaciones el sistema de ecuaciones normales (5) tiene la forma

$$(A^{\top} A)\, \beta = A^{\top} Y,$$

donde $A^{\top} A = (a_{ij})$, $i, j = 0, 1, \ldots, k-1$, es la matriz cuadrada de k-ésimo orden. A condición de que $A^{\top}A$ es una matriz regular, la solución del sistema (5) se puede escribir en la forma

$$\tilde{\beta} = (A^{\top}A)^{-1}A^{\top}Y, \tag{6}$$

A menudo, para simplificar los cálculos, los datos iniciales se transforman previamente.

EJEMPLO 1. La medición de la temperatura de la caja de un grupo en funcionamiento, realizada con un intervalo de 5 minutos, ha dado los resultados siguientes:

t, min	5	10	15	20	25
T, °C	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

Considerando que la dependencia entre estas variables tiene la forma $T = a + bt + ct^2$, hallar las estimaciones de los parámetros a, b y c con ayuda del método de cuadrados mínimos.

◀ Transformemos previamente los datos iniciales, haciendo uso de la fórmula

$$x = \frac{t-15}{5}, \quad y = 10\,(T-60),$$

y calculemos las estimaciones de los parámetros del modelo lineal

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Puesto que en este caso $a_0(x) \equiv 1$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = x^2$, el sistema de las ecuaciones normales (5) tiene la forma

$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum x_i + \beta_2 \sum x_i^2 = \sum y_i, \\ \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 + \beta_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i, \\ \beta_0 \sum x_i^2 + \beta_1 \sum x_i^3 + \beta_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{7}$$

Para calcular los coeficientes del sistema (7), hagamos la tabla 7.1:

Tabla 7.1

t	x	T	y	xy	x^2	yx^2	x^3	x^4
5	−2	59,3	−7	14	4	−28	−8	16
10	−1	59,8	−2	2	1	−2	−1	1
15	0	60,1	1	0	0	0	0	0
20	1	64,9	49	49	1	49	1	1
25	2	70,2	102	204	4	408	8	16
$\sum$	0	—	143	269	10	427	0	34

El sistema de ecuaciones normales (7) es el siguiente:

$$\begin{cases} 5\beta_0 + 10\beta_2 = 143, \\ 10\beta_1 = 269, \\ 10\beta_0 + 34\beta_2 = 427. \end{cases} \tag{8}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\tilde{\beta}_0 \approx 8{,}457,\ \tilde{\beta}_1 = 26{,}9\ \tilde{\beta}_2 \approx 10{,}07;$$

ahora bien, la dependencia entre y y x tiene la forma

$$y = 8{,}457 + 26{,}9x + 10{,}07x^2. \tag{9}$$

El paso a las variables iniciales arroja

$$(T-60)\cdot 10 = 8{,}457 + 26{,}9\,\frac{t-15}{5} + 10{,}07\left(\frac{t-15}{5}\right)^2,$$

de donde obtenemos finalmente

$$T = 61{,}84 - 0{,}67t + 0{,}04t^2. \blacktriangleright$$

Considerando que la dependencia entre las variables x e Y tiene la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, en los problemas 7.1—7.4, es necesario hallar las estimaciones de los parámetros a base de las muestras siguientes.

7.1.

x	0	2	4	6	8	10
y	5	−1	−0,5	1,5	4,5	8,5

7.2.

x	0,07	0,31	0,61	0,99	1,29	1,78	2,09
y	1,34	1,08	0,94	1,06	1,25	2,01	2,60

7.3.

x	26	30	34	38	42	46	50
y	3,94	4,60	5,67	6,93	8,25	7,73	10,55

7.4.

x	−2	−1	0	1	2
y	4,8	0,4	−3,4	0,8	3,2

En los problemas 7.5—7.7 es necesario hallar las estimaciones de los parámetros β_0 y β_1, considerando que la depen-

dencia entre las variables x e Y tiene la forma

$$y = \beta_0 + \frac{\beta_1}{x}.$$

7.5.

x	2	5	6	12
y	8	5,25	3,50	3,25

7.6.

x	5,67	4,45	3,84	3,74	3,73	2,18
y	6,8	8,5	10,5	10,2	6,8	11,8

7.7.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	16,50	13,75	13,31	12,50	13,52	12,75	12,30	12,83	12,28	12,34

7.8*. Escogidos varios valores de x, está medida la variable Y. ¿Se puede utilizar los datos obtenidos para estimar los parámetros del modelo

$$x = \beta_0 + \beta_1 y?$$

7.9. Para representar ciertos datos se supone utilizar el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x$, donde el valor de β_1 es conocido. Hallar la estimación del parámetro β_0.

7.10. En el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x$ el parámetro β_0 es conocido. Hallar la estimación del parámetro β_1.

Sean (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, los resultados de observaciones de dos variables x e Y. Escribir la matriz A para los modelos lineales siguientes (problemas 7.11—7.13):

7.11. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

7.12. $y = \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} \omega x + \beta_2 \cos \omega x$, donde ω es la constante dada.

7.13. $y = \beta_0 + \beta_1 e^x$.

7.14. Utilizando las designaciones matriciales, mostrar que las estimaciones de los parámetros del modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 (x - \bar{x})$$

sobre la base de los resultados de observaciones $(x_i y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tienen la forma $\tilde{\beta}_0 = \bar{y}$, $\tilde{\beta}_1 = Q_{xy}/Q_x$, donde $Q_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, $Q_x = \sum (x_i - \bar{x})^2$.

2. Análisis estadístico de estimaciones de un modelo lineal, calculadas con ayuda del método de cuadrados mínimos. Representemos los resultados de observaciones (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, del modo siguiente:

$$y_i = \beta_0 a_0(x_i) + \beta_1 a_1(x_i) + \ldots + \beta_{k-1} a_{k-1}(x_i) + \varepsilon_i,$$

donde ε_i son los errores aleatorios de observaciones.

Supongamos que los *errores de observaciones* ε_i *tienen las esperanzas matemáticas nulas e iguales varianzas* σ_ε^2, *así como no están correlacionados*, o sea están cumplidas las condiciones

$$\mathbf{M}[\varepsilon_i] = 0, \tag{10}$$

$$k_{ij} = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \tag{11}$$

donde k_{ij} es la covarianza de las variables aleatorias ε_i y ε_j, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Las estimaciones MCM, independientemente del volumen de la muestra n (a condición de que $n \geqslant k$, donde k es el número de los parámetros que se estiman) *y para toda ley de distribución de los errores de observaciones*, tienen las propiedades siguientes:

1. Son *funciones lineales de los resultados de observaciones* y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *y las estimaciones insesgadas de los parámetros*, o sea, $\mathbf{M}[\beta_j] = \beta_j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

2. Tienen *varianzas mínimas* en la clase de estimaciones insesgadas que son las funciones lineales de los resultados de observaciones (teorema de Gauss — Márkov).

Si los errores de observaciones ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *no están correlacionados y tienen la distribución normal* $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ (en este caso los errores de observaciones son también independientes), entonces, adicionalmente a las propiedades 1 y 2 se cumple la propiedad

3. Estimaciones MCM *coinciden con las calculadas con ayuda del método de verosimilitud máxima.*

Sean $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}$ las estimaciones MCM de los parámetros del modelo lineal (4). Utilizando (2), calculemos la suma residual de los cuadrados Q_e:

$$Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}) = \sum [y_i - \tilde{\beta}_0 a_0(x_i) - \tilde{\beta}_1 a_1(x_i) - \ldots - \tilde{\beta}_{k-1} a_{k-1}(x_i)]^2$$

o bien en las designaciones matriciales

$$Q_e = (Y - A\tilde{\beta})^T (Y - A\tilde{\beta}) = Y^T Y - \tilde{\beta}^T A^T Y. \tag{12}$$

La estimación insesgada de la varianza de los errores de observaciones σ_ε^2 se calcula con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\sigma}_\varepsilon^2 = s_\varepsilon^2 = \frac{Q_e}{n-k} \tag{13}$$

y la estimación de la matriz de covarianza de las estimaciones MCM de los parámetros es igual

$$K = s_\varepsilon^2 (A^T A)^{-1}. \tag{14}$$

Supongamos que los *errores de observaciones no están correlacionados y tienen la distribución normal* $N(0, \sigma_\varepsilon)$. En este caso

a) las estimaciones de los parámetros β_j, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, del modelo (4), como funciones lineales de los resultados de observaciones, tienen *distribución normal*; las cotas de los *intervalos confidenciales para los parámetros* se calculan por medio de la fórmula

$$\widetilde{\beta}_j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} (n-k)\, s_\varepsilon \sqrt{a_{jj}}, \tag{15}$$

donde a_{jj} es el elemento de la matriz $(A^T A)^{-1}$ y α, el nivel dado de significación;

b) la estadística

$$\frac{Q_e}{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{(n-k)\, s_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}$$

tiene la distribución χ^2 con $(n-k)$ grados de libertad; el *intervalo confidencial para la varianza de los errores de observaciones* es definido por la relación

$$\frac{(n-k)\, s_\varepsilon^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-k)} < \sigma_\varepsilon^2 < \frac{(n-k)\, s_\varepsilon^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-k)}. \tag{16}$$

EJEMPLO 2. Hallar las estimaciones de los parámetros del modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2,$$

basándose en los datos siguientes:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	0	4	5	4	2	-2

Determinar las estimaciones de la varianza de los errores de observaciones y de la matriz de covarianza. Suponiendo que los errores de observaciones no están correlacionados y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$, es necesario hallar los intervalos confidenciales para el parámetro del modelo y para la varianza de los errores de observaciones. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

◀ Para calcular las estimaciones de los parámetros hagamos la tabla 7.2.

El sistema de ecuaciones normales (7) tiene la forma

$$\begin{cases} 7\beta_0 + \quad + 28\beta_2 = 3, \\ \quad 28\beta_1 \quad\quad = 28, \\ 28\beta_0 \quad + 196\beta_2 = -92. \end{cases}$$

Tabla 7.2

x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
−3	−10	30	9	−90	−27	81
−2	0	0	4	0	−8	16
−1	4	−4	1	4	−1	1
0	5	0	0	0	0	0
1	4	4	1	4	1	1
2	2	4	4	8	8	16
3	−2	−6	9	−18	27	81
0	3	28	28	−92	0	196

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\tilde{\beta}_0 \approx 5{,}38, \quad \tilde{\beta}_1 = 1, \quad \tilde{\beta}_2 \approx -1{,}24.$$

Calculemos la suma residual da los cuadrados. Puesto que $Y^\top Y = \sum y_i^2 = 165$ y $A^\top Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 28 \\ -92 \end{pmatrix}$ es el segundo miembro del sistema normal, por medio de la fórmula (12) obtenemos

$$Q_e = 165 - (5{,}38 \;\; 1 \;\; -1{,}24) \begin{pmatrix} 3 \\ 28 \\ -92 \end{pmatrix} = 6{,}78.$$

Las estimaciones de la varianza y las desviaciones típicas de los errores de observaciones se definen con ayuda de la fórmula (13): $s_\varepsilon^2 = \frac{6{,}78}{7-3} = 1{,}695$; por consiguiente, $s_\delta \approx 1{,}302$. La estimación de la matriz de covarianza según la fórmula (14) es igual a

$$K = 1{,}695 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{pmatrix}^{-1} \approx 1{,}695 \begin{pmatrix} 0{,}333 & 0 & -0{,}048 \\ 0 & 0{,}036 & 0 \\ -0{,}048 & 0 & 0{,}012 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}565 & 0 & -0{,}081 \\ 0 & 0{,}061 & 0 \\ -0{,}081 & 0 & 0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Determinemos los intervalos confidenciales para los parámetros del modelo. Con ayuda de la tabla S6 encontramos $t_{0{,}975}(4) = 2{,}776$.

Según la fórmula (15) las cotas de los intervalos confidenciales

para β_0: $5{,}38 \pm 2{,}776 \cdot 1{,}302 \cdot \sqrt{0{,}333}$;

para β_1: $1 \pm 2{,}776 \cdot 1{,}302 \cdot \sqrt{0{,}036}$;

para β_2: $-1{,}24 \pm 2{,}776 \cdot 1{,}302 \cdot \sqrt{0{,}012}$

o bien $\beta_0 \in (3{,}29;\ 7{,}47)$, $\beta_1 \in (0{,}31;\ 1{,}69)$, $\beta_2 \in (-1{,}64;\ -0{,}84)$.

Determinemos el intervalo confidencial para la varianza de los errores de observaciones. Por medio de la tabla S5 encontramos $\chi^2_{0{,}975}(4) = 11{,}1$, $\chi^2_{0{,}025}(4) = 0{,}48$. Según la fórmula (16) el intervalo confidencial para σ tiene la forma

$$\left(\frac{(7-3)\cdot 1{,}695}{11{,}1};\ \frac{(7-3)\cdot 1{,}695}{0{,}48}\right) \text{ o bien } (0{,}611;\ 14{,}008).$$

Una gran fluctuación de las cotas de los intervalos confidenciales se explica por el hecho de que las estimaciones de los parámetros y de la varianza de los errores de observaciones están determinadas por un pequeño número de observaciones ($n = 7$). ▶

7.15. Hallar las estimaciones de la varianza de los errores de observaciones y de la matriz de covarianza de las estimaciones de los parámetros en el problema 7.4.

7.16. Se supone que la dependencia entre las variables Y y x se describe con suficiente exactitud por la función

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Hallar las estimaciones de los párametros β_0, β_1 y β_2, así como la estimación de la matriz de covarianza de estas estimaciones, basándose en la muestra siguiente:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	−2	−1,5	−1	0	3	14

En los problemas 7.17—7.19, basándose en las muestras de observaciones, se necesita:

a) hallar las estimaciones de los parámetros del modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$;

b) hallar las estimaciones de la varianza de los errores de observaciones y de la matriz de covarianza;

c) determinar los intervalos confidenciales para los parámetros y para la varianza de los errores de observaciones, siendo dado el nivel de significación α.

Se supone que los errores de observaciones no están correlacionados y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$.

7.17

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	0	−1	−1	1	5	12

, $\alpha = 0{,}10$.

7.18

x	−2	−1	0	1	2
y	3	0	3	6	9

, $\alpha = 0{,}05$.

7.19

x	−3	−2	−1	0	2	3
y	−6	−4	−2	−1	1	0

, $\alpha = 0{,}10$.

7.20. Sean $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ los resultados de mediciones de la magnitud Θ. Supongamos que los errores de mediciones ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tienen las esperanzas matemáticas nulas e iguales varianzas, así como no están correlacionados. Utilizando el método de cuadrados mínimos, es necesario hallar la estimación de θ y la estimación insesgada de la varianza de los errores de observaciones. Hay que comparar la estimación obtenida de la varianza con la estimación de la varianza que se obtiene por medio de la fórmula (13).

7.21.** Demostrar que la suma residual de los cuadrados Q_e satisface la relación (12).

7.22*. Mostrar que si los errores de observaciones ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tienen la esperanza matemática nula, entonces las estimaciones de los parámetros del modelo lineal, calculadas con ayuda del método de cuadrados mínimos, son las funciones lineales de los resultados de observaciones y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, y las estimaciones insesgadas de estos parámetros.

7.23*. Supongamos que los errores de observaciones no están correlacionados y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$. Mostrar que las estimaciones MCM coinciden con las que se obtienen con ayuda del método de verosimilitud máxima.

7.24. Mostrar que las cotas de los intervalos confidenciales para los parámetros del modelo (4) se calculan con ayuda de la fórmula (15).

Una gran importancia aplicada la tiene el caso de *regresión lineal de Y en x* (véase también el § 1, p. 4). En este caso los resultados de observaciones (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, se representan en forma de $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$.

Para calcular las estimaciones de los parámetros de la regresión lineal y de su análisis estadístico pueden utilizarse las fórmulas (6),

(12)—(16). Sin embargo, la siguiente sucesión de cálculos es más cómoda.

CÁLCULO DE LAS ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{Q_{xy}}{Q_x}, \quad \tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}, \tag{17}$$

donde

$$Q_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n},$$

$$Q_x = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}.$$

CÁLCULO DE LA SUMA RESIDUAL DE LOS CUADRADOS Y DE LA ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA DE LOS ERRORES DE OBSERVACIONES:

$$Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1) = Q_y - \tilde{\beta}_1 Q_{xy}, \tag{18}$$

donde $Q_y = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$;

$$s_\varepsilon^2 \frac{Q_e}{n-2}. \tag{19}$$

CÁLCULO DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN:

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x Q_y}}. \tag{20}$$

Suponiendo que los errores de observaciones ε_i no están correlacionados y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$, se determinan las cotas de los intervalos confidenciales y se comprueba la concordancia de la regresión lineal con los resultados de observaciones.

LAS COTAS DE LOS INTERVALOS CONFIDENCIALES PARA LOS PARÁMETROS β_0 y β_1 se calculan por las fórmulas

$$\tilde{\beta}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} (n-2)\, s_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{nQ_x}}, \tag{21}$$

$$\tilde{\beta}_1 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} (n-2)\, s_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{Q_x}},$$

LAS COTAS DEL INTERVALO CONFIDENCIAL PARA EL VALOR MEDIO DE Y_0, correspondiente al valor dado de $x = x_0$, se define por la fórmula

$$\tilde{y}_0 \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} (n-2)\, s_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{Q_x}}. \tag{23}$$

donde $\tilde{y}_0 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_0$.

La verificación de la concordancia de la regresión lineal con los resultados de observaciones se reduce a la verificación de la hipótesis sobre la ausencia de una relación lineal entre las variables Y y x, o sea, de la hipótesis H_0: $\beta_1 = 0$. La hipótesis H_0 se acepta para el nivel de significación α si el intervalo confidencial, con las cotas determinadas con ayuda de la fórmula (22), cubre el cero. En este caso conviene considerar que la regresión lineal no concuerda con los resultados de observaciones y para la representación de los datos es necesario utilizar un otro modelo (por ejemplo, el modelo de segundo orden). Para verificar la hipótesis H_0 se puede también hacer uso de la estadística $F = \widetilde{\beta}_1 Q_{xy}/s_\varepsilon^2$. Si la hipótesis H_0 es cierta, esta estadística tiene la distribución de Fisher $F(1, n-2)$. El dominio crítico es definido por la desigualdad $F_m \geqslant F_{1-\alpha}(1, n-2)$, donde F_m es el valor muestral de la estadística F. La concordancia de la regresión lineal con los resultados de observaciones puede ser determinada también verificando la hipótesis sobre la significación del coeficiente de correlación (el § 4, p. 4), o sea, la hipótesis H_0: $\rho = 0$; si esta hipótesis se rechaza, la regresión lineal concuerda con los resultados de observaciones.

EJEMPLO 3. En una planta química durante cinco turnos de trabajo han sido obtenidos los siguientes datos sobre el rendimiento del producto Y (kg/h) en función de la temperatura de la reacción x (°C):

x	51	32	80	73	64	45	83	44	93
y	52,7	15,2	89,5	94,8	76	39,3	114,8	36,5	137,4

x	28	35	40	29	53	58	65	75
y	5,3	20,7	21,7	9,2	55,4	64,3	79,1	101

Hallar las estimaciones de los parámetros de la regresión lineal de Y en x y los intervalos confidenciales para los parámetros y para el valor medio de Y, siendo el valor de $x = x_0$; comprobar la concordancia de la regresión lineal con los resultados de observaciones, así como calcular el coeficiente de correlación. Se supone que los errores de mediciones son independientes y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$. Tomar el nivel de significación igual a $\alpha = 0{,}05$.

◀ En consonancia con los datos de mediciones tenemos

$$n = 17,\ \sum x_i = 948,\ \sum x_i^2 = 59\,422,\ \sum y_i = 1012{,}3,$$

$$\sum y_i^2 = 85364{,}05,\ \bar{x} = 55{,}765,\ \sum x_i y_i = 69165{,}4,\ \bar{y} = 59{,}547;$$

para el control calculemos

$$\sum (x_i + y_i)^2 = 283116{,}85,$$

$$\sum x_i^2 + 2\sum x_i y_i + \sum y_i^2 = 59\,422 + 2 \cdot 69165{,}4 + 85364{,}05 = 283116{,}85.$$

Por consiguiente, los cálculos son exactos. Calculemos previamente

$$Q_x = 59422 - \frac{948^2}{17} \approx 6557{,}0588,$$

$$Q_y = 85364{,}05 - \frac{1012{,}3^2}{117} \approx 25084{,}5624,$$

$$Q_{xy} = 69165{,}4 - \frac{948 \cdot 1012{,}3}{17} \approx 12714{,}788,$$

Con ayuda de las fórmulas (17) hallemos las estimaciones de los coeficientes de regresión:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{12714{,}788}{6557{,}0588} \approx 1{,}94,$$

$$\tilde{\beta}_0 = 59{,}547 - 1{,}939 \cdot 55{,}765 \approx -48{,}59,$$

La regresión directa tiene la forma

$$y = -48{,}59 + 1{,}94x.$$

Calculemos la suma residual de los cuadrados y la estimación de la varianza de los errores de observaciones, haciendo uso de las fórmulas (18) y (19):

$$Q_e = 25084{,}5624 - 1{,}94 \cdot 12714{,}788 \approx 430{,}588,$$

$$s_e^{2)} = \frac{430{,}588}{17-2} \approx 28{,}706, \quad s_e \approx 5{,}358.$$

Determinemos las cotas de los intervalos confidenciales para los coeficientes de regresión. Para $\alpha = 0{,}05$ hallamos $t_{0{,}975}(15) = 2{,}131$ (tabla S6). Con ayuda de las fórmulas (21), (22) calculemos las cotas de los intervalos confidenciales. Para el coeficiente β_0:

$$-48{,}59 \pm 2{,}135 \cdot 5{,}358 \cdot \sqrt{\frac{59422}{17 \cdot 6557{,}059}} \approx -48{,}59 \pm 8{,}35;$$

para el coeficiente β_1:

$$1{,}94 \pm 2{,}135 \cdot 5{,}358 \cdot \sqrt{\frac{1}{6557{,}059}} \approx 1{,}94 \pm 0{,}14.$$

Las cotas del intervalo confidencial para el valor de Y_0, correspondiente al valor dado de la variable $x = x_0$, son definidas por la fórmula (23):

$$\tilde{y}_0 \pm 2{,}135 \cdot 5{,}358 \cdot \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{(x_0 - 55{,}765)^2}{6557{,}059}} =$$

$$= \tilde{y}_0 \pm 11{,}4 \cdot \sqrt{0{,}059 + \frac{(x_0 - 55{,}765)^2}{6557{,}059}}.$$

Para verificar la hipótesis H_0: $\beta_1 = 0$, determinemos la relación

$$\frac{\widetilde{\beta}_1 Q_{xy}}{s_e^2} = \frac{1{,}94 \cdot 12714{,}788}{28{,}706} \approx 859{,}29.$$

Puesto que $F_{0{,}975}(1,15) = 6{,}199$ (S7), la hipótesis H_0: $\beta_1 = 0$ se rechaza: por lo tanto, la regresión lineal concuerda con los resultados de observaciones. La estimación del coeficiente de correlación, según la fórmula (20), es igual a

$$r \approx \frac{12714{,}788}{\sqrt{6557{,}059 \cdot 25084{,}56}} \approx 0{,}991. \blacktriangleright$$

En los problemas 7.25—7.28, basándose en las muestras dadas, es necesario hallar las estimaciones y los intervalos confidenciales para los parámetros de la regresión lineal de Y en x y el intervalo confidencial para el valor medio de Y_0, siendo el valor de $x = x_0$. Hay que comprobar la concordancia de la regresión lineal con los resultados de observaciones, así como calcular el coeficiente de correlación. Se supone que los errores de observaciones son independientes y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$. El nivel de significación α se da. Durante los cálculos es necesario utilizar los valores de las sumas de las variables, de sus cuadrados y de los productos de dos en dos.

7.25.

x	2	5	8	10	14	15	4	12	3	7	6
y	14,39	9,45	7,05	5,32	16,94	1,97	8,75	3,41	13,37	8,22	9,39

$$\sum x_i = 86, \quad \sum y_i = 98{,}26, \quad \sum x_i^2 = 868, \quad \sum y_i^2 = 1087{,}91,$$
$$\sum x_i y_i = 682{,}25, \quad \alpha = 0{,}05.$$

7.26.

x	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7
y	17,0	16,2	13,3	13,0	9,7	9,9	6,2	5,8	5,7

$$\sum x_i = 81{,}3, \quad \sum y_i = 96{,}8, \quad \sum x_i^2 = 865{,}63, \quad \sum y_i^2 = 1194,$$
$$\sum x_i y_i = 735{,}7, \quad \alpha = 0{,}10.$$

7.27.

x	7,9	11,6	12,8	14,9	16,3	18,6	20,3	21,9	23,6
y	13,0	22,8	24,8	28,6	31,6	38,7	40,0	44,9	43,0

$$\sum x_i = 147{,}9,\ \sum y_i = 287{,}4\ \sum x_i^2 = 2643{,}13,$$
$$\sum y_i^2 = 10083{,}1,\ \sum x_i y_i = 5155{,}77,\ \alpha = 0{,}01.$$

7.28.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0,21	0,32	0,58	1,02	1,76	2,68	3,75

x	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y	5,07	6,62	8,32	10,21	12,33	14,58	17,07	19,53	22,72	29,05

$$\sum x_i = 153,\ \sum y_i = 155{,}82,\ \sum x_i^2 = 1785,$$
$$\sum y_i^2 = 2666{,}37,\ \sum x_i y_i = 2080{,}25,\ \alpha = 0{,}05.$$

7.29*. Hallar la matriz de covarianza de las estimaciones de los parámetros de la regresión lineal de Y en x, basándose en los resultados de n observaciones (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

Supongamos que los errores de observaciones no están correlacionados y tienen la distribución normal $N(0, \sigma_\varepsilon)$. Utilizar el resultado del problema 7.29, resolver los problemas 7.30—7.33.

7.30. ¿Qué distribución tienen las estimaciones $\tilde{\beta}_0$ y $\tilde{\beta}_1$?

7.31. Mostrar que las cotas de los intervalos confidenciales para los parámetros β_0 y β_1 pueden ser determinadas por las fórmulas (21) y (22).

7.32*. Hallar la esperanza matemática y la varianza para la variable aleatoria $Y_0 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_0$, donde x_0 es el valor dado. ¿Qué distribución tiene la variable aleatoria Y_0?

7.33. Mostrar que las cotas del intervalo confidencial para la esperanza matemática de Y_0 se determinan con ayuda de la fórmula (23).

7.34. Mostrar que la matriz de covarianza de las estimaciones de los parámetros en el problema 7.14 se calcula

por la fórmula

$$K = \sigma_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 1/Q_x \end{pmatrix}.$$

7.35.** Mostrar que la suma residual de los cuadrados para el caso de la regresión lineal de Y en x puede ser calculada por medio de la fórmula (18).

7.36*. Redactar un subprograma para la transposición de la matriz A. En calidad de los parámetros hay que utilizar: A, el identificador del juego de elementos de la matriz; M, N, el número de filas y de columnas de la matriz, respectivamente; AT, el identificador de la matriz transpuesta.

7.37. Redactar el subprograma para calcular la matriz inversa a la matriz A dada. Utilizar en calidad de los parámetros: N, el número de filas y de columnas de la matriz A; A, el identificador de la matriz.

7.38. Redactar el subprograma para calcular el producto de las matrices: a) A de la dimensión M × N y B de la dimensión N × K; b) A^T y B (no se debe realizar la transposición de la matriz A).

7.39. Redactar el subprograma para construir la matriz A en el caso de utilizar las funciones $a_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ (véase la pág. 349).

7.40. Redactar el subprograma para calcular las estimaciones con ayuda del método de los cuadrados mínimos, haciendo uso de la fórmula (6), así como de los subprogramas, obtenidos después de resolver los problemas 7.36—7.39.

7.41. Redactar el subprograma para calcular la estimación de la varianza s_ε^2 y la suma residual de los cuadrados Q_e, utilizando las fórmulas (12), (13), así como los subprogramas obtenidos después de resolver los problemas 7.36 y 7.38.

7.42. Redactar el subprograma para calcular la matriz de covarianza de las estimaciones, haciendo uso de los subprogramas obtenidos después de resolver los problemas 7.36, 7.38 y 7.41.

En los problemas 7.43—7.52 es necesario redactar el programa en el Fortran para calcular las estimaciones de los parámetros del modelo indicado por medio del método de cuadrados mínimos, utilizando los subprogramas obtenidos durante la resolución de los problemas 7.36—7.42. Hay que prever la salida imprimida de las estimaciones de los parámetros del modelo, de la varianza de los errores de observaciones y de la matriz de covarianza de las estimaciones.

En los problemas 7.43—7.46 hallar las estimaciones para los parámetros del modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

7.43.

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	0,4	0,3	1,0	1,7	2,1	3,4	4,1	5,8
x	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
y	7,7	9,4	11,4	13,6	15,6	18,6	21,2	24,1

7.44.

x	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6
y	0,43	0,94	1,91	3,01	4	4,56	6,45	8,59	11,15
x	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4	6,8	
y	13,88	16,93	20,47	24,15	28,29	32,61	37,41	42,39	

7.45.

x	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
y	25	26	4	7	6	13	30	26	32	40
x	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
y	32	21	11	5	16	3	21	22	19	32

7.46.

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
y	0,22	0,23	0,31	0,43	0,56	0,82	1,06	1,25	1,72	2,28
x	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	
y	2,67	3,26	3,72	4,32	5,11	5,98	6,64	7,02	8,32	

En los problemas 7.47—7.48 hallar las estimaciones para los parámetros del modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x.$$

7.47.

x	1	2	3	4	5	6
y	2,11	2,45	2,61	2,73	2,75	2,81

x	7	8	9	10	11	12
y	2,87	2,91	2,96	3,03	3,05	3,12

7.48.

x	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
y	4,39	4,75	4,98	5,11	5,12	5,18	5,28

x	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2
y	5,36	5,45	5,52	5,53	5,57	5,63	5,64

En los problemas 7.49—7.50 hallar las estimaciones para los parámetros del modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 e^{0,1x}.$$

7.49.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,10	0,21	0,43	0,51	0,62	0,81

x	7	8	9	10	11	12
y	1,01	1,23	1,47	1,53	1,75	2,25

7.50.

x	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	4,11	4,16	4,23	4,29	4,36	4,42	4,53

x	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0
y	4,57	4,63	4,75	4,87	4,88	5,01

En los problemas 7.51—7.52 hallar las estimaciones para los parámetros del modelo $y = \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} x + \beta_2 \cos x$.

7.51.

x	0,5	1	1,5	2,0	2,5	3,0
y	2,47	2,86	3,01	2,91	2,55	2,11
x	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
y	2,61	1,25	0,97	1,03	1,34	1,70

7.52.

x	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,00
y	2,83	2,31	1,95	2,05	2,21	2,58	3,10
x	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	
y	3,25	3,75	4,15	3,78	3,43	3,07	

3. Aplicación de los sistemas ortogonales de funciones. El sistema de funciones $\psi_0(x)$, $\psi(x)$, ..., $\psi_{k-1}(x)$ se llama *ortogonal sobre el conjunto* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_m(x_i)\,\psi_l(x_i) = 0 \text{ para } m \neq l;\ m, l = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Sean (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, los resultados de observaciones de las variables x e Y. Las estimaciones de los parámetros del modelo lineal

$$y = \beta_0\psi_0(x) + \beta_1\psi_1(x) + \ldots + \beta_{k-1}\psi_{k-1}(x),$$

determinadas por el método de cuadrados mínimos, con la utilización del sistema ortogonal de las funciones $\psi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, se calculan con ayuda de las fórmulas

$$\tilde{\beta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\psi_j(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} \psi_j^2(x_i)}, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{24}$$

En el caso en que para representar los datos se utiliza un modelo polinomial y los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable x distan igualmente uno de otro con el paso b, se emplean los *polinomios de Chébishev, ortogonales sobre este conjunto*:

$$\zeta_0(x) \equiv 1,\ \zeta_1(x) = x - \frac{n+1}{2};$$

los polinomios de orden más alto se determinan con ayuda de la fórmula recurrente:

$$\zeta_{l+1}(x)=\zeta_1(x)\,\zeta_l(x)-\frac{l^2(n^2-l^2)}{4(4l^2-1)}\,\zeta_{l-1}(x).$$

Es cómodo realizar los cálculos concretos, utilizando los valores tabulados de los polinomios ortogonales $P_k(i)=\lambda_k\zeta_k(i)$, donde i toma los valores $1, 2, \ldots, n$. En la tabla S9 se dan los valores de $P_k(i)$ cuando $k=1, 2, \ldots, 5$ y $n=8, 10, 12, 13$. En esta tabla se dan también los valores de $\sum_{i=1}^{n} P_k^2(i)$, necesarios para determinar las estimaciones de los parámetros y la suma residual de los cuadrados, así como los valores de los coeficientes λ_k, que hacen falta para notar el modelo en las variables iniciales.

Al calcular con la utilización de la tabla de valores de los polinomios ortogonales, el modelo tiene la forma siguiente:

$$y_i=\beta_0P_0(i)+\beta_1P_1(i)+\ldots+\beta_{k-1}P_{k-1}(i),\quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Para determinar las estimaciones de los parámetros del modelo (25), x_i se transforma previamente con ayuda de la fórmula

$$i=\frac{x_i-x_1}{b}+1,\quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{26}$$

Calculamos sucesivamente las estimaciones de los parámetros, haciendo uso de las fórmulas

$$\tilde{\beta}_0=\frac{\sum y_i}{n}=\bar{y},\quad \tilde{\beta}_l=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_iP_l(i)}{\sum_{i=1}^{n} P_l^2(i)},\quad l=1, 2, \ldots, k-1, \tag{27}$$

determinando en seguida los valores de la suma residual de los cuadrados a partir de la relación

$$Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_l)=Q_y-\tilde{\beta}_1^2\sum_{i=1}^{n} P_1^2(i)-$$

$$-\tilde{\beta}_2^2\sum_{i=1}^{n} P_2^2(i)-\ldots-\tilde{\beta}_l^2\sum_{i=1}^{n} P_l^2(i). \tag{28}$$

El mejor orden del modelo se determina del modo suficiente. A cada paso se encuentra la estimación de la varianza de los errores de observaciones:

$$s_e^2(l)=\frac{Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_l)}{n-(l+1)},\quad l=1, 2, \ldots \tag{29}$$

Este valor se compara con el valor $s_\varepsilon^2(l-1)$ de la estimación de la varianza de los errores de observaciones al paso precedente. Si $s_\varepsilon^2(l-1) > s_\varepsilon^2(l)$, con la particularidad de que

$$\frac{s_\varepsilon^2(l-1)}{s_\varepsilon^2(l)} > F_{1-\alpha}(n-l,\ n-l-1),$$

entonces la diferencia de las varianzas $s_\varepsilon^2(l-1)$ y $s_\varepsilon^2(l)$ de los errores de observaciones es significativa y el orden del modelo debe ser aumentado en una unidad. Si la diferencia entre las varianzas $s_\varepsilon^2(l-1)$ y $s_\varepsilon^2(l)$ de los errores de observaciones es insignificativa, hay que escoger el modelo de orden $(l-1)$. La comprobación de la significación puede realizarse con ayuda de la relación precedente si los errores de observaciones ε_i no están correlacionados y tienen las varianzas iguales y la distribución normal.

EJEMPLO 4. Escoger el orden y hallar las estimaciones de los parámetros del modelo polinomial (25) para representar los datos:

x	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y	0,11	0,26	0,16	0,28	1,27	2,32	2,68	3,85	4,63	7,2

Se supone que los errores de observaciones no están correlacionados y tienen iguales varianzas y la distribución normal. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

◀ Para los cálculos utilicemos el modelo (25). Transformemos los valores x_i por la fórmula (26): $i = \frac{x_i - x_1}{0{,}2} + 1$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 10$. La tabla 7.3 contiene los valores de las variables i e y y de los primeros tres polinomios ortogonales para $n = 10$ (véase la tabla S9).

Calculamos previamente $\bar{y} = 2{,}276$ y $Q_y = 50{,}659$. Utilizando los valores de $P_1(i)$ en la tercera columna de la tabla 7.3, obtenemos $\sum_{i=1}^{n} y_i P_1(i) = 121{,}1$. Por consiguiente, según la fórmula (27) $\tilde{\beta}_1 = \frac{121{,}1}{330} = 0{,}367$ y el valor de la suma residual de los cuadrados y la estimación de la varianza según las fórmulas (28) y (29) son tales:

$$Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1) = 50{,}659 - 0{,}367^2 \cdot 330 = 6{,}219;$$

$$s_\varepsilon^2(1) = \frac{6{,}219}{10-2} = 0{,}777.$$

Luego, utilizando el valor de $P_2(i)$ en la cuarta columna, calculemos $\sum_{i=1}^{n} y_i P_2(i) = 26{,}39$. Encontramos

$$\tilde{\beta}_2 = \frac{26{,}39}{132} = 0{,}200;\ Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = 0{,}853,$$

$$s_\varepsilon^2(2) = \frac{0{,}853}{10-3} = 0{,}122.$$

Tabla 7.3

i	y_i	$P_1(i)$	$P_2(i)$	$P_3(i)$
1	0,11	−9	6	−42
2	0,26	−7	2	+14
3	0,16	−5	−1	+35
4	0,28	−3	−3	+31
5	1,27	−1	−4	+12
6	2,32	+1	−4	−12
7	2,68	+3	−3	−31
8	3,85	+5	−1	−35
9	4,63	+7	2	−14
10	7,20	+9	6	+42
$\sum_{i=1}^{n} P_k^2(i)$	—	330	132	8580
λ_k	—	2	$\frac{1}{2}$	5/3

Puesto que $s_\varepsilon^2(1) > s_\varepsilon^2(2)$, con la particularidad de que $\frac{s_\varepsilon^2(1)}{s_\varepsilon^2(2)} = \frac{0,777}{0,122} = 6,372$, lo que es mayor que $F_{0,95}(8,7) = 3,762$, entonces aumentemos en una unidad el grado del polinomio. Con ayuda de los valores de $P_3(i)$ en la quinta columna de la tabla 7.3 encontramos $\sum_{i=1}^{n} y_i P_3(i) = 20,45$, por lo tanto,

$$\tilde{\beta}_3 = \frac{20,45}{8580} = 0,0024,\ Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3) = 0,804,$$

$$s_\varepsilon^2(3) = \frac{0,804}{10-4} = 0,134,$$

Puesto que [1] $\frac{s_\varepsilon^2(3)}{s_\varepsilon^2(2)} = \frac{0,134}{0,122} = 1,099$, lo que es menor que $F_{0,095}(6, 7) = 5,119$, entonces la diferencia entre las estimaciones de la varianza $s_\varepsilon^2(2)$ y $s_\varepsilon^2(3)$ es insignificativa y los cálculos se cesan.

1) Aquí, como de ordinario, al comparar las varianzas, en el numerador se pone la varianza mayor.

Ahora bien, para representar los datos hemos obtenido el modelo de segundo orden:

$$\tilde{y}_i = 2{,}276 + 0{,}367P_1(i) + 0{,}2P_2(i), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 10. \blacktriangleright$$

Basándose en las muestras dadas en los problemas 7.53—7.55, encontrar las estimaciones de los parámetros y el orden del modelo polinomial. Se supone que los errores de observaciones tienen la distribución normal y son independientes y de igual exactitud; el nivel de significación α se da.

7.53.

x	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
y	0	4	18	13	18	24	29	35	42	50

$\alpha = 0{,}10$

7.54.

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
y	0	0,06	0,18	0,40	0,39	0,67	0,54	1,40

$\alpha = 0{,}05$

7.55.

x	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
y	5,01	5,02	5,32	6,13	7,41	9,98

x	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
y	14,30	20,95	30,10	44,03	60,50	75,20

$\alpha - 0{,}10$

7.56. Sea $\psi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, el sistema ortogonal de funciones sobre el conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mostrar que las estimaciones de los parámetros del modelo

$$y = \beta_0\psi_0(x) + \beta_1\psi_1(x) + \ldots + \beta_{k-1}\psi_{k-1}(x),$$

calculadas sobre la base de los resultados de observaciones de (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, no están correlacionadas. Determinar las varianzas de estas estimaciones.

7.57. Mostrar que el sistema de funciones $\psi_0(x) \equiv 1$, $\psi_1(x) = x - \bar{x}$ es ortogonal sobre el conjunto de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

7.58*. El sistema de funciones 1, $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos 2x$, $\operatorname{sen} 2x$, . . ., $\cos mx$, $\operatorname{sen} mx$ es ortogonal sobre el conjunto de los valores $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $n \geqslant 2m + 1$. Calcular las estimaciones MCM para los parámetros del modelo

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \operatorname{sen} x + \ldots + \alpha_m \cos mx + \beta_m \operatorname{sen} mx,$$

basándose en los resultados de observaciones (x_k, y_k) y hallar las varianzas de estas estimaciones.

Utilizando los resultados del problema 7.58, hay que hallar las estimaciones de los parámetros del modelo de orden indicado m y calcular las varianzas de estas estimaciones basándose en las muestras dadas en los problemas 7.59 y 7.60.

7.59.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
y	4,01	3,95	3,45	2,87	3,23	3,83	4,12

x	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
y	2,87	1,76	1,15	1,51	4,11	4,17	$m=1$.

7.60.

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
y	0,97	−0,65	−0,35	2,06	3,80	2,80	−0,98

x	210°	240°	270°	300°	330°	360°	
y	−4,39	−4,71	−2,16	2,32	1,05	0,81	$m=1$.

4. Verificación de la concordancia del modelo con los resultados de observaciones. Sean $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1}$ las estimaciones de los parámetros del modelo, calculadas sobre la base de los resultados de observaciones (x_i, y_i) $i = 1, 2, \ldots, n$. La concordancia del modelo con los resultados de observaciones se verifica basándose en la estimación de la varianza de los errores de observaciones s_ε^2 que se determina con ayuda de la fórmula (13). Si la varianza de los errores de observaciones τ_ε^2 es conocida, por ejemplo según los resultados de las investigaciones precedentes, la concordancia se considera satisfactoria si se cumple la condición

$$\frac{s_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2} < F_{1-\alpha}(n-k,\ \infty). \tag{30}$$

En el caso en que la varianza de los errores de observaciones se desconoce, pero los resultados de observaciones contienen varias observaciones repetidas de la variable Y para todos los valores de la variable x o para algunos de ellos, la concordancia puede verificarse del modo siguiente.

Supongamos que las observaciones repetidas han sido obtenidas a diferentes valores $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la variable x, con la particularidad de que para $x = x_i$ han sido realizadas n_i observaciones de Y, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, donde n es el volumen de toda la muestra de observaciones. Designemos con y_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n_i$, los resultados de observaciones repetidas de Y para $x = x_i$. La estimación de la varianza de los errores de observaciones, que es calculada sobre la base de los resultados de observaciones repetidas s_p^2 y no depende de la estimación (13), se define por la fórmula

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)}, \tag{31}$$

donde

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Si

$$\begin{aligned} &\frac{s_p^2}{s_\varepsilon^2} < F_{1-\alpha}\left(\sum_{i=1}^{m} (n_i - 1),\ n-k\right) \text{ para } s_p^2 > s_\varepsilon^2, \text{ o bien} \\ &\frac{s_\varepsilon^2}{s_p^2} < F_{1-\alpha}\left(n-k,\ \sum_{i=1}^{m} (n_i - 1)\right) \text{ para } s_\varepsilon^2 > s_p^2, \end{aligned} \tag{32}$$

entonces la concordancia del modelo con resultados de observaciones debe ser considerada satisfactoria. En este caso en calidad de la estimación de la varianza σ_ε^2 se puede utilizar cualquiera de las estimaciones (13) ó (31); una estimación más fiable será obtenida al unirlas (véase (13) del § 1, p. 3). La utilización de las relaciones (30) ó (32) supone que los errores de los resultados de observaciones están distribuidos según la ley normal, con varianza σ_ε^2, y son independientes. Si el modelo no concuerda con los resultados de observaciones, éste debe ser revisado.

EJEMPLO 5. Utilizando la muestra siguiente:

x	1	1	1,3	2	2	3	3	2,7
y	0,5	0,1	0,7	0,5	1,2	1,2	1,7	0,9

x	2,7	4,3	4,3	4,3	4,7	5,0	5,0
y	2,2	1,1	1,7	2,5	2,4	2,0	2,2

han sido obtenidas las estimaciones de los coeficientes de regresión lineal de Y en x: $y = 0{,}107 + 0{,}419x$, con la particularidad de que la varianza de los errores de observaciones resulta igual a $s_\varepsilon^2 = 0{,}236$. Comprobar la concordancia del modelo con los resultados de observaciones, suponiendo que los errores de observaciones tienen la distribución normal, con varianza σ_ε^2, y son independientes. Tomar el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

◀ Escribamos los resultados de observaciones repetidas:

x_i	1	2	3	2,7	4,3	5,0
y_{ij}	0,5; 0,1	0,5; 1,2	1,2; 1,7	0,9; 2,2	1,1; 1,7; 1,5	2,0; 2,2
n_i	2	2	2	2	3	2

Calculando s_p^2, para las observaciones repetidas dos a dos es cómodo hacer uso de la relación

$$\sum_{j=1}^{2} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{2}(y_{i1} - y_{i2})^2.$$

Utilizando esta relación, así como el hecho de para que $x = 4{,}3$ tenemos $\sum_{j=1}^{3} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2 \approx 0{,}99$, con ayuda de la fórmula (31) obtenemos

$$s_p^2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0{,}4^2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}7^2 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2 + \frac{1}{2}\cdot 1{,}3^2 + 0{,}99 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2}{1+1+1+1+2+1} \approx$$

$$\approx 0{,}329,$$

por lo tanto,

$$\frac{s_p^2}{s_\varepsilon^2} = \frac{0{,}329}{0{,}236} \approx 1{,}394.$$

Puesto que $F_{0,95}(7, 13) = 2,83$ (tabla S7), conviene considerar que el modelo concuerda con los resultados de observaciones. La estimación precisada de la varianza de los errores de observaciones por la fórmula (13) del § 1 es igual a

$$\frac{(15-2)\cdot 0,236+7\cdot 0,329}{(15-2)+7} \approx 0,268. \blacktriangleright$$

Supongamos que para representar cierta muestra de los datos de volumen n se propone escoger uno de los modelos

$$y = f_1(x;\ \beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{k-1})$$

o bien

$$y = f_2(x;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{l-1}).$$

Para hacer esto, es necesario hallar las estimaciones de los parámetros de ambos modelos y las sumas residuales de los cuadrados $Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1})$ y $Q_e(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{l-1})$.

Si $\dfrac{Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1})}{n-k} < \dfrac{Q_e(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{l-1})}{n-l}$,

con la particularidad de que $\dfrac{Q_e(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{l-1})/n-l}{Q_e(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \ldots, \tilde{\beta}_{k-1})/n-k} >$

$> F_{1-\alpha}(n-l,\ n-k)$, donde α es el nivel de significación dado entonces conviene preferir el primer modelo.

En los problemas 7.61—7.63 se supone que la dependencia entre las variables Y y x se describe con bastante exactitud por el polinomio de segundo orden. Las estimaciones de los parámetros de este modelo han sido halladas valiéndose del método de cuadrados mínimos. Utilizando estos resultados, es necesario cumplir las tareas siguientes:

a) verificar la concordancia del modelo con los resultados de observaciones;

b) comprobar, si se puede utilizar para la representación de los datos la ecuación de regresión lineal.

Se supone que los errores de observaciones son independientes y tienen la distribución normal. El nivel de significación α se da.

7.61.

x	0	0	0	1	2	2	3	3	4	4
y	22,8	21,9	22,1	24,5	26,0	26,1	26,8	27,3	28,2	28,5
x	5	6	6	6	7	8	8	9	10	
y	28,9	30,0	30,3	29,8	30,4	31,4	31,5	31,8	33,1	

Modelo: $y = 22{,}56 + 1{,}67x - 0{,}068x^2$, $\alpha = 0{,}05$, $Q_e = 2{,}49$.

7.62. La muestra se da en la forma de una tabla de frecuencias:

y \ x	1	2	3	4	5	6
1	2	1	—	—	—	—
2	1	2	—	—	—	—
3	—	3	1	—	—	—
4	—	1	3	1	—	—
5	—	—	2	2	2	1
6	—	—	—	1	1	1

Modelo: $y = -0{,}89 + 2{,}21x - 0{,}19x^2$, $\alpha = 0{,}10$, $Q_e = 13{,}28$.

7.63.

x	1,0	5,5	3,0	1,0	2,5	5,5	4,0	3,0	5,5	2,0
y	0,2	2,3	0,6	0,3	0,4	2,2	1,1	0,5	2,4	0,3
x	2,5	4,5	5,0	1,5	3,5	6,0	6,5	4,0	3,5	2,0
y	0,5	1,2	1,7	0,3	0,8	2,7	3,3	1,0	0,7	0,4

Modelo: $y = -0{,}834 + 0{,}576x - 0{,}006x^2$, $\alpha = 0{,}01$, $Q_e = 1{,}963$.

7.64. Sean $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2$ las estimaciones de la varianza que se determinan sobre la base de los resultados de observaciones repetidas y_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n_i$. Mostrar que la estimación de varianza de los errores de observaciones s_p^2, calculada por la fórmula (31), es la estimación asociada de la varianza según m muestras obtenidas a partir de una sola población madre.

5. Algunos problemas no lineales que se reducen a los modelos lineales. En muchos problemas importantes en la práctica, la dependencia entre las variables Y y x no es lineal en cuanto a los parámetros. Sin embargo, a menudo se puede hallar una transformación de las variables que conduzca a un modelo lineal. Por lo general, el cálculo de las estimaciones de los parámetros para el modelo lineal se simplifica considerablemente. No obstante, conviene tener en cuenta

que al calcular las estimaciones de los parámetros por el método de cuadrados mínimos en este caso no se minimiza la suma de los cuadrados de desviaciones de los datos iniciales sino de los transformados. Es evidente que las propiedades de las estimaciones obtenidas y la posibilidad de realizar su análisis estadístico ulterior dependen del hecho de que si se satisfacen o no las condiciones, formuladas al inicio de este párrafo, para las variables transformadas.

EJEMPLO 6. La dependencia entre las variables z y x tiene la forma $z = \dfrac{1}{\beta_0 + \beta_1 x}$. Transformar este modelo de modo que sea lineal en parámetros.

◀ Escribamos la dependencia entre z y x en la forma tal:

$$\frac{1}{z} = \beta_0 + \beta_1 x.$$

Designemos $\dfrac{1}{z} = y$, entonces obtenemos $y = \beta_0 + \beta_1 x$. El modelo obtenido es lineal en cuanto a los parámetros β_0 y β_1. ▶

En los problemas 7.65—7.70 es necesario transformar cada modelo no lineal de modo que sea lineal en cuanto a los parámetros.

7.65. $y = e^{-\beta_1 x + \beta_0}$. **7.66.** $\dfrac{1}{y} = \beta_0 + \dfrac{1}{\beta_1 x}$.

7.67. $y = \beta_0 \ln x + \beta_1$. **7.68.** $y = \operatorname{sen} \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} x$.

7.69. $y = \beta_0 x^{\beta_1}$. **7.70.** $y = \dfrac{x}{\beta_0 + \beta_1 x}$.

Para hallar las estimaciones de los parámetros en los problemas 7.71—7.75, es necesario utilizar el método de cuadrados mínimos, habiendo cumplido previamente la transformación del modelo no lineal de modo que sea lineal según los parámetros.

7.71. La presión barométrica está ligada con la altura por la relación siguiente:

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{k}{T} z},$$

donde p es la presión barométrica a la altura z; T, la temperatura; p_0 y k son los parámetros. Hallar las estimaciones de los parámetros k/T y p_0 basándose en los resultados de 6 observaciones realizadas a una temperatura aproximadamente constante:

z, mm	1000	1100	1200	1400	1500	1600
p, mm Hg	640	595	504	363	310	267

7.72. Para investigar la presión p de un vapor saturado (N/cm^2) en función del volumen específico v (m^3/kg) ha sido confeccionada la tabla de los datos experimentales:

v	3,334	1,630	0,866	0,423	0,265	0,170	0,115
p	0,482	1,034	2,027	4,247	7,164	11,480	17,60

Suponiendo que la dependencia funcional entre estas variables tiene la forma

$$p = \beta v^{\alpha},$$

hallar las estimaciones de los parámetros α y β.

7.73. La dependencia entre la resistividad del cuarzo cristalino ρ (en $\Omega \cdot cm$) y la temperatura absoluta T (en grados Kelvin) tiene la forma

$$\rho = 10^{a\frac{1}{T}+b}.$$

Utilizando los datos experimentales,

ρ	$5 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{15}$	$3 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{12}$	$1{,}5 \cdot 10^{11}$	10^{10}
T	335	365	400	445	500	570	670

hallar las estimaciones de los parámetros a y b.

7.74. La investigación de la duración t de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en función del orden del sistema n ha dado los resultados siguientes:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t, min	12	35	75	130	210	315	445	600	800

Suponiendo que $t = An^{\gamma}$, hallar las estimaciones de los parámetros A y γ.

7.75. Ha sido obtenida la muestra de observaciones de las variables x e Y:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	62,1	87,2	109,3	127,3	134,7	136,2	136,9

Para representar estos datos se propone utilizar el modelo

$$y = \frac{x}{\beta_0 + \beta_1 x}.$$

Hallar las estimaciones de los parámetros β_0 y β_1.

6. Regresión lineal múltiple (caso de dos variables independientes). Supongamos que la dependencia entre las variables tiene la forma

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \tag{33}$$

donde las variables x_1 y x_2 toman los valores fijos dados con la particularidad de que entre las variables x_1 y x_2 no existe una dependencia lineal. Los resultados de observaciones (x_{1i}, x_{2i}, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, se representan en forma de

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i.$$

Las estimaciones de los parámetros del modelo (33) pueden ser encontradas con ayuda de la fórmula (6), sin embargo, es más cómodo hallar las estimaciones para el modelo

$$y - \bar{y} = \beta_1 (x_1 - \bar{x}_1) + \beta_2 (x_2 - \bar{x}_2). \tag{34}$$

En este caso la sucesión de los cálculos es la siguiente. Primeramente para cada variable se hallan las sumas de los valores observados, las de los cuadrados, así como las de los productos de dos en dos. Luego se calculan Q_y, Q_{x_1}, Q_{x_2}, $Q_{x_1 y}$, $Q_{x_2 y}$, $Q_{x_1 x_2}$, utilizando las fórmulas

$$Q_y = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}, \quad Q_{x_j} = \sum x_{ji}^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n},$$

$$Q_{x_j y} = \sum x_{ji} y_i - \frac{(\sum x_{ji})(\sum y_i)}{n},$$

$$Q_{x_1 x_2} = \sum x_{1i} x_{2i} - \frac{(\sum x_{1i})(\sum x_{2i})}{n}, \quad j = 1, 2.$$

A continuación se calculan las matrices

$$A^\top A = \begin{pmatrix} Q_{x_1} & Q_{x_1 x_2} \\ Q_{x_1 x_2} & Q_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$(A^\top A)^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{x_2} & -Q_{x_1 x_2} \\ -Q_{x_1 x_2} & Q_{x_1} \end{pmatrix} \frac{1}{|A^\top A|}, \quad A^\top Y = \begin{pmatrix} Q_{x_1 y} \\ Q_{x_2 y} \end{pmatrix}.$$

Para evitar que se pierda la exactitud al utilizar los elementos de la matriz $(A^\top A)^{-1}$, los elementos de esta matriz deben dividirse por el determinante $|A^\top A|$ en el último turno. El vector de las estimaciones es definido por la fórmula (6):

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top Y = \begin{pmatrix} Q_{x_2} & -Q_{x_1 x_2} \\ -Q_{x_1 x_2} & Q_{x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{x_1 y} \\ Q_{x_2 y} \end{pmatrix} \frac{1}{|A^\top A|}.$$

La estimación del parámetro β_0 se determina con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}_1 - \tilde{\beta}_2 \bar{x}_2. \tag{35}$$

La suma residual de los cuadrados Q_e se calcula por la fórmula (18)

$$Q_e = Q_y - \tilde{\beta}^T A^T Y.$$

Supongamos que los errores de observaciones ε_i son independientes, tienen varianzas iguales y están distribuidos normalmente. En este caso se puede verificar la hipótesis H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Esta hipótesis permite determinar si se encuentran o no las variables x_1 y x_2 en la relación recíproca con Y. En calidad de estadística del criterio para la verificación de la hipótesis H_0 sirve la relación

$$F = \frac{\tilde{\beta}^T A^T Y/2}{Q_e/(n-3)}. \tag{36}$$

Si el valor muestral de esta estadística $F_m > F_{1-\alpha}(2, n-3)$, entonces la hipótesis H_0 se rechaza; en el caso contrario conviene considerar que la relación recíproca de Y con las variables x_1 y x_2 no existe.

Las cotas de los intervalos confidenciales para los parámetros β_1 y β_2 se determinan con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\beta}_j \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-3)\, s_\varepsilon \sqrt{a_{jj}},\ j=1, 2, \tag{37}$$

donde a_{jj} es el elemento diagonal de la matriz $(A^T A)^{-1}$ y $s_\varepsilon = \sqrt{\frac{Q_e}{n-3}}$.

Al utilizar el modelo (33) para la representación de los datos es necesario resolver la cuestión acerca de que es racional o no racional incluir la variable x_1 o x_2 en el modelo. Para esto se verifican las hipótesis $H_0^{(j)}$: $\beta_j = 0$, $j = 1, 2$. Es evidente que estas hipótesis pueden ser comprobadas directamente con ayuda de los intervalos confidenciales para los parámetros β_1 y β_2: si el intervalo confidencial para β_j, $j = 1, 2$, cubre el cero, la hipótesis $H_0^{(j)}$: $\beta_j = 0$ se acepta. En el caso contrario la hipótesis $H_0^{(j)}$ se rechaza.

El coeficiente de correlación múltiple, que caracteriza la desviación de los resultados de observaciones respecto al plano de regresión $y = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 x_1 + \tilde{\beta}_2 x_2$, es definido por la fórmula

$$R = \sqrt{\frac{\tilde{\beta} A^T A^T Y}{Q_y}}. \tag{38}$$

EJEMPLO 7. La temperatura del objeto Y depende del tanto por ciento de la componente A en el agente transmisor de calor y de la temperatura ambiente x_2. A continuación se señalan los resultados de 11 mediciones de estos datos.

y, °C	6	8	1	0	5	3	2	—4	10	—3	5
x_1, %	1	4	9	11	3	8	5	10	2	7	6
x_2, °C	8	2	—8	—10	6	—6	0	—12	4	—2	—4

Utilizando esta muestra, cumplir las tareas siguientes:

a) hallar las estimaciones y los intervalos confidenciales de los parámetros del modelo: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$;

b) verificar la relación recíproca de Y con las variables x_1 y x_2;

c) verificar las hipótesis H_0: $\beta_j = 0$, $j = 1, 2$;

d) calcular el coeficiente de correlación múltiple. Se supone que los errores de observaciones no están correlacionados, tienen las varianzas iguales y están distribuidos por la ley normal. Tomar el nivel de significación $\alpha = 0{,}10$.

◀ a) Previamente calculemos

$$\sum x_{1i} = 66,\ \sum x_{2i} = -22,\ \sum y_i = 33,\ \sum x_{1i}^2 = 506,$$

$$\sum x_{2i}^2 = 484,\ \sum y_i^2 = 289,\ \sum x_{2i}x_{1i} = -346,$$

$$\sum y_i x_{1i} = 85,\ \sum y_i x_{2i} = 142,\ \bar{y} = 3,\ \bar{x}_1 = 6,\ \bar{x}_1 = -2.$$

Luego encontramos

$$Q_{x_1} = 506 - \frac{66^2}{11} = 110,\ Q_{x_2} = 484 - \frac{(-22)^2}{11} = 440.$$

$$Q_y = 289 - \frac{33^2}{11} = 190,\ Q_{x_1x_2} = -346 - \frac{66\cdot(-22)}{11} = -214,$$

$$Q_{x_1y} = 85 - \frac{33\cdot 66}{11} = -113,\ Q_{x_2y} = 142 - \frac{33\cdot(-22)}{11} = 208.$$

La matriz $A^\top A = \begin{pmatrix} 110 & -214 \\ -214 & 440 \end{pmatrix}$, $|A^\top A| = 2604$. Hallemos la matriz $(A^\top A)^{-1}$; tenemos

$$(A^\top A)^{-1} = \frac{1}{2604}\begin{pmatrix} 440 & 214 \\ 214 & 110 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}169 & 0{,}082 \\ 0{,}082 & 0{,}042 \end{pmatrix}.$$

Puesto que $A^\top Y = \begin{pmatrix} -113 \\ 208 \end{pmatrix}$, entonces el vector de las estimaciones según la fórmula (6) es igual a

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_1 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}169 & 0{,}082 \\ 0{,}082 & 0{,}042 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -113 \\ 208 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2{,}041 \\ -0{,}530 \end{pmatrix}.$$

Determinemos la estimación del parámetro β_0. Por la fórmula (35) tenemos

$$\tilde{\beta}_0 = 3 - (-2{,}041)\cdot 6 - (-0{,}530)\cdot(-2) = 14{,}186.$$

Ahora bien, el plano de regresión tiene la ecuación

$$y = 14{,}186 - 2{,}041x_1 - 0{,}53x_2.$$

Determinemos los intervalos confidenciales para los parámetros β_1 y β_2. Para esto encontramos la suma residual de los cuadrados por

medio de la fórmula (18):

$$Q_e(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2) = 190 - (-2{,}041 - 0{,}530) \cdot \begin{pmatrix} -113 \\ 208 \end{pmatrix} = 69{,}607.$$

Luego calculamos la estimación de la varianza de los errores de observaciones s_ε^2:

$$s_\varepsilon^2 = \frac{Q_e}{n-3} = \frac{69{,}607}{11-3} \approx 8{,}7, \quad s_\varepsilon \approx 2{,}95.$$

Con ayuda de la tabla S6 hallamos $t_{0,95}(8) = 1{,}860$. Determinamos los intervalos confidenciales, haciendo uso de la fórmula (37). Para el parámetro β_1 tenemos

$$-2{,}041 \pm 1{,}86 \cdot 2{,}95 \cdot \sqrt{0{,}169} \approx -2{,}041 \pm 0{,}927,$$

por consiguiente, el parámetro β_1 se cubre por el intervalo (−2,968; −1,114). Para el parámetro β_2 tenemos

$$-0{,}53 \pm 1{,}86 \cdot 2{,}95 \sqrt{0{,}042} \approx -0{,}53 \pm 1{,}124.$$

Por consiguiente, el parámetro β_2 se cubre por el intervalo (−1,654; 0,594).

b) Para verificar la hipótesis H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$ calculemos el valor muestral de la estadística F. Puesto que $\widetilde{\beta}^\top A^\top Y = (-2{,}041 \; -0{,}53) \cdot \begin{pmatrix} 113 \\ 208 \end{pmatrix} = 120{,}393$, con ayuda de la fórmula (36) tenemos

$$F_m = \frac{120{,}393/2}{69{,}607/(11-3)} \approx 6{,}918;$$

ya que este valor es mayor que $F_{0,90}(2,8) = 3{,}113$ (tabla S7), la hipótesis H_0 se rechaza.

c) Verifiquemos la significación de las variables x_1 y x_2. El intervalo confidencial para el parámetro β_1 no cubre el cero, por lo tanto, la variable x_1 es significativa. El intervalo confidencial para el parámetro β_2 cubre el cero, por lo tanto, la variable x_2 puede ser excluida del examen.

d) El coeficiente de correlación múltiple se calcula por la fórmula (38):

$$R = \sqrt{\frac{120{,}383}{190}} \approx 0{,}796. \blacktriangleright$$

Para los datos citados a continuación (problemas 7.76—7.79) es necesario cumplir las tareas siguientes:

a) hallar las ecuaciones de los planos de regresión y los intervalos confidenciales para los parámetros β_1 y β_2;

b) verificar la hipótesis H_0: $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

c) verificar las hipótesis $H_0^{(j)}$: $\beta_j = 0$, $j = 1,2$;

d) calcular el coeficiente de correlación múltiple. Se supone que los errores de observaciones no están correlaciona-

dos, tienen las varianzas iguales y están distribuidos según la ley normal. El nivel de significación α se da.

7.76.

x_1	1	−1	2	1	−1	−4	7	0	8	3	6	−2
x_2	−1	1	−2	−6	−8	5	3	−3	0	−10	2	7
y	2	0	1	−4	−8	4	11	−2	9	8	10	5

$\sum x_{1i} = 20$, $\sum x_{2i} = -12$, $\sum y_i = 36$, $\sum x_{1i}^2 = 186$, $\sum x_{2i}^2 = 302$, $\sum y_i^2 = 496$, $\sum x_{1i}x_{2i} = -35$, $\sum x_{1i}y_i = 215$, $\sum x_{2i}y_i = 118$; $\alpha = 0{,}10$.

7.77.

x_1	1	4	0	5	−3	3	−5	−1	2	−2
x_2	4	−6	2	−4	12	−2	14	6	0	8
y	−4	−5	4	−1	4	0	5	1	2	7

$\sum x_{1i} = 4$, $\sum x_{2i} = 34$, $\sum y_i = 13$, $\sum x_{1i}^2 = 94$, $\sum x_{2i}^2 = 516$, $\sum y_i^2 = 153$, $\sum x_{1i}x_{2i} = -174$, $\sum x_{1i}y_i = -77$, $\sum x_{2i}y_i = 206$; $\alpha = 0{,}10$.

7.78.

x_1	31	34	35	41	38	32	29	34
x_2	29,5	14,2	18,0	21,3	47,5	10,0	21,0	36,5
y	22,0	14,0	23,0	43,0	66,0	1,6	12,0	36,0

$\sum x_{1i} = 274$, $\sum x_{2i} = 198$, $\sum y_i = 223{,}6$, $\sum x_{1i}^2 = 9488$, $\sum x_{2i}^2 = 5979{,}08$, $\sum y_i^2 = 8911{,}76$, $\sum x_{1i}x_{2i} = 6875{,}6$, $\sum x_{1i}y_i = 8049{,}2$, $\sum x_{2i}y_i = 6954{,}7$; $\alpha = 0{,}05$.

7.79.

x_1	0	44	4	61	35	64	13	56	18	2
x_2	14	0	29	34	54	16	44	59	49	32
y	0,5	47,2	8	63,8	18,2	47,5	0	60,9	19,2	9

$\sum x_{1i} = 297$, $\sum x_{2i} = 331$, $\sum y_i = 274{,}3$, $\sum x_{1i}^2 = 14627$,
$\sum x_{2i}^2 = 14207$, $\sum y_i^2 = 13108{,}47$, $\sum x_{1i}x_{2i} = 9926$,
$\sum x_{1i}y_i = 13451{,}6$, $\sum x_{2i}y_i = 8972{,}9$; $\alpha = 0{,}05$.

7.80. Plantear el sistema de ecuaciones normales para determinar las estimaciones de los parámetros del plano de regresión (33), basándose en los resultados de observaciones (x_{1i}, x_{2i}, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.

7. Cálculo y análisis estadístico de estimaciones de los parámetros de un modelo lineal en caso de observaciones correlacionadas y de precisión desigual. En algunos casos los errores de observaciones ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, de una variable aleatoria Y dependida *tienen diferentes varianzas y están correlacionados.* Esto tiene lugar cuando las mediciones se efectúan con ayuda de los aparatos de diferente precisión o bien cuando los errores de medición dependen de los valores de una variable independiente x, etc. En estos casos el cálculo y el análisis estadístico de las estimaciones MCM de los parámetros se lleva a cabo del modo siguiente.

Supongamos que los errores de observaciones ε_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tienen esperanzas matemáticas nulas y una matriz de covarianza $\sigma^2 W$, donde W es la conocida matriz definida positiva y sistemática [1]). El sistema de ecuaciones normales (5) para determinar las estimaciones de los parámetros del modelo (4) se escribe así:

$$A^\top W^{-1} A\beta = A^\top W^{-1} Y.$$

El vector de las estimaciones de los parámetros se calcula con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\beta} = (A^\top W^{-1} A)^{-1} A^\top W^{-1} Y.$$

La suma residual de los cuadrados se halla valiéndose de la relación

$$Q_e = Y^\top W^{-1} Y - \tilde{\beta}^\top A^\perp W^{-1} Y. \qquad (39)$$

La matriz de covarianza de las estimaciones se calcula haciendo uso de la fórmula

$$K = \sigma^2 (A^\top W^{-1} A)^{-1}. \qquad (40)$$

---

[1]) Una matriz simétrica es definida positivamente si y sólo si todos sus menores principales son positivos (criterio de Sylvester).

Por lo general, la magnitud σ^2 es desconocida. La estimación de esta magnitud, según los resultados de observaciones, se determina con ayuda de la fórmula

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{Q_\varepsilon}{n-k}, \tag{41}$$

donde k es el número de los parámetros que se estiman.

En el caso en que los errores de observaciones ε_i *no están correlacionados*, la matriz W tiene la forma diagonal:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{w_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix},$$

donde w_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son los «*pesos*» dados *de las varianzas de los errores de observaciones*. En este caso la matriz inversa W^{-1} tiene la forma

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n \end{pmatrix}$$

y, en particular, para el modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ obtenemos el sistema de ecuaciones normales que tienen la forma (véase (7))

$$\begin{cases} \beta_0 \sum w_i + \beta_1 \sum w_i x_i + \beta_2 \sum w_i x_i^2 = \sum w_i y_i, \\ \beta_0 \sum w_i x_i + \beta_1 \sum w_i x_i^2 + \beta_2 \sum w_i x_i^3 = \sum w_i x_i y_i, \\ \beta_0 \sum w_i x_i^2 + \beta_1 \sum w_i x_i^3 + \beta_2 \sum w_i x_i^4 = \sum w_i x_i^2 y_i. \end{cases} \tag{42}$$

El análisis estadístico de las estimaciones de los parámetros se lleva a cabo del modo análogo al hecho por nosotros en el p. 2 de este párrafo.

EJEMPLO 8. Supongamos que, quedando válidos los datos del ejemplo 2, los pesos de las varianzas de los errores de observaciones estén distribuidos del modo siguiente: $w_1 = 2$; $w_2 = 1{,}5$; $w_3 = w_4 = w_5 = 1$; $w_6 = 1{,}5$; $w_7 = 2$, o sea, los errores de observaciones no estén correlacionados, pero sus varianzas dependen del módulo de una variable independiente x. A condición de que los errores de observaciones ε_i tengan la distribución normal $N\left(0, \frac{\sigma}{\sqrt{w_i}}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, es necesario hallar las estimaciones de los parámetros del modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$, la estimación de la matriz de covarianza de los errores de observaciones, así como los intervalos confidenciales para los parámetros. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

◀ Utilizando los datos y los resultados de la resolución del ejemplo 2, calculemos los coeficientes del sistema (42):

$$\sum w_i x_i = 0, \quad \sum w_i x_i^2 = 50, \quad \sum w_i x_i^3 = 0,$$

$$\sum w_i x_i^4 = 374, \quad \sum w_i y_i = -8, \quad \sum w_i x_i y_i = 54,$$

$$\sum w_i x_i^2 y_i = -196, \quad \sum w_i = 10.$$

El sistema de ecuaciones normales (42) tiene la forma

$$\begin{cases} 10\beta_0 + \quad + 50\beta_2 = -8. \\ \quad 50\beta_1 \quad\quad = 54, \\ 50\beta_0 + \quad + 374\beta_2 = -196. \end{cases} \tag{43}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\tilde{\beta}_0 = 5{,}49, \ \tilde{\beta}_1 = 1{,}08, \ \tilde{\beta} = -1{,}258.$$

Hallemos las suma residual de los cuadrados. Calculemos previamente

$$Y^T W^{-1} Y = \sum w_i y_i^2 = 271.$$

Puesto que el segundo miembro del sistema normal (43) es igual a $\begin{pmatrix} -8 \\ 54 \\ -196 \end{pmatrix}$, entonces, por la fórmula (39), encontramos

$$Q_e = 271 - (5{,}49 \cdot 1{,}08 - 1{,}258) \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 54 \\ -196 \end{pmatrix} = 10{,}032.$$

La estimación de la matriz de covarianza, según las fórmulas (40) y (41), es igual a

$$K = \frac{10{,}032}{7-3} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 50 \\ 0 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 374 \end{pmatrix}^{-1} \approx 2{,}508 \begin{pmatrix} 0{,}303 & 0 & -0{,}040 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ -0{,}040 & 0 & 8{,}06 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0{,}756 & 0 & -0{,}101 \\ 0 & 0{,}05 & 0 \\ -0{,}101 & 0 & 0{,}02 \end{pmatrix}.$$

Determinemos los intervalos confidenciales para los parámetros del modelo. Puesto que $t_{0{,}975}(4) = 2{,}776$, entonces, según la fórmula (15), obtenemos las cotas de los intervalos confidenciales:

para β_0: $5{,}49 \pm 2{,}776 \cdot \sqrt{2{,}508} \cdot \sqrt{0{,}303}$;

para β_1: $1{,}08 \pm 2{,}776 \cdot \sqrt{2{,}508} \cdot \sqrt{0{,}02}$;

para β_2: $-1{,}258 \pm 2{,}776 \cdot \sqrt{2{,}508} \cdot \sqrt{8{,}06 \cdot 10^{-3}}$;

o bien

$$\beta_0 \in (3{,}08;\ 7{,}90),\ \beta_1 \in (0{,}45;\ 170),$$
$$\beta_2 \in (-1{,}65;\ -0{,}87), \blacktriangleright$$

7.81. Resolver el problema 7.16 si los errores de observaciones no están correlacionados y los pesos de las varianzas de los errores de observaciones están definidos del modo siguiente:

$$w_1 = w_7 = 2;\ w_2 = w_6 = 1{,}5;\ w_3 = w_4 = w_5 = 1.$$

Hallar la estimación de la varianza de los resultados de observaciones.

7.82. La masa de un cuerpo m se determina basándose en los resultados de n mediciones independientes $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$, con la particularidad de que el resultado de la primera medición tiene la varianza igual a σ^2/w_i, donde w_i son los valores dados, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hallar la estimación de la masa del cuerpo según estos resultados. Determinar la varianza de la estimación obtenida.

7.83. Supongamos que para estimar el parámetro β del modelo $y = \beta x$ se utiliza la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$. Supongamos también que la varianza de la variable aleatoria Y observada es proporcional a x. Hallar la estimación del parámetro β y la varianza de esta estimación.

7.84. Resolver el problema 7.83 si la varianza de Y es proporcional a x^2.

7.85. Utilizando los resultados obtenidos durante la resolución de los problemas 7.83 y 7.84, hallar la estimación del parámetro β del modelo $y = \beta x$ sobre la base de la muestra

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,5	0,9	0,4	2,2	0,6	1,1	0,8	2,4	1,2	4,3

si:

a) los resultados de observaciones tienen varianzas iguales;

b) la varianza de los resultados de observaciones es proporcional a x;

c) la varianza de los resultados de observaciones es proporcional a x^2.

Calcular las varianzas de la estimación del parámetro si el coeficiente de proporcionalidad en b) y c) es igual a la unidad.

§ 8. Métodos no paramétricos de la estadística matemática

1. Conceptos principales. Criterio de signos. En la elaboración práctica de los resultados de observaciones la distribución de una población madre es a menudo desconocida o (para las variables aleatorias continuas) se distingue de la distribución normal, así que la aplicación de los métodos expuestos en los §§ 3—5 de este capítulo llega a ser infundada y puede conducir a los errores. En estos casos se emplean los *métodos que no dependen (o son libres) de la distribución* de la población madre, que se llaman también métodos no paramétricos.

Los métodos no paramétricos no utilizan los propios valores numéricos de los elementos de la muestra, sino las *propiedades estructurales de ésta* (por ejemplo, las relaciones del orden entre sus elementos). En este caso se pierde una parte de la información contenida en la muestra y por eso, por ejemplo, la potencia de los criterios no paramétricos es menor que la de sus análogos del § 4. Sin embargo, los métodos no paramétricos pueden aplicarse si se trata de suposiciones más generales y son más simples desde el punto de vista de la realización de los cálculos.

Un gran grupo de criterios no paramétricos se utiliza para verificar la hipótesis de que dos muestras $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ e $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ pertenecen a una misma población madre, o sea, de que las funciones de distribución de dos poblaciones madre $F_X(x)$ y $F_Y(y)$ son iguales: $F_X(x) \equiv F_Y(y)|_{y=x}$. Tales poblaciones madre se denominan *homogéneas*. La condición necesaria de homogeneidad consiste en la igualdad de las características de la posición y (o) de la dispersión en las poblaciones madre en cuestión, o sea, tales como las medias, las medianas, las varianzas, etc. Los criterios no paramétricos, que se utilizan para estos fines, en calidad de suposición principal usan sólo la continuidad de la distribución de la población madre.

El criterio más simple de este género, o sea, el *criterio de signos* se aplica para verificar la hipótesis H_0 sobre la homogeneidad de las poblaciones madre, basándose en las muestras conexas de dos en dos. Tal problema surge, por ejemplo, al comparar dos aparatos de medida. En este caso se utilizan n objetos y sobre cada uno de ellos se realiza una medición con ayuda de ambos aparatos. Designemos x_i e y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, los resultados de medición del i-ésimo objeto, obtenidos, respectivamente, con ayuda de los primero y segundo aparatos. Si las muestras en comparación han sido obtenidas a partir de las poblaciones madre homogéneas, los valores x_i e y_i son mutuamente cambiables y, por consiguiente, las probabilidades de que aparezcan las diferencias positivas o negativas $x_i - y_i$ son iguales. Las probabilidades de producirse las diferencias nulas son iguales en virtud de la continuidad hipotética de distribución de la característica que se mide. Ahora bien, las probabilidades de que se produzcan las diferencias positivas y negativas son iguales a 1/2, o sea,

$$\mathbf{P}[x_i - y_i > 0] = \mathbf{P}[x_i - y_i < 0] = 1/2 \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

donde l es el número de diferencias no nulas, $l \leqslant n$. Las diferencias nulas pueden aparecer debido a los errores aleatorios o a los errores de redondeo y los pares de observaciones que les corresponden se excluyen del examen.

El número de signos «+» o «—» en la sucesión de los signos de diferencias de las muestras pares (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, es la estadística del criterio de signos. A continuación, para precisar, se toma el número de signos «+». A condición de que la hipótesis que se verifica H_0 sea cierta y los pares de observaciones (x_i, y_i) y, por lo tanto, los signos de diferencias $x_i - y_i$ sean *independientes*, el número de signos «+» tiene la *distribución binomial* cuyos parámetros son $p = 1/2$ y l, o sea, $B(l, 1/2)$. El problema se reduce a la verificación de la hipótesis H_0: $p = 1/2$, siendo una de las hipótesis alternativas $H_1^{(1)}$: $p > 1/2$, $H_1^{(2)}$: $p < 1/2$ y $H_1^{(3)}$: $p \neq 1/2$.

Sea r el número observado de signos «+» y α el nivel dado de significación. La hipótesis H_0 se rechaza si,

siendo $H_1^{(1)}$: $p > 1/2$, se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=r}^{l} C_l^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l \leqslant \alpha, \tag{1}$$

o, siendo $H_1^{(2)}$: $p < 1/2$, se cumple la desigualdad

$$\sum_{i=0}^{r} C_l^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l \leqslant \alpha, \tag{2}$$

o bien, siendo $H_1^{(3)}$: $p \neq 1/2$ se cumple una de las desigualdades

$$\sum_{i=r}^{l} C_l^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l \leqslant \frac{\alpha}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{r} C_l^i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^l \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Si para las hipótesis alternativas respectivas las desigualdades (1)—(3) no se cumplen, la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observaciones y se acepta para el nivel de significación α. Frecuentemente es más cómodo realizar la verificación de la hipótesis H_0, utilizando la estadística de Fisher. La hipótesis H_0 se rechaza si:

para $H_1^{(1)}$: $p > 1/2$ se cumple la desigualdad

$$F_m = \frac{r}{l-r+1} \geqslant F_{1-\alpha}(k_1, k_2), \tag{4}$$

donde $k_1 = 2(l - r + 1)$, $k_2 = 2r$,

o para $H_1^{(2)}$: $p < 1/2$ se cumple la desigualdad

$$F_m = \frac{l-r}{r+1} \geqslant F_{1-\alpha}(k_1, k_2), \tag{5}$$

donde $k_1 = 2(r + 1)$, $k_2 = 2(l - r)$,

o, por último, para $H_1^{(3)}$: $p \neq 1/2$ debe cumplirse una de las desigualdades (4) ó (5), sustituyendo α en $\alpha/2$.

EJEMPLO 1. Se supone que uno de dos aparatos que determina la velocidad del automóvil tiene un error sistemático. Para comprobar esta suposición ha sido determinada la velocidad de 10 automóviles, con la particularidad de que la velocidad de cada automóvil ha sido fijada simultáneamente por dos aparatos. Como resultado han sido obtenidos los resultados siguientes:

v_1, km/h	70	85	63	54	65	80	75	95	52	55
v_2, km/h	72	86	62	55	63	80	78	90	53	57

¿Permiten estos resultados afirmar que el segundo aparato ofrece efectivamente valores elevados de la velocidad? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Suponiendo que las velocidades de movimiento de los automóviles no dependen una de otra, el problema puede ser resuelto al aplicar el criterio de signos.

Compongamos la sucesión de signos de las diferencias $v_1 - v_2$: $-, -, +, -, +, 0, -, +, -, -$. El número de diferencias no nulas $l = 9$, el número de diferencias positivas $r = 3$. Verifiquemos la hipótesis de que la diferencia en las indicaciones de los aparatos se debe a los errores aleatorios, o sea, la hipótesis H_0: $p = 1/2$. La hipótesis alternativa supone que las indicaciones del segundo aparato tengan una desviación positiva; en este caso la probabilidad de que aparezcan diferencias positivas debe ser menor que 1/2. Ahora bien, la hipótesis alternativa se enuncia así: H_1: $p < 1/2$. Para verificar la hipótesis H_0 utilizamos la desigualdad (5). Tenemos

$$k_1 = 2\cdot(3+1) = 8, \quad k_2 = 2\cdot(9-3) = 12, \quad F_m = \frac{9-3}{3+1} = 1{,}5.$$

Puesto que según la tabla S7 $F_{0,90}(8, 12) = 2{,}24$, la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observaciones. Conviene considerar que diferencia en las indicaciones de los aparatos se debe a los errores aleatorios. ▶

8.1.** Formular el análogo paramétrico del criterio de signos (para el caso de una población madre normalmente distribuida).

8.2. ¿Se puede aplicar el criterio de signos en el caso en que los pares (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, son dependientes estadísticamente? Si no, ¿por qué?

Para resolver los problemas 8.3—8.8 es necesario utilizar el criterio de signos.

8.3. A continuación se da el tiempo (en segundos) de resolución de los problemas de control por once alumnos antes de cumplir los ejercicios especiales de cálculo oral y después de cumplirlos. ¿Se puede considerar que estos ejercicios han mejorado las capacidades de los alumnos de resolver los problemas? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

Antes de los ejercicios	87	61	98	90	93	74	83	72	81	75	83
Después de los mismos	50	45	79	90	88	65	52	79	84	61	52

8.4. Para diez personas ha sido propuesta una dieta especial. Después de alimentarse según esta dieta en el transcurso de dos semanas, la masa de sus cuerpos se ha cambiado del modo siguiente:

Masa antes de la dieta (kg)	68	80	92	81	70	79	78	66	57	76
Masa después de la dieta (kg)	60	84	87	79	74	71	72	67	57	60

a) ¿Se puede recomendar esta dieta para los hombres que desearían adelgazar?

b) En general ¿ejerce esta dieta alguna influencia considerable en la masa del cuerpo? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

8.5. Se ha comparado la acción de dos extractos de virus del mosaico del tabaco. Para esto cada mitad de una hoja ha sido frotada por el preparado respectivo. El número de lugares lesionados se da a continuación:

Extracto A	20	39	43	13	28	26	17	49	36
Extracto B	31	22	45	6	21	13	17	46	31

¿Se puede considerar que la acción de estos extractos es diferente? Tomar $\alpha = 0\ 01$.

8.6. Se estudiaba la influencia que ejercen el barbecho limpio y el de abril en la cosecha del centeno. El experimento duró seis años. Se tenía en cuenta la masa de 1000 granos en gramos. Los resultados del experimento son los siguientes:

Año de siembra	1	2	3	4	5	6
En el barbecho limpio	31,1	24,0	24,6	28,6	29,1	30,1
En el barbecho de abril	31,6	24,2	24,8	19,1	29,9	31,0

¿Se puede considerar que la cosecha del centeno en el barbecho de abril es considerablemente mayor que en el limpio? Verificar esta suposición si $\alpha = 0{,}05$.

8.7. Comprobar la suposición de que el preparado medicinal no cambia la composición de la sangre (en particular,

no cambia el número de leucocitos), si este preparado ha sido experimentado en diez personas y el análisis posterior de la sangre ha dado los resultados siguientes:

0,97; 1,05; 1,09; 0,88; 1,01; 1,14; 1,03; 1,07; 0,94; 1,02

(los números expresan la relación entre el número de leucocitos en el experimento y el número de leucocitos en la norma). Tomar $\alpha = 0{,}01$.

8.8. Al emplear una de las especies de tratamiento de las semillas antes de proceder a la siembra, el cambio del rendimiento es caracterizado por los datos siguientes (en quintales por hectárea):

Año	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Semillas no sometidas al tratamiento	20,0	17,9	20,6	22,0	21,4	23,8	21,4	19,8	18,4
Semillas sometidas al tratamiento	22,1	18,5	19,4	22,1	21,7	24,9	21,6	20,3	18,3

¿Se puede considerar que el tratamiento de las semillas antes de proceder a la siembra aumenta el rendimiento? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

2. Criterio de Wilkoxon, Mann y Whitney. El criterio se emplea para comparar dos muestras independientes de volumen n_1 y n_2 y verifica la hipótesis H_0 que afirma que las muestras han sido obtenidas a partir de poblaciones madre homogéneas y, en particular, tienen las medias y medianas iguales.

La estadística W del criterio se determina del modo siguiente. Dispongamos $n_1 + n_2$ valores de la muestra asociada en el orden de crecimiento, o sea, en la forma de una serie variacional. Asignemos a cada elemento de la serie su número en la misma, o sea, el *rango*. Si algunos elementos de la serie coinciden en magnitud, a cada uno de ellos se asigna el rango igual a la media aritmética de sus números. El último elemento dispuesto en la muestra asociada ordenada según el rango debe tener el rango $n_1 + n_2$. Este hecho puede ser utilizado al verificar la ordenación correcta según el rango.

Sea R_1 la suma de los rangos de la primera muestra y R_2, la suma de los rangos de la segunda muestra. Calculemos los valores de w_1 y w_2:

$$w_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1 (n_1+1)}{2} - R_1, \tag{6}$$

$$w_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2 (n_2+1)}{2} - R_2. \tag{7}$$

El modo correcto de realizar los cálculos se comprueba con ayuda de la fórmula:

$$w_1 + w_2 = n_1 n_2. \tag{8}$$

El valor muestral w_m de la estadística del criterio es el mínimo de los números w_1 y w_2. En la tabla S10 se muestran las probabilidades de que $W < w_m$ a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta, es decir, los valores

$$p = \mathbf{P}[W < w_m / H_0]$$

para las muestras de volumen n_1 y n_2 ($n_1 \geqslant n_2$). En caso de una hipótesis alternativa H_1 unilateral (bilateral) la hipótesis H_0 se rechaza si $p \leqslant \alpha$ ($p \leqslant \alpha/2$), donde α es el nivel dado de significación. En el caso contrario la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observaciones.

Si el volumen de cada una de las estadísticas es mayor que 8, la verificación de la hipótesis H_0 puede realizarse, utilizando la estadística

$$Z = \frac{W - \frac{1}{2} n_1 n_2}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}} \tag{9}$$

la cual tiene (a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta) la distribución aproximadamente normal $N(0, 1)$. En este caso la hipótesis H_0 se rechaza al nivel de significación α si el valor muestral z_m de la estadística Z satisface la desigualdad

$$z_m < u_\alpha \quad (z_m > u_{1-\alpha})$$

en caso de una hipótesis alternativa a la izquierda (a la derecha) H_1 y si

$$|z_m| > u_{1-\alpha/2}$$

en caso de una hipótesis alternativa bilateral H_1.

EJEMPLO 2. Ha sido medida la tensión disruptiva en los diodos escogidos al azar a partir de dos lotes. Los resultados de medición (en voltios) son los siguientes:

Primer lote	39	50	61	67	40	40	54	—
Segundo lote	60	53	42	41	40	54	63	69

¿Se puede considerar que en los diodos del segundo lote la tensión disruptiva es más alta que en los diodos del primer lote? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

◀ Hagamos uso del criterio de Wilkoxon. Compongamos la serie variacional, marcando cada elemento que pertenece al primer lote con una raya puesta encima. Como resultado obtenemos la siguiente sucesión ordenada según los rangos

Elemento	$\overline{39}$	$\overline{40}$	$\overline{40}$	40	41	42	$\overline{50}$	53	$\overline{54}$	54	60	$\overline{61}$	63	$\overline{67}$	69
Rango	1	3	3	3	5	6	7	8	9,5	9,5	11	12	13	14	15

La suma de los rangos de la primera muestra $R_1 = 49{,}5$ y la suma de los rangos de la segunda muestra $R_2 = 70{,}5$; $n_1 = 7$ y $n_2 = 8$. Con ayuda de las fórmulas (6) y (7) encontramos

$$w_1 = 7 \cdot 8 + \frac{7 \cdot (7+1)}{2} - 49{,}5 = 34{,}5$$

$$w_2 = 7 \cdot 8 + \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - 70{,}5 = 21{,}5.$$

Utilizando la relación (8), comprobamos el modo correcto de realizar los cálculos:

$$34{,}5 + 21{,}5 = 56.$$

El valor muestral de la estadística w_m es igual al menor número de 34,5 y 21,5, o sea,

$$w_m = 21{,}5.$$

Por la tabla S10 encontramos (con interpolación)

$$p = \mathbf{P}\,[W < 21{,}5] = 0{,}25.$$

Puesto que la suposición de que en los diodos del segundo lote la tensión disruptiva es más alta corresponde a la hipótesis alternativa unilateral H_1 y la probabilidad $p = 0{,}25$ supera el nivel de significación $\alpha = 0{,}1$, la hipotesis H_0 no contradice los resultados de mediciones. Por consiguiente, los resultados de mediciones no dan razón para considerar que la tensión disruptiva en los diodos del segundo lote es más alta que en los del primer lote.

EJEMPLO 3. Quedando válidos los datos del ejemplo 2, han sido obtenidos los resultados de una nueva serie de mediciones de la tensión disruptiva en los diodos (en voltios):

Primer lote	50	41	48	60	46	60	51	42	62	54	42	46
Segundo lote	38	40	47	51	63	50	63	57	59	51	—	—

¿Hay razones para afirmar que la tensión disruptiva en los diodos de ambos lotes es diferente?

Resolver el problema, utilizando:

a) el criterio de Wilkoxon;

b) la verificación de la hipótesis sobre la igualdad de las medias (suponiendo que ambas muestras han sido obtenidas a partir de poblaciones madre normalmente distribuidas). Tomar $\alpha = 0{,}1$.

◀ a) Al igual que en el ejemplo 2, ordenemos los resultados de mediciones y determinemos los rangos de cada resultado. Tenemos

Elemento	38	40	$\overline{41}$	$\overline{42}$	$\overline{42}$	$\overline{46}$	$\overline{46}$	47	$\overline{48}$	$\overline{50}$	50
Rango	1	2	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10,5	10,5

Elemento	$\overline{51}$	51	51	$\overline{54}$	57	59	$\overline{60}$	$\overline{60}$	$\overline{62}$	63	63
Rango	13	13	13	15	16	17	18,5	18,5	20	21,5	21,5

Determinemos las sumas de los rangos

$$R_1 = 129{,}5, \qquad R_2 = 123{,}5.$$

Puesto que $n_1 = 12$ y $n_2 = 10$, con ayuda de las fórmulas (6) y (7) encontramos

$$w_1 = 12 \cdot 10 + \frac{12 \cdot (12+1)}{2} - 129{,}5 = 68{,}5,$$

$$w_2 = 12 \cdot 10 + \frac{10 \cdot (10+1)}{2} - 123{,}5 = 51{,}5.$$

El valor muestral w_m de la estadística del criterio es tal:

$$w_m = 51{,}5.$$

Como $n_1 > 8$ y $n_2 > 8$, para verificar la hipótesis H_0 utilicemos la estadística Z. El valor muestral de esta estadística se determina con ayuda de la fórmula (9):

$$z_m = \frac{51{,}5 - \frac{1}{2} 12 \cdot 10}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 10\,(12+10+1)}} \approx -0{,}56.$$

La suposición en cuestión corresponde a la hipótesis alternativa bilateral, por lo tanto, el valor $|z_m|$ se compara con el cuantil $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ el cual se determina con ayuda de la tabla S1:

$$u_{0{,}95} = 1{,}645.$$

Ahora bien, la afirmación de que la tensión disruptiva en los diodos de ambos lotes es diferente debe ser rechazada.

b) Verifiquemos la hipótesis sobre la igualdad de las medias (el § 4, p. 2). Basándose en los resultados de observaciones, conviene calcular las estimaciones de las medias y de las varianzas para cada muestra:

$$\bar{x}_1 \approx 50{,}17, \; s_1^2 \approx 55{,}06, \; \bar{x}_2 = 51{,}90, \; s_2^2 \approx 76.32.$$

Previamente es necesario verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ frente a la hipótesis alternativa H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Para eso determinemos la relación de las varianzas muestrales y comparemos esta relación con el cuantil $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, \; n_1 - 1)$ (tabla S7):

$$\frac{s_2^2}{s_1^2} \approx 1{,}39, \; F_{0{,}95}(9, \; 11) = 2{,}90.$$

Puesto que $1{,}39 < 2{,}90$, la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas se acepta, por consiguiente, la verificación de la hipótesis sobre la igualdad de las medias puede ser realizada basándose en la estadística de Student (el § 4, tabla 4.2). El valor muestral de esta estadística

es igual a

$$t_m = \frac{\bar{x}_1 - x_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} =$$

$$= \frac{50{,}17-51{,}90}{\sqrt{\frac{(12-1)\cdot 55{,}06+(10-1)\cdot 76{,}32}{12+10-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}}} \approx -0{,}5.$$

Puesto que el valor del cuantil $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ según la tabla S6 es igual a $t_{0,95}(20) = 1{,}725$ y $|t_m| < 1{,}725$, la hipótesis sobre la igualdad de las medias se acepta. Así pues, la afirmación de que la tensión disruptiva en los diodos de ambos lotes es diferente debe ser rechazada. Esto coincide con el resultado obtenido en a). ▶

8.9. Los transistores de efecto de campo de dos partidas fabricadas con aplicación de diferentes tecnologías, han sido sometidos a la medición de la resistencia diferencial del canal R_i. Los resultados de mediciones (en microohmios) son los siguientes:

Tecnología *A*	0,01	0,02	0,12	0,30	0,29	0,15	0,21	—
Tecnología *B*	0,15	0,07	0,25	0,15	0,22	0,18	0,18	0,27

¿Influye la tecnología de fabricación en la magnitud de la resistencia diferencial del canal R_i? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.10. Quedando válidos los datos del problema 8.9, en los transistores de efecto de campo ha sido medida una característica más: la capacidad electrodo de cierre — electrodo de drenaje. ¿Se ha aumentado la capacidad electrodo de cierre — electrodo de drenaje en los transistores fabricados por la tecnología *B* si las mediciones han dado los resultados siguientes (en picofaradios)?

Tecnología *A*	2,8	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,7	—
Tecnología *B*	3,8	3,4	3,6	2,9	2,8	3,0	3,4	3,0

Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.11. En una investigación bioquímica, realizada por medio del método de átomos marcados, según los resultados de estudio de 8 preparados de una serie de prueba y de 5 preparados de una serie de control han sido obtenidas las siguientes indicaciones del contador de impulsos (en impulsos

por minuto):

Prueba	340	343	322	349	332	320	313	304
Control	318	321	318	301	312	—	—	—

¿Se puede considerar que los valores obtenidos de las series de prueba y de control son diferentes? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

8.12. Basándose en las muestras obtenidas a partir de dos lotes de los microcircuitos después de la operación de aleación de polisilicio, ha sido medida la resistividad. Los resultados de las mediciones son los siguientes:

Primer lote	52,2	33	76	32,5	49,5	32,5	191,5	112,5
Segundo lote	119	17,5	43,5	43,5	90,5	40	50	108

Primer lote	52,9	114,8	33,7	69,1	112,5	48,5	16,5
Segundo lote	62,4	16,5	97,5	96	46	—	—

¿Se puede afirmar que ambos lotes han sido obtenidos a partir de la misma población madre? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

8.13. Quedando válidos los datos del problema 8.12, después de la operación de tratamiento del boro, ha sido medida la profundidad de la capa de difusión y obtenidos los resultados siguientes (en μ)

Primer lote	9,8	9,8	8,6	8,6	9,2	9,2	9,8
Segundo lote	8,6	9,2	10,4	9	9,8	9,2	9,6

Primer lote	9	10	9,4	9	11,2	10,8	9,2	9,4
Segundo lote	10	9,8	9,0	9,8	8,7	8,6	—	—

¿Se puede considerar que la profundidad de la capa de difusión en los microcircuitos de ambos lotes es diferente? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

8.14. La longitud del cuerpo de larvas del elatéride, que habitan en las superficies sembradas de centeno de otoño y de mijo, varía (expresada en mm) del modo siguiente:

En la superficie sembrada de centeno	7	10	14	15	12	16	12
En la superficie sembrada de mijo	11	12	16	13	18	15	—

Basándose en estas pruebas, se crea la impresión de que las larvas del elatéride que habitan en el mijo son de dimensiones más grandes. Comprobar esta suposición, utilizando el criterio de Wilkoxon. Tomar $\alpha = 0{,}01$.

8.15. Ha sido estudiada la influencia que el cobalto ejerce en el aumento de la masa del cuerpo de los conejos. La prueba se realizaba en dos grupos de animales: uno de prueba y otro de control. La edad de los conejos variaba dentro de los límites de 1,5 a 2 meses. La masa inicial del cuerpo de los animales estaba entre 500 y 600. La prueba duró 8 semanas. Ambos grupos tenían la misma ración, pero, a distinción de los de control, los conejos de experimentación recibían cada día 0,06 g de cloruro cobaltoso, en forma de solución acuosa, para 1 kg de masa del cuerpo. Durante la prueba en los animales se observaban los siguientes aumentos de masa (por 1 semana):

De control	560	580	600	420	530	490	580	470
De prueba	692	700	621	640	561	680	630	—

¿Se puede afirmar que las adiciones del cloruro cobaltoso efectivamente dan un aumento de masa del cuerpo? Tomar $\alpha = 0{,}10$.

3. Criterio para verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las varianzas de dos poblaciones madre. Este criterio puede utilizarse en vez del criterio basado en la relación de las varianzas muestrales (el § 4, p. 2, tabla 4.1) a condición de que en las poblaciones madre en cuestión sean iguales o próximas las características de la posición, o sea, las medias o las medianas (véanse los puntos 1 y 2 de este párrafo). El criterio se aplica de la manera siguiente. La muestra asociada de volumen $n_1 + n_2$ se ordena del modo creciente y se señala a qué muestra pertenece cada elemento. Los rangos se asignan según la regla siguiente: el rango 1 se atribuye al valor mínimo, dos valores máximos obtienen los rangos 2 y 3, los rangos 4 y 5 se dan a los valores mínimos siguientes, etc. El esquema de disposición de los rangos se muestra a continuación:

$$1, 4, 5, 8, 9, \ldots, 7, 6, 3, 2.$$

A cada uno de los elementos que coinciden en magnitud se le concede el rango igual a la media aritmética (como en el criterio de Wilkoxon). Para $n_1 > 10$, $n_2 > 10$ la estadística Z del criterio se determina con ayuda de la fórmula

$$Z = \frac{\left(R_2 - \frac{n_2(n_1+n_2+1)}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{n_1(n_1+n_2+1)}{12}}}, \qquad (10)$$

donde R_2 es la suma de los rangos para la muestra de menor volumen n_2 ($n_2 \leqslant n_1$). A condición de que sea cierta la hipótesis H_0: las varianzas de las poblaciones madre en cuestión son iguales, la estadística Z tiene una distribución aproximadamente normal $N(0, 1)$. La hipótesis H_0 se rechaza si el válor muestral z_m de la estadística Z satisface la desigualdad

$$z_m < u_\alpha \qquad (z_m > u_{1-\alpha})$$

en caso de la hipótesis alternativa a la izquierda (a la derecha) H_1 y si

$$|z_m| > u_{1-\alpha/2}$$

en caso de la hipótesis alternativa bilateral H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. En el caso contrario la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observaciones al nivel de significación α.

Si el volumen de una de las muestras es menor que diez o igual a este número, el criterio anteriormente indicado puede utilizarse únicamente para cálculos aproximados.

EJEMPLO 4. Verificar la hipótesis sobre la igualdad de las varianzas, basándose en los datos del ejemplo 3.

◀ Durante la resolución del ejemplo 3 hemos determinado que las características de posición en las poblaciones madre en examen son iguales, por lo tanto, el criterio para verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las varianzas es aplicable. Hagamos uso de los resultados ordenados de mediciones, obtenidos al resolver el ejemplo 3, y dispongamos los rangos conforme a la regla citada anteriormente. Tenemos

Elemento	38	40	$\overline{41}$	$\overline{42}$	$\overline{42}$	$\overline{46}$	$\overline{46}$	47	$\overline{48}$	$\overline{50}$	50
Rango	1	4	5	8,5	8,5	12,5	12,5	16	17	20,5	20,5

Elemento	$\overline{51}$	51	51	$\overline{54}$	57	59	$\overline{60}$	$\overline{60}$	$\overline{62}$	63	63
Rango	19,7	19,7	19,7	15	14	11	8,5	8,5	6	2,5	2,5

Calculemos la suma de los rangos para el segundo lote ($n_2 = 10$) tenemos $R_2 = 110{,}9$. El valor muestral de la estadística del criterio se determina con ayuda de la fórmula (10):

$$z_m = \frac{\left|110{,}9 - \frac{10(10+12+1)}{2}\right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{10(10+12+1)}{12}}} \approx 0{,}237.$$

Puesto que para $\alpha = 0$ tenemos $u_{0,05} = 1{,}145$, entonces, en caso de la hipótesis alternativa bilateral H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, la hipótesis H_0 no contradice los resultados de observaciones. ▶

8.16. Dos grupos de personas sometidas a prueba tenían que identificar tres trazados de la cifra 5. Los resultados del experimento (tiempo de identificación en segundos) son los siguientes:

Primer grupo	25	28	27	29	26	24	28	23	30	25	26	25
Segundo grupo	18	19	31	32	17	15	41	35	38	13	14	—

¿Se puede considerar que las varianzas de los resultados para el primero y segundo grupos son diferentes? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.17. En el transcurso de cierto tiempo el rendimiento diario de dos máquinas automáticas es caracterizado por los datos siguientes:

Máquina 1	105	60	83	111	138	71	87	130	93	105	122
Máquina 2	172	45	51	155	117	103	82	93	31	51	—

Verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las varianzas de estos índices. Tomar $\alpha = 0{,}10$.

8.18. Para controlar el ajuste de dos máquinas automáticas que fabrican las piezas según un mismo dibujo han sido determinadas las desviaciones respecto a las dimensiones nominales en algunas piezas fabricadas en ambas máquinas. Como resultado han sido obtenidos los datos siguientes (en μ):

Máquina A	44	—14	32	8	—50	20	—35	15	10	—8	—20	5
Máquina B	52	—49	61	—35	—48	18	—45	35	28	21	—59	—19

Verificar la hipótesis H_0 sobre la igualdad de las varianzas, basándose en estos datos, si el nivel de significación $\alpha = 0{,}10$.

8.19. La dimensión a controlar de varias piezas ha sido comprobada antes y después de ajustar la máquina. Como resultado han sido obtenidos los datos siguientes (en mm):

Antes del ajuste	36,4	37,5	36,9	37,6	38,1	35,5	37,8	38,3	36,6	38,4	37,5
Después del ajuste	36,8	39,2	37,6	39,9	39,6	34,2	36,5	36,3	39,8	—	—

¿Se puede considerar que las varianzas de los resultados de mediciones antes del ajuste y después de realizarlo en la máquina son diferentes? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

4. Criterio de series. El criterio se aplica para verificar la hipótesis H_0 que afirma que los elementos de una muestra han sido obtenidos al azar y son independientes. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la muestra

de los resultados de observaciones y $\tilde{h}_X$, la mediana muestral determinada a base de estos datos. Asignemos a cada elemento de la muestra el signo «+» o «—» en dependencia de que es más o menos de la mediana el valor del mismo (los valores nulos no se tienen en cuenta). De este modo a toda la muestra está puesta en correspondencia una colección de signos. Designemos con n_1 el número de signos «+» y con n_2 el número de signos «—» en la colección obtenida de signos. En esta colección se llama *serie* toda sucesión compuesta por los signos iguales y acotada por los contrarios o bien tal sucesión que se encuentra al inicio o al fin de la colección. Por ejemplo, en la colección

$$+\ -\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ -\ -\ +\ +$$

se contienen 5 series: (+), (−), (+++), (− − − − −), (++), $n_1 = 6$, $n_2 = 6$.

El número de series N es la estadística del criterio de las mismas. El dominio crítico es definido por las desigualdades $N \leqslant N_1$ y $N \geqslant N_2$. Los valores de las fronteras del dominio crítico N_1 y N_2, para el nivel de significación $\alpha = 0{,}05$, se dan en la tabla S11.

EJEMPLO 5. Las velocidades de los automóviles en cierto punto de la vía han formado la serie siguiente (km/h):

31, 39, 40, 45, 27, 28, 35, 55, 21, 33, 42, 36.

¿Se puede considerar aleatorios los valores obtenidos? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

◀ Determinemos la estimación de la mediana de estos datos (el § 1, p. 3). Para esto representemos los datos en forma de la serie variacional:

21, 27, 28, 31, 33, 35, 36, 39, 40, 42, 45, 55.

La estimación de la mediana $\tilde{h} = \dfrac{35 + 36}{2} = 35{,}5$. A la serie inicial corresponde la siguiente sucesión de los signos:

$$-\ +\ +\ +\ -\ -\ -\ +\ -\ -\ +\ +,$$

donde $n_1 = 6$, $n_2 = 6$, el número de series $N = 6$. Con ayuda de la tabla S11, para $\alpha = 0{,}05$, encontramos $N_1 = 3$, $N_2 = 11$. Ahora bien, la hipótesis H_0 se acepta: los valores obtenidos de la velocidad pueden considerarse aleatorios. ▶

Si la muestra tiene grandes volúmenes, cuando n_1 o n_2 o bien ambos valores son mayores que 20, para verificar la hipótesis H_0 puede utilizarse la estadística Z cuyo valor muestral z_m se calcula haciendo uso de la fórmula

$$z_m = \frac{\left(N - \dfrac{2n_1n_2}{n_1+n_2} - 1\right) - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{2n_1n_2\,[2n_1n_2 - (n_1+n_2)]}{(n_1+n_2)^2\,(n_1+n_2-1)}}}. \qquad (11)$$

A condición de que sea cierta la hipótesis H_0, la estadística Z tiene una distribución aproximadamente normal $N(0, 1)$. En este caso el dominio crítico es definido por las desigualdades

$$z_m \leqslant u_{\alpha/2} \text{ ó } z_m \geqslant u_{1-\alpha/2}.$$

OBSERVACIÓN. El criterio de series se aplica para verificar la casualidad de cualquier muestra cuyos elementos son dos símbolos diferentes, por ejemplo: 1 y 0, A y B, + y —. En esta muestra el número de series es la estadística de criterio.

EJEMPLO 6. ¿Se puede considerar que la sucesión

11001000101010011101101001000010100 0

ha sido obtenida a partir de la población de sucesiones aleatorias? Tomar $\alpha = 0{,}01$.

◀ En la sucesión dada el número de ceros $n_1 = 21$ y el número de unidades $n_2 = 15$. El número de series $N = 23$.

Puesto que $n_1 > 20$, para verificar la hipótesis H_0 que afirma que la sucesión dada está obtenida a partir de la población de sucesiones aleatorias hagamos uso de la estadística Z. Según la fórmula (11) el valor muestral z_m de esta estadística es igual a

$$z_m = \frac{\left(23 - \frac{2 \cdot 21 \cdot 15}{21+15}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{2 \cdot 21 \cdot 15 \cdot [2 \cdot 15 \cdot 21 - (24+15)]}{(21+15)^2 \cdot (21+15-1)}}} \approx 1{,}741.$$

Puesto que $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}995} = 2{,}576$ (tabla S1), la hipótesis H_0 se acepta: se puede considerar que la sucesión dada ha sido obtenida a partir de la población de sucesiones aleatorias. ▶

8.20. La profundidad de la capa de difusión, determinada por la muestra obtenida de un lote de microcircuitos, tiene los valores siguientes (en μ):

9,8; 9,8; 8,6; 8,6; 9,2; 9,2; 9,8;
9,0; 10,0; 9,4; 9,0; 11,2; 10,8; 9,2; 9,4.

Verificar la hipótesis H_0 de que los resultados obtenidos han sido distribuidos al azar. Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.21. Para la corriente dada de 10 mA se medía la caída directa de tensión presente en los diodos. Han sido obtenidos los valores siguientes (en voltios):

0,917; 0,918; 0,921; 0,909; 0,919; 0,917;
0,916; 0 917; 0,918; 0,919; 0,919; 0,916.

¿Se puede considerar que estos valores son aleatorios? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.22. La medición de la masa de cierta substancia, obtenida como resultado de una reacción química, ha dado los resultados siguientes (en gramos):

14, 14, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 17, 19, 23.

¿Son aleatorios estos resultados? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.23. La productividad de un taller durante 12 jornadas es caracterizado por las cifras siguientes (en unidades convencionales):

13,0; 13,1; 13,0; 12,5; 12,8; 12,3; 12,1;
12,2; 12,1; 12,7; 12,0; 12,6.

¿Se puede considerar que la variación de la productividad se debe sólo a causas aleatorias? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.24. Para 13 piezas han sido obtenidas las siguientes desviaciones de la dimensión de control respecto al valor nominal (en μ):

+8, +10, +5, −5, −9, +7, +6,
−11, −4, −4, +15, +21, −3.

¿Se puede considerar que la muestra obtenida representa los resultados de observaciones aleatorias e independientes? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.25. El radiotelegrafista ha recibido la siguiente sucesión de símbolos:

— — — — .. — . — .. — . — .. — — — — .. — . —
.. — . — — — — ... — — — — .. — . —

¿Se puede considerar que esta sucesión es una muestra aleatoria? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

8.26. Al tirar una moneda 45 veces la sucesión de los resultados (E, o sea, la salida del escudo; C, o sea, la salida de la cifra) tiene el aspecto siguiente:

E E E E E C C C C E E E C C C E C E C C C C C C
E E E E C C C C C E E E C E E E E C C C.

¿Es tal sucesión una muestra aleatoria? Tomar $\alpha = 0{,}05$.

5. **Correlación de rango.** Sea (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, una muestra de observaciones de las variables aleatorias continuas X e Y. A cada valor de x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, asignemos el rango x_i', o sea, el número de elemento x_i en la serie variacional $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Del modo análogo determinemos los rangos y_i' de los elementos y_i $i = 1, 2, \ldots, n$. Ahora bien, a cada par (x_i, y_i) le corresponde un par de rangos (x_i', y_i'). Calculemos el coeficiente de correlación (§ 1, p. 4, fórmula (28)), basándose en la muestra de rangos (x_i', y_i'), $i = 1, 2, \ldots, n$. El valor obtenido r_s se llama *valor muestral del coeficiente de correlación de rango de Spearman* ρ_s. El coeficiente de correlación de rango, al igual que el coeficiente de correlación r caracteriza la dependencia entre las variables aleatorias X e Y, pero se calcula

mucho más sencillamente, a saber, es válida la fórmula siguiente:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum (x_i' - y_i')^2}{n(n^2-1)}. \qquad (12)$$

Por eso, cuando se trata de un gran volumen de la muestra, para estimar la dependencia entre las variables aleatorias se utiliza la correlación de rango. El coeficiente r_s es una *medida no paramétrica de relación* y, por consiguiente, puede utilizarse en caso de una distribución continua arbitraria de la población madre, mientras que la utilización del coeficiente de correlación r supone una distribución normal bidimensional de la población madre. La hipótesis H_0: $\rho_S = 0$, para la hipótesis alternativa H_1: $\rho_S \neq 0$ y para el volumen de la muestra $n \geqslant 9$, se verifica por el valor de la estadística

$$|r_s| \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} = T(n-2). \qquad (13)$$

A condición de que sea cierta la hipótesis H_0, esta estadística tiene la distribución de Student con $n-2$ grados de libertad. Si $t_m > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-2)$, donde α es el valor dado de significación, la hipótesis H_0 se rechaza, o sea, entre X e Y existe una dependencia de correlación de rango.

EJEMPLO 7. Calcular el coeficiente de correlación de rango para la muestra siguiente:

x	68,8	63,3	75,7	67,2	71,3	72,8	76,5	63,5	69,9	71,4
y	167,0	113,3	159,9	153,6	150,8	181,2	173,1	115,4	125,6	166,2

Comprobar la significación de la correlación de rango si $\alpha = 0{,}10$.

◀ Determinemos los rangos de los elementos de la muestra inicial. Previamente escribimos una vez más la muestra inicial, ordenando sus elementos en la fila superior (o, sea, según los valores de x_i), como resultado obtenemos

x	63,3	63,5	67,2	68,8	69,9	71,3	71,4	72,8	75,7	76,5
y	113,3	115,4	153,6	167,0	125,6	150,8	166,2	181,2	159,9	173,1

Determinemos los rangos para los valores de y_i. La serie variacional para y_i tiene la forma

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y^{(i)}$	113,3	115,4	125,6	150,8	153,6	159,9	166,2	167,0	173,1	181,2

Ahora bien, a la muestra ordenada según los elementos x_i le corresponde la siguiente sucesión de los pares de rangos y de sus diferencias:

x_i'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i'	1	2	5	8	3	4	7	10	6	9
$x_i'-y_i'$	0	0	−2	−4	2	2	0	−2	3	1

Puesto que $\sum_{i=1}^{10}(x_i'-y_i')^2=42$, por medio de la fórmula (12) hallamos

$$r_s=1-\frac{6\cdot 42}{10\cdot(10^2-1)}\approx 0{,}745.$$

Comprobemos la significación del resultado obtenido. Determinemos el valor muestral de la estadística (13)

$$t_m=0{,}745\cdot\sqrt{\frac{10-2}{1-(0{,}745)^2}}\approx 3{,}159.$$

Ya que $t_{0{,}95}(8)=1{,}860$ (tabla S6), la correlación de rango es significativa. ▶

8.27. Los corredores, cuyos rangos al ordenarlos según la estatura eran 1, 2, . . ., 10, ocuparon en las competiciones los lugares siguientes:

6, 5, 1, 4, 2, 7, 8, 10, 3, 9.

¿Cuál es la correlación de rango entre la estatura y la rapidez de la carrera?

8.28. Los discos en color que tienen el orden de los matices 1, 2, . . ., 15 han sido dispuestos para los examinandos en el orden siguiente:

7, 4, 2, 3, 1, 10, 6, 8, 9, 5, 11, 15, 14, 12, 13.

Caracterizar la capacidad del examinando de distinguir los matices de los colores con ayuda del coeficiente de correlación de rango entre los rangos reales y los que se observan.

8.29. Hallar el coeficiente de correlación de rango entre el rendimiento del trigo y de la patata en los campos vecinos, basándose en los datos siguientes:

Años	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
Trigo (Qm)	20,1	23,6	26,3	19,9	16,7	23,2	31,4	33,5	28,2	35,3	29,3	30,5
Patata (t)	7,2	7,1	7,4	6,1	6,0	7,3	9,4	9,2	8,8	10,4	8,0	9,7

8.30. Para una partida de control de los circuitos integrados ha sido determinado, según varios parámetros, el valor del criterio de utilidad K. Hallar el coeficiente de correlación de rango entre los valores de K y de la resistividad de la bolsa $p\,R_p$, así como entre los valores de R_p y la tensión de corte V_0, basándose en los datos siguientes:

K	0,226	0,187	0,678	0,141	0,197	0,339	0,421	0,141	0,127	0,819
R_p, $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$	905	1004	1119	1200	1340	1261	1140	1190	1060	1130
V_0, V	1,2	1,9	1,7	1,5	4,5	2,2	2,3	2,4	1,8	1,4

Comprobar la significación de los coeficientes obtenidos, si $\alpha = 0{,}10$.

8.31. En 16 percas han sido medidas la longitud de la cabeza (x) y la longitud de la aleta dorsal y. Las mediciones han dado los resultados siguientes (en mm):

x	66	61	67	73	51	59	48	47	58	44	41	54	52	47	51	45
y	38	31	36	43	29	33	28	25	36	26	21	30	20	27	28	26

a) Hallar el coeficiente de correlación de rango. Comprobar la significación del resultado obtenido si $\alpha = 0{,}05$.

b) Hallar el coeficiente de correlación y comprobar su significación, si $\alpha = 0{,}05$, suponiendo que la muestra ha sido obtenida a partir de una población bidimensional normalmente distribuida.

8.32. La relación entre la masa del cuerpo (x) y la cantidad de hemoglobina en la sangre (y) de los babuinos es caracterizada por los datos siguientes:

Masa del cuerpo, en kg	18	17,7	19	18	19	22	21	21	20	30
Hemoglobina (en unid. conv.)	70	74	72	80	77	80	80	89	76	86

a) Hallar el coeficiente de correlación de rango.

b) Hallar el coeficiente de correlación.

8.33. Supongamos que entre las variables x e y existe la dependencia lineal: $y = ax + b$, $a > 0$. Mostrar que el coeficiente de la correlación de rango $r_s = 1$.

8.34. Supongamos que los rangos de dos características corresponden al orden inverso. Mostrar que los rangos x_i' e y_i' están ligados por la relación siguiente:

$$x_i' + y_i' = n + 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

y por consiguiente, $r_s = -1$.

8.35. ¿Varía el coeficiente de correlación de rango si en vez de los valores iniciales de la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, se examinan los valores $(\varphi(x_i), \psi(y_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, donde φ y ψ son las funciones monótonas crecientes?

8.36*. El coeficiente de correlación sobre la base de la muestra (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, se calcula del modo siguiente:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}.$$

Utilizando este resultado, deducir la fórmula (12) para la determinación del coeficiente de correlación de rango.

RESPUESTAS

1.1. 1, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 8, es la serie variacional,

x_i	1	2	3	5	6	7	8
n_i	1	2	2	1	1	1	1

es la serie estadística, $w = 7$.

1.2. 0, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 16, 16, 19 es la serie variacional,

x_i	0	3	5	6	8	9	11	12	13	14	15	16	19
n_i	1	1	1	1	1	1	3	2	1	1	1	2	1

es la serie estadística, $w = 19$.

1.3. 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19 es la serie variacional.

x_i	15	16	17	18	19
n_i	1	4	4	5	2

es la serie estadística, $w = 4$.

1.4. $w = 63$, $b = 9$, $k = 7$, $n = 50$, los resultados de agrupación se reúnen en la tabla:

Número del intervalo	Cotas del intervalo	x_i^*	n_i^*	$\sum_{j=1}^{i} n_j^*$	$\frac{n_i^*}{n}$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*$
1	14 ... 23	18,5	2	2	0,04	0,04
2	23 ... 32	27,5	3	5	0,06	0,1
3	32 ... 41	36,5	6	11	0,12	0,22
4	41 ... 50	45,5	17	28	0,34	0,56
5	50 ... 59	54,5	10	38	0,2	0,76
6	59 ... 68	63,5	9	47	0,18	0,94
7	68 ... 77	72,5	3	50	0,06	1

1.5. $w = 13{,}5$, $b = 2$, $k = 7$, $n = 65$, los resultados de agrupación se reúnen en la tabla:

Número del intervalo	Cotas del intervalo	x_i^*	n_i^*	$\sum_{j=1}^{i} n_j^*$	$\frac{n_i^*}{n}$	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{i} n_j^*$
1	8,4 ... 10,4	9,4	3	3	0,0462	0,0462
2	10,4 ... 12,4	11,4	7	10	0,1077	0,1539
3	12,4 ... 14,4	13,4	13	23	0,2	0,3539
4	14,4 ... 16,4	15,4	21	44	0,3231	0,6770
5	16,4 ... 18,4	17,4	17	61	0,2615	0,9385
6	18,4 ... 20,4	19,4	2	63	0 0308	0,9693
7	20,4 ... 22,4	21,4	2	65	0,0308	1,0001

1.6. El polígono de frecuencias está representado en la fig. 179 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 180. **1.7.** El polígono de frecuencias está representado en la fig. 181 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 182. **1.8.** El gráfico de la función empírica está representado en la fig. 183. **1.9.** El gráfico de la función empírica está representado en la fig. 184. **1.10.** $x_{0,25} \approx 41{,}4$, el histograma de frecuencias está representado en la fig. 185, el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 186. **1.11.** $x_{0,8} \approx 175{,}0$, el histograma de frecuencias está representado en la fig. 187 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 188. **1.12.** $x_{0,75} \approx 31{,}2$, el histograma de frecuencias está representado en la fig. 189 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 190. **1.13.** $x_{0,7} \approx 71{,}3$, el histograma de frecuencias está representado en la fig. 191 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 192. **1.14.** El gráfico de la función empírica de distribución está representado en la fig. 193. **1.15.** El gráfico de la función empírica de distribución está representado en la fig. 194. **1.16.** a) el histograma viene dado en la fig. 195, y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 196; b) el histograma está representado en la fig. 197 y el polígono de frecuencias acumulativas,

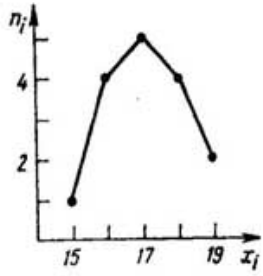


Fig. 179

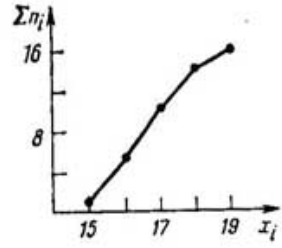


Fig. 180

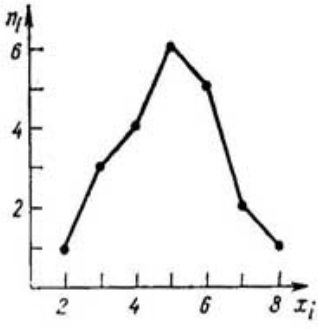


Fig. 181

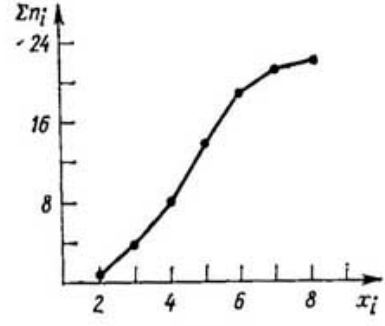


Fig. 182

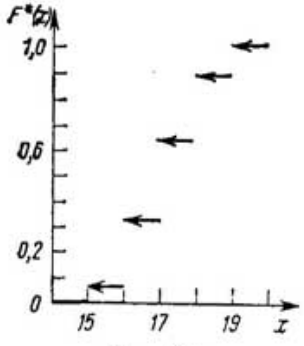


Fig. 183

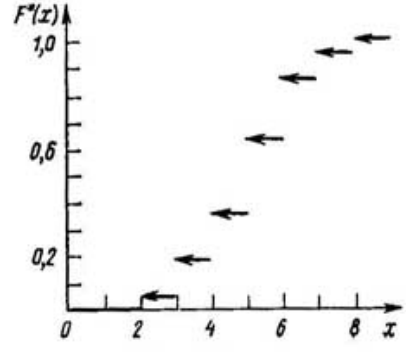


Fig. 184

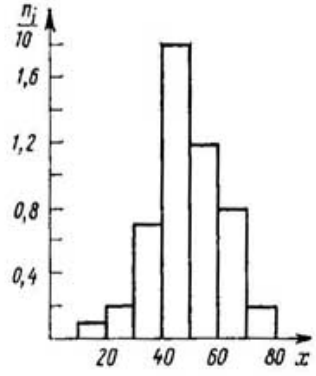


Fig. 185

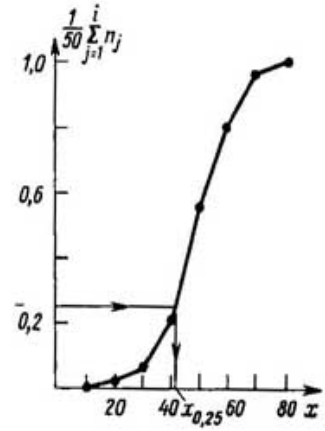


Fig. 186

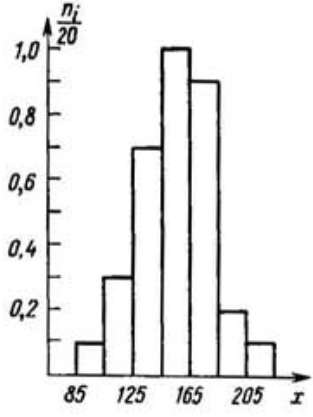


Fig. 187

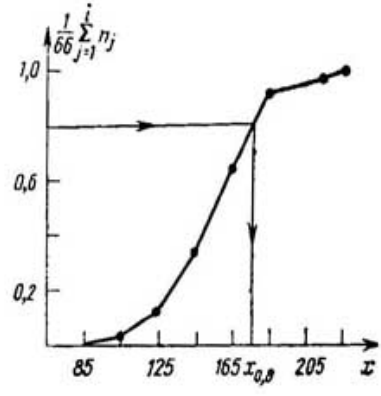


Fig. 188

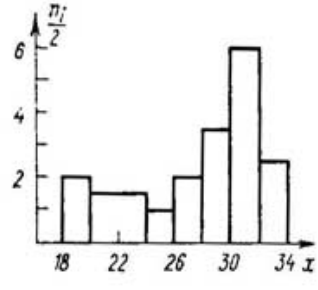


Fig. 189

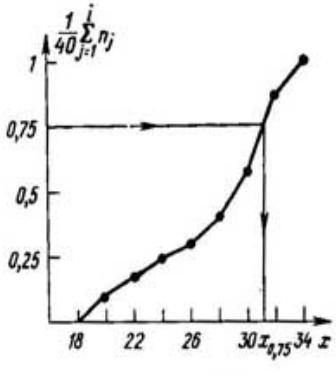


Fig. 190

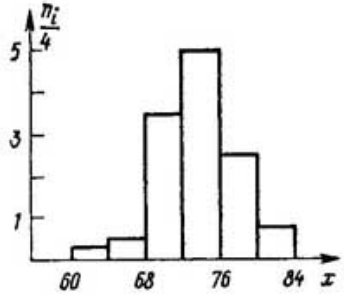


Fig. 191

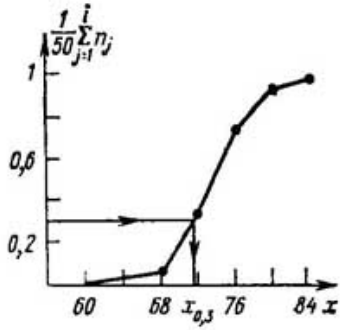


Fig. 192

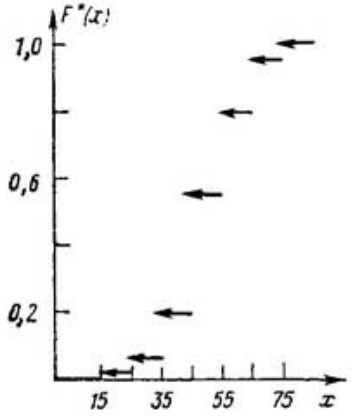


Fig. 193

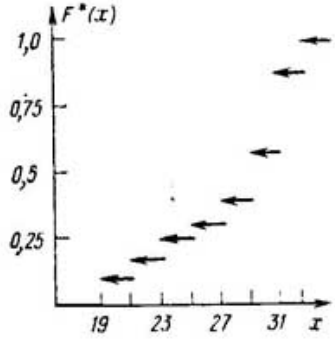


Fig. 194

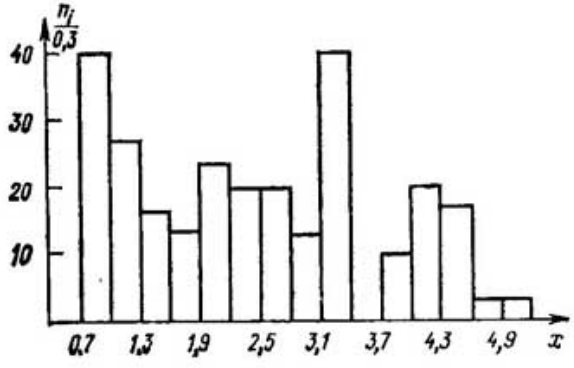


Fig. 195

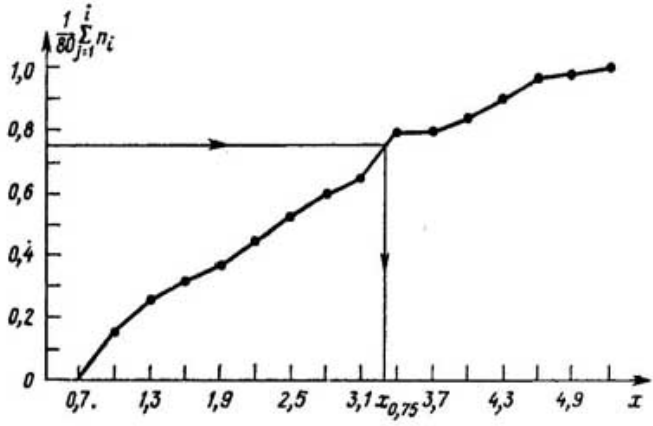


Fig. 196

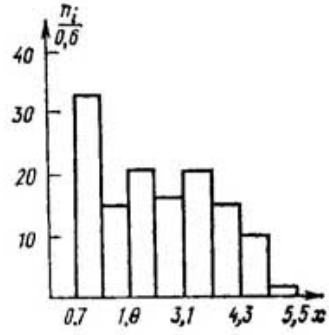


Fig. 197

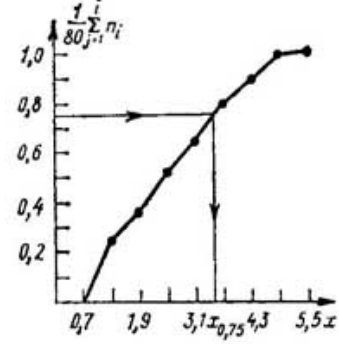


Fig. 198

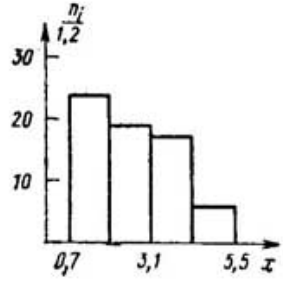


Fig. 199

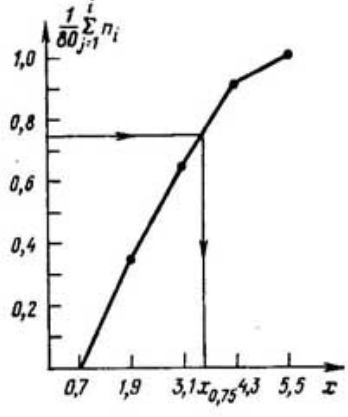


Fig. 200

en la fig. 198; c) el histograma está representado en la fig. 199 y el polígono de frecuencias acumulativas, en la fig. 200. **1.17.** a) 3,28 b) 3,52, c) $\approx 3{,}58$. **1.18.** ● De la tabla S12 escoger al azar 50 números. Dividiendo cada número por 100, utilizarlos como valores dados de $\Phi(x)$ para hallar los valores correspondientes del argumento con ayuda de la tabla S1. La sucesión obtenida de números forma la muestra a partir de la población madre con la distribución normal $N(0, 1)$. **1.19.** ● Los elementos de la muestra x_i, $i = 1, 2, \ldots, 50$, a partir de la población madre con la distribución normal $N(0, 1)$ es necesario transformarlos por la fórmula $y_i = 2x_i + 10$, $i = 1, 2, \ldots, 50$. **1.20.** $\bar{x} = 3{,}5$, $\tilde{d}_X = \tilde{h}_X = 3$. **1.21.** $\bar{x} \approx 2{,}39$; $\tilde{d}_X = 3{,}1$; $\tilde{h}_X = 2{,}5$. **1.22.** a) $\bar{x} \approx 4{,}14$, $\tilde{d}_X = 5$, $\tilde{h}_X = 4$; b) $\bar{x} \approx 4{,}54$, $\tilde{d}_X = 5$, $\tilde{h}_X = 4$. Para la muestra b) la media ha aumentado, mientras que la moda y la mediana no se han cambiado. **1.23.** $\bar{x} \approx 10{,}4$, $\tilde{d}_X = 10{,}3$, $\tilde{h}_X = 10{,}35$. **1.24.** $\bar{x} \approx 24{,}24$, $d_X \approx 25{,}33$, $\tilde{h}_X = 24{,}5$. **1.25.** $\bar{x} \approx 6{,}21$, $\tilde{d}_X = 5$, $\tilde{h}_X = 5{,}65$. **1.26.** b) ●Hallar el valor del parámetro a con el cual $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$ toma el valor mínimo. **1.28.** ◀Sea $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x^{(n)}$ la serie variacional de la muestra. Examinemos la suma $\sum_{i=1}^{n} |x^{(i)} - a|$, $a \in \mathbb{R}$ y mostremos que esta suma alcanza el mínimo cuando $a = \tilde{h}_X$. Pongamos $a = \tilde{h}_X + \alpha$ y examinemos el caso de $\alpha > 0$. Entonces para cierto $l < n$ se cumple la relación $x^{(l)} \leqslant a \leqslant x^{(l+1)}$, con la particularidad de que $2l > n$. Obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |x^{(i)} - a| = \sum_{i=1}^{l} (\tilde{h}_X + \alpha - x^{(i)}) +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{n} (x^{(i)} - \tilde{h}_X - \alpha) = \sum_{i=1}^{n} |x^{(i)} - \tilde{h}_X| +$$

$$+ \alpha(2l - n) > \sum_{i=1}^{n} |x^{(i)} - \tilde{h}_X|.$$

El caso de $\alpha < 0$ se examina análogamente. ▶ **1.29.** ● Utilizar la desigualdad del problema 1.26. b) **1.30.** a) Aumentarán (disminuirán) en d; b) aumentarán (disminuirán) k veces. **1.31.** El punto B. **1.32.** a) 4,71; b) 4,25. **1.34.** a) No variará; b) aumentará (disminuirá) en k^2 veces. **1.35.** $\bar{x} \approx 6{,}54$, $s^2 \approx 8{,}073$. **1.36.** $\bar{x} \approx 11{,}77$, $s^2 \approx 36{,}4$. **1.38.** 1) $\bar{x} = 17{,}7$, $s^2 \approx 20{,}6$; 2) $\bar{x} \approx 17{,}2$, $s^2 \approx 19{,}7$, **1.39.** 1) $\bar{x} \approx 70{,}4$, $s^2 \approx 9{,}8$; 2) $x \approx 69{,}8$, $s^2 \approx 9{,}4$. **1.40.** 1) $\bar{x} \approx 5{,}96$; $s^2 \approx 1{,}39$; 2) $\bar{x} \approx 5{,}94$, $s^2 \approx 1{,}34$. **1.41.** Para la muestra inicial $\bar{x} = 17{,}4$, $\tilde{d}_X = 19$, $\tilde{h}_X = 18$, $s^2 \approx 8{,}8$; para la muestra agrupada

$x \approx 17{,}8$, $\widetilde{d}_X = 18{,}8$, $\widetilde{h}_X = 18{,}2$, $s^2 \approx 9{,}9$. **1.42.** a) $\bar{x} = 2$, $s^2 = 0$; b) $\bar{x} = 5$, $s^2 = 0$; c) $\bar{x} \approx 3{,}7$, $s^2 \approx 2{,}5$. **1.43.** ◀ Designemos los elementos de la primera muestra con x_i, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, y los de la segunda con x'_j, $j = 1, 2, \ldots, n_2$. Entonces con ayuda de la fórmula (1) encontramos

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1} x_i + \sum_{j=1}^{n_2} x'_j\right] =$$

$$= \frac{n_1}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i + \frac{n_2}{n_1+n_2} \cdot \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} x'_j =$$

$$= \frac{n_1}{n_1+n_2}\bar{x}_1 + \frac{n_2}{n_1+n_2}\bar{x}_2 = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}.$$

Análogamente, por la fórmula (5) tenemos

$$s^2 = \frac{1}{n_1+n_2-1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j-\bar{x})^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2-1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}((x_i-\bar{x}_1)+(\bar{x}_1-\bar{x}))^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n_2}((x'_j-\bar{x}_2)+(\bar{x}_2-\bar{x}))\right) =$$

$$= \frac{1}{n_1+n_2-1}\left(\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1)^2 + n_1(\bar{x}_1-\bar{x})^2 + \right.$$

$$+ 2(\bar{x}_1-\bar{x})\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1) + \sum_{j=1}^{n_2}(x'_j-\bar{x}_2)^2 +$$

$$\left. + n_2(\bar{x}_2-\bar{x}) + 2(\bar{x}_2-\bar{x})\sum_{j=1}^{n_2}(x'_j-\bar{x}_2)\right) =$$

$$= \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2 + n_1(\bar{x}_1-\bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2-\bar{x})^2}{n_1+n_2-1},$$

puesto que $\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x}_1)$ y $\sum_{j=1}^{n_2}(x'_j-\bar{x}_2)$ son iguales a cero. ▶

1.44. $\bar{x}_c = 2{,}4$, $s_c^2 = 2{,}75$. **1.45.** $\bar{x} = 78{,}9$, $s^2 \approx 52{,}58$, $\widetilde{a}_X \approx 0{,}89$, $\bar{e}_X \approx$

$\approx 7{,}55$. **1.46.** $\bar{x} = 61{,}60$, $s^2 \approx 19{,}73$, $\tilde{a}_X \approx -0{,}47$, $\tilde{e}_X \approx -0{,}25$. **1.47.** $\bar{x} = 35{,}72$, $s^2 \approx 16{,}1$, $\tilde{a}_X \approx -0{,}03$, $e_X \approx -1{,}09$. **1.48.** $\bar{x} \approx$ $\approx 0{,}073$, $s^2 \approx 0{,}001$, $\tilde{a}_X \approx -0{,}604$, $e_X \approx 0{,}372$. **1.49.** $\bar{x} \approx 9{,}25$, $s^2 \approx 0{,}048$, $\tilde{a}_X \approx 0{,}44$, $\tilde{e}_X \approx -0{,}61$. **1.50.** $\bar{x} \approx 8{,}6$, $s^2 \approx 378{,}9$, $\tilde{a}_X \approx -0{,}12$, $\tilde{e}_X \approx -0{,}18$. **1.52.** 0,802. **1.53.** 0,806. **1.54.** 0,997.

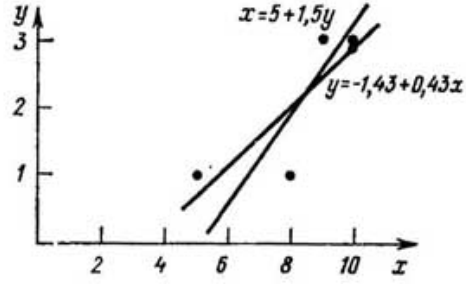


Fig. 201

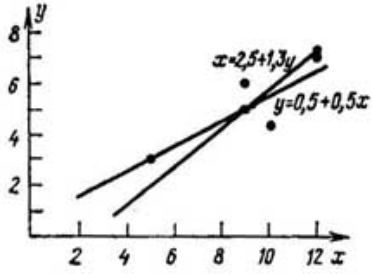


Fig. 202

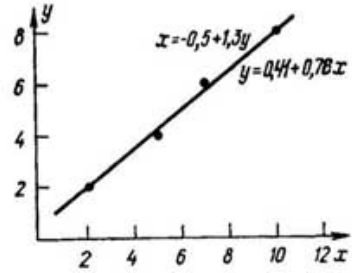


Fig. 203

1.56. $\tilde{k}_{xy} \leqslant 12$. ●Mostrar que es válida la desigualdad $\tilde{k}_{xy} \leqslant s_x s_y$. **1.58.** $-0{,}6$. **1.59.** 0,55. **1.60.** $r \approx 0{,}535$, $y = -1{,}43 + 0{,}43x$, $x = 5 + 1{,}5y$ (fig. 201). **1.61.** $r \approx 0{,}806$, $y = 0{,}5 + 0{,}5x$, $x = 2{,}5 + 1{,}3y$ (fig. 202). **1.62.** $r \approx 0{,}997$, $y = 0{,}41 + 0{,}76x$, $x = -0{,}5 + 1{,}3y$ (fig. 203). **1.63.** $r \approx 0{,}837$, $y = 8{,}96 + 0{,}44x$, $x = 10{,}96 + 1{,}6y$. **1.64.** $r \approx 0{,}743$, $y = 12{,}25 + 0{,}8x$. **1.68.** $\tilde{\beta}_{1uv} = \frac{c}{a}\tilde{\beta}_{1xy}$, $\tilde{\beta}_{0uv} = \bar{v} - \frac{c}{a}\tilde{\beta}_{1xy}\bar{u}$, donde $\bar{u} = a\bar{x} + b$, $\bar{v} = c\bar{y} + d$. **1.69.** $-0{,}137$. **1.70.** $r \approx -0{,}44$, $y = 14 - 0{,}04x$, $x = 101{,}78 - 4{,}57y$. **1.71.** $r \approx$ $\approx 0{,}775$, $y = 10{,}1 + 0{,}72x$, $x = 5{,}87 + 0{,}83y$. **1.72.** $r \approx 0{,}921$ $y = 25{,}3 + 0{,}92x$, $x = -8{,}5 + 0{,}98y$. **1.73.** $r \approx 0{,}848$, $y = -10{,}17 + 1{,}74x$, $x = 6{,}31 + 0{,}41y$.

1.74.

```
      SUBROUTINE MAXMIN (X, N, XMAX, XMIN)
      DIMENSION X(1)
      XMAX = X(1)
      XMIN = X(1)
      DO 2 I = 2, N
      IF(X(I). GT. XMAX) XMAX = X(I)
    2 IF(X(I). LT. XMIN) XMIN = X(I)
      RETURN
      END
```

1.75.

```
      FUNCTION W(X, N)
      DIMENSION X(N)
      CALL MAXMIN (X, N, XMAX, XMIN)
      W = XMAX — XMIN
      RETURN
      END
```

1.76. El programa de cálculo de la serie variacional:

```
      SUBROUTINE VARXN (X, N)
      DIMENSION X(1)
      N1 = N — 1
      DO 12 I = 1, N1
      I1 = I + 1
      DO 12 J = I1, N
      IF (X(I) — X(J)) 12, 12, 11
   11 XT = X(I)
      X(I) = X(J)
      X(J) = XT
   12 CONTINUE
      RETURN
      END
```

El programa de cálculo de la serie estadística:

```
      SUBROUTINE XSTAT (X, Y, NI, N, I1)
      DIMENSION X(N), Y(N), NI(N)
      CALL VARXN (X, N)
      I1 = Ø
      I = 1
      IN = Ø
      XT = X(I)
    2 I = I + 1
      IN = IN + 1
      IF(XT, EQ, X(I). AND. I.NE. N) GO TO 2
      IF(XT. EQ. X.(I). AND. I. EQ.N) GO TO 5
      I1 = I1 + 1
      NI(I1) = IN
      Y(I1) = XT
      XT = X(I)
      IN = Ø
```

```
      IF(I. EQ. N) GO TO 5
      GO TO 2
    5 I1 = I1 + 1
      NI(I1) = IN + 1
      Y(I1) = XT
      RETURN
      END
```

● X es el nombre del juego de datos; Y, el nombre del juego ordenado de datos; I1, el número de diferentes elementos del juego.

1.77. Respuesta para el problema 1.1:

```
      DIMENSION X(9), Y(9), NI(9)
      DATA X/3., 8., 3., 6., 5., 2., 2., 7./
      N = 9
      R = W(X, N)
      CALL VARXN(X, N)
      PRINT 3, R
      FORMAT (1ØX, 'RECORRIDO DE LA MUESTRA =', F5.1)
      PRINT 4, X
    4 FORMAT (1ØX, 'SERIE VARIACIONAL'//(1ØX, 9F5.1))
      CALL XSTAT (X, Y, NI, N, I1)
      PRINT 5, (Y(I2), NI(I2), I2 = 1, I1)
    5 FORMAT (1ØX, F5.1, 5X, I5)
      STOP
      END
```

Las respuestas para otros problemas se distinguen por el juego numérico de entrada.

● La tarea para el ordenador debe contener cinco unidades de programa: el programa principal, indicado aquí, y cuatro otros, obtenidos durante la resolución de los problemas 1.74—1.76.

1.78.

```
      SUBROUTINE VTZ(N, K, AX, Y, NI, F, NK)
      DIMENSION AX(N), Y(K), NI(K), F(K)
      REAL NB
      NK = Ø
      X = N
      CALL MAXMIN(AX, N, AMAX, AMIN)
      NB = (AMAX — AMIN)/K
      DO 1 I = 1, K
      NI(I) = Ø
      Y(I) = AMIN + NB/2. + (I — 1)*NB
      Z1 = Y(I) — NB/2.
      Z2 = Y(I) + NB/2.
      DO 2 I1 = 1, N
      IF(I.EQ.K) GO TO 3
      IF(Z1.LE.AX(I1). AND. AX(I1). LT. Z2)NI(I) = NI(I) + 1
      GO TO 2
      IF(Z1.LE.AX(I1).AND.((AX(I1), LE.Z2). OR.(AX(I1).
     *GE.Z2))) NI(I) = NI(I) + 1
```

```
 2 CONTINUE
   IF(I.NE.1)F(I) = F(I — 1) + NI(I)/X
   IF(I.EQ.1)F(I) = NI(1)/X
   NK = NK + NI(I)
 1 CONTINUE
   RETURN
   END
```

1.79. Respuesta al problema 1.4:

```
   DIMENSION X(1ØØ), Y(1ØØ), N1(1ØØ) F(1ØØ)
   READ (5,1) (X(I), I = 1,5Ø)
 1 FORMAT (4Ø F2.Ø)
   N = 5Ø
   K = INT(ALOG1Ø (NØ1.) Ø5)
   CALL VTZ(N, K, X, Y, NI, F, NK)
   PRINT 2
 2 FORMAT (2ØX, 'Y', 2ØX, 'NI', 2ØX, 'F')
   PRINT 3, (Y(I), NI(I), F(I), I = 1, K)
 3 FORMAT (17X, F6.1, 17X, 16, 17X, F6.1)
   PRINT 4, K, NK
 4. FORMAT (//1ØX, 'K = ', 16,5X, 'NK = ', 16)
   STOP
   END
```

La respuesta al problema 1.5 se distingue con los primeros cuatro operadores.

● La tarea para el ordenador debe contener dos unidades de programa: un programa indicado aquí y otro programa obtenido durante la resolución del problema 1.78

1.80. El programa de cálculo de la función empírica de distribución:

```
   SUBROUTINE STATFN (X, Y, NI, N, I1, F)
   DIMENSION X(N), Y(N), NI N), F(N)
   CALL XSTAT (X, Y, NI, N, I1)
   X1 = N
   DO 2 I = 1, I1
   IF(I.NE.1) F(I) = F(I — 1) + NI(I)/X1
 2 IF (I.EQ.1) F(I) = NI(I)/X1
   RETURN
   END
```

El programa de construcción del gráfico de la función empírica de distribución:

```
   SUBROUTINE GRAF (Y, F, N, M)
   DIMENSION Y (1), Y1 (11), F(1)
   LOGICAL*1B1 (1Ø2)/1Ø2*1HI/
   LOGICAL*1B(12Ø)/12Ø*1H
   LOGICAL*1C/1H*/, C1/1H/
   DO 5 I = 1, 11
 5 YI(I) = .1*(I — 1)
   PRINT 7, YI
```

```
  7 FORMAT (//3X, 11 (7X. F3.1))
    PRINT 2, B1
  2 FORMAT (1X, 1Ø2A1)
    CALL MAXMIN (F, N, YMAX, YMIN)
    H = (YMAX — YMIN)/1ØØ
    DO 1Ø I = 1, N
    K = (F(I) — YMIN)/H + 2
    B(K) = C
    DO 4 J = 1, M
    IF (J.EQ.1) PRINT 11, Y(1), (B(L), L = 1,1Ø2)
 11 FORMAT (1X G1Ø.4, 'I', 1Ø2 A1)
    PRINT 3 B
  3 FORMAT (1X, 12ØA1)
  4 CONTINUE
    B(K) = C1
1Ø CONTINUE
    RETURN
    END

    1.81.
    SUBROUTINE GISTGR (Y, X, N, M)
    INTEGER Y, S, P
    DIMENSION Y(1), X(1), C(9Ø)]
    DATA A, B/'  ', ' '/
    PRINT 15*
 15 FORMAT (1X, 4(/))
    S = Y(1)
    P = S
    DO 1 I = 1, N
    IF (P.GT.Y(I))P = Y(I)
    IF (S.LT.Y(I))S = Y(I)
  1 CONTINUE
    DO 3 I = 1, N
    DO 2 J = 1, 9Ø
  2 C(J) = B
    K1 = (Y(I) — P)*9Ø./(S — P)
    K = K1
    IF (M.EQ.Ø) GO TO 1Ø
    IF (I.LT.N) K2 = (Y(I + 1) — P)*9Ø./(S — P)
    IF (K2.GT.K)K = K2
1Ø CONTINUE
    IF (K.EQ.Ø) GO TO 8
    DO 4 J = 1, K
  4 C(J) = A
  8 CONTINUE
    PRINT 5, X(I), C, Y(I)
  5 FORMAT (1X, G1Ø.4, 'I', 9ØA1, 'I', 16)
    IF (M.LE.Ø.OR.I.EQ.N) GO TO 3
    DO 9 L = 1, 9Ø
  9 C(L) = B
    IF (K2.EQ.Ø) GO TO 12
    C(K2) = A
 12 CONTINUE
    DO 6 J = 1, M
```

```
6 PRINT 7, C
7 FORMAT (12X, 'I' 9ØA1, 'I')
3 CONTINUE
  PRINT 15
  RETURN
  END
```

1.82. La respuesta se da para la muestra desde el problema 1.4:

```
  DIMENSION X(1ØØ), Y(1ØØ), NI(1ØØ), F(1ØØ)
  READ (5,1) (X(I), I = 1,5Ø)
1 FORMAT (4ØF2.Ø)
  N = 5Ø
  K = INT ((ALOG1Ø (N•1.)•5)
  CALL VTZ (N, K, X, Y, NI, F, NK)
  CALL GISTGR (NI, Y, K, I)
  STOP
  END
```

La respuesta a los demás problemas se distingue por los primeros cuatro operadores en el programa principal.

● La tarea para el ordenador debe contener tres unidades de programa: un programa principal, indicado aquí, y dos subprogramas de resolución de los problemas 1.78, 1.81.

1.83.

```
  DIMENSION X(5), Y(5), NI(5), F(5)
  READ 2, X, NI
2 FORMAT (5(F2.Ø), 5 I1)
  CALL STATEN (X, Y, NI, 5, I1, F)
  CALL GRAF (Y, F, I1, 4)
  STOP
  END
```

● Para los datos agrupados en vez del operador CALL STATEN es necesario utilizar CALL VTZ. El operador READ 2, X, NI es equivalente al operador READ (a, 2), donde a determina el dispositivo de lectura de tarjetas perforadas y es más universal.

1.84.

```
  SUBROUTINE DISP (N, X, NI, XSR, D)
  DIMENSION X(1), NI(1)
  DATA S/Ø./, S1/Ø./, N1/Ø/
  DO 2 I = 1, N
  N1 = N1 + NI(I)
  S = S + X(I)•NI(I)
2 S1 = S1 + (X(I)••2)•NI(I)
  XSR = S/N1
  D = (S1 — N1•XSR••2)/(N1 — 1)
  RETURN
  END
```

1.85.

```
  FUNCTION AMK (X, NI, N, K)
```

```
      DIMENSION X(1), NI(1)
      DATA S/0./, S1/0./, N1/0/
      DO 2 I = 1, N
      N1 = N1 + NI(I)
    2 S = S + X(I)*NI(I)
      XSR = S/N1
      DO 3 I = 1, N
    3 S1 = S1 + ((X(I) - XSR)**K)*NI(I)
      AMK = S1/N1
      RETURN
      END
```

1.86.

```
      SUBROUTINE ASEKS (X, NI, N, K, F, AS, EKS)
      DIMENSION X(N), NI(N)
      CALL DISP (N, X, NI, XSR, D)
      AS = F(X, NI, N, K)/(SQRT(D)**3)
      EKS = F(X, NI, N, K + 1)/D**2 - 3.
      RETURN
      END
```

1.87. Respuesta al problema 1.45:

```
      EXTERNAL AMK
      DIMENSION X(10), NI(10)
      READ (5, 2) N, (NI(I), I = 1, N)
    2 FORMAT (12, 10I2)
      DO 4 I = 1, N
    4 X(I) = 63. + (I - 1)*4.
      K = 3
      CALL DISP (N, X, NI, XSR, D)
      CALL ASEKS (X, NI, N, K, AMK, AS, EX)
      PRINT 3, XSR, D, AS, EX
    3 FORMAT (10X, 'XSR = ', F6.2, 'D = ', F6.2,
     *'AS = ', F6.2, 'EX = ', F6.2)
      STOP
      END
```

Las respuestas a otros problemas se distinguen por el segundo, tercero y cuatro operadores en el programa principal.

● La tarea para el ordenador contiene cuatro unidades de programa: el programa principal, indicado aquí, y dos subprogramas, obtenidos durante la resolución de los problemas 1.84—1.86.

1.88.

```
      SUBROUTINE STAXY1 (X, Y, N, SXR, SYR, QX, QY, QXY)
      DIMENSION X(1), Y(1)
      DATA S1/0./, S2/0./, S3/0./, S4/0./, S5/0./
      DO 2 I = 1, N
      S1 = S1 + X(I)
      S2 = S2 + Y(I)
      S3 = S3 + X(I)**2
      S4 = S4 + Y(I)**2
```

```
 2 S5 = S5 + X(I)*Y(I)
   SXR = S1/N
   SYR = S2/N
   QX = S3 - (S3**2)/N
   QY = S2 - (S2**2)/N
   QXY = S5 - S1*S2/N
   RETURN
   END
```

1.89.

```
   SUBROUTINE STAXY2 (QX, QY QXY, N, DX, DY,
   *KXY, RXY)
   REAL KXY
   DX = QX/(N - 1)
   DY = QY/(N - 1)
   KXY = QXY/(N - 1)
   RXY = QXY/SQRT (QX*QY)
   RETURN
   END
```

1.90.

```
   SUBROUTINE LINREG (X, Y, QX, QY, QXY, BØYX,
   *B1YX, BØXY, B1XY)
   B1YX = QXY/QX
   BØYX = Y - B1YX*X
   B1XY = QXY/QY
   BØXY = X - B1XY*Y
   RETURN
   END
```

1.91.

```
   DIMENSION X(18), Y(18)
   READ (5, 2) Y
   DO 4 I = 1, 18
 4 X(I) = .1*(I - 1)
 2 FORMAT (18F4.3)
   N = 18
   CALL STAXY1 (X, Y, N, SXR, SYR, QX, QY, QXY)
   CALL STAXY2 (QX, QY, QXY, N, DX, DY, KXY, RXY)
   CALL LINREG (SXR, SYR, QX, QY, QXY, BØYX, B1YX,
   *BØXY, B1XY)
   PRINT 3, RXY, BØYX, B1YX, BØXY, B1XY
 3 FORMAT (//5X, 'RXY = ', 2X, F5.2, 2X, 'BØYX = ', 2X,
   F5.2,*2X, 'B1YX = ', 2X, F5.2, 'B ØXY = ', 2X, F5.2,
   'B1XY = ', *2X, F5.2)
   STOP
   END
```

$\bar{x} = 0{,}85$, $\bar{y} = 0{,}23$, $s_x^2 = 1{,}805$, $s_{\tilde{y}}^2 = 7{,}19 \cdot 10^{-3}$, $r = -0{,}503$, $y = 0{,}26 - 0{,}032x$, $x = 2{,}68 - 7{,}97y$.

Los programas para los problemas 1.92—1.96 se distinguen por los primeros cuatro operadores.

1.92. $\bar{x} = 5{,}5$, $\bar{y} = 2{,}94$, $s_x^2 = 7{,}92$, $s_{\tilde{y}}^2 = 6{,}80$, $r = 0{,}964$, $y = -1{,}97 + 0{,}89x$, $x = 2{,}44 + 1{,}04y$. **1.93.** $\bar{x} = 0{,}475$, $\bar{y} = 39{,}3$,

$s_x^2 = 0{,}087$, $s_y^2 = 234{,}33$, $r = 0{,}981$, $y = 15{,}18 + 50{,}77x$, $x = -0{,}27 + 0{,}02y$. **1.94.** $\bar{x} = 8{,}5$, $\bar{y} = 0{,}79$, $s_x^2 = 28{,}5$, $s_y^2 = 0{,}32$, $r = 0{,}972$, $y = -0{,}11 + 0{,}1x$; $x = 1{,}48 + 9{,}13y$. **1.95.** $\bar{x} = 4{,}5$, $\bar{y} = 0{,}75$, $s_x^2 = 0{,}907$, $s_y^2 = 0{,}133$, $r = 0{,}932$, $y = -8{,}53 + 0{,}36x$, $x = 2{,}67 + 2{,}44y$. **1.96.** $\bar{x} = 0{,}85$, $\bar{y} = 2{,}07$, $s_x^2 = 0{,}23$, $s_y^2 = 1{,}64$, $r = 0{,}938$, $y = -7{,}67 + 2{,}52x$, $x = 0{,}29 + 0{,}35y$.

2.1. $P \mid X_1 = x_1, \ X_2 = x_2, \ \ldots, X_n = x_n \mid = Ap^{\sum x_i}(1-p)^{nk-\sum x_i}$, donde $A = \prod_{i=1}^{n} C_k^{x_i}$; los parámetros p y k. **2.2.** $P_1 \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots$ $\ldots, X_n = x_n \mid = K\lambda^{\sum x_i} e^{-n\lambda}$, donde $K = \dfrac{1}{x_1! x_2! \ldots x_n!}$; el parámetro λ.

2.3.

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}, & x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, n; \text{ el parámetro } \lambda. \\ 0 & x_i < 0, \end{cases}$$

2.4.

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n}, & x_i \in [a, b], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \\ 0, & x_i \notin [a, b], \quad \text{los parámetros } a \text{ y } b \end{cases}$$

2.5. 2,73; 169,64. **2.6.** −2,998; 1,645. **2.7.** 0,052; 9,025; 5,410. **2.8.** ● Utilizar lo que $T(k) = \dfrac{U}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}$, $U^2 = \chi^2(1)$ y $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\chi^2(k)}{k} = 1$.

2.12. $M[S_0^2] = \sigma^2$, $D[S_0^2] = 2\dfrac{\sigma^4}{n}$, $M[S^2] = \sigma^2$, $D[S^2] = 2\dfrac{\sigma^4}{n-1}$. **2.14.** ● Hacer uso de la transformación $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum [(x_i - m) - (\bar{x} - m)]^2 = \sum (x_i - m^2) - n(\bar{x} - m)^2$. Luego calcular la esperanza matemática S^2. **2.15.** $D[\tilde{\alpha}_l] = (\alpha_{2l} - \alpha_l^2)/n$. **2.16.** b) ● Si la población madre tiene la distribución normal, entonces $S_i^2 = \dfrac{\sigma^2}{n_i - 1}\chi^2 \times (n_i - 1)$ y, por consiguiente, $D[S_i^2] = \dfrac{2\sigma^4}{n_i - 1}$, $i = 1, 2$. **2.17.** El sesgo $\tilde{\theta}^2$ es igual a $D[\tilde{\theta}]$. ● Examinar la identidad $D[\tilde{\theta}] = M[(\tilde{\theta} - \tilde{\theta})^2]$. **2.19.** b) $p = \dfrac{1}{2}$. **2.21.** $\tilde{\sigma} = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum (x_i - m)^2}$. ● Utilizar la indicación para el problema 2.17. **2.22.** $\tilde{p} = \dfrac{x}{n}$. **2.23.** $\tilde{\lambda} = \dfrac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$.

2.24. $\tilde{m} = \dfrac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$. **2.25.** $\tilde{p} = \dfrac{\sum x_i}{\sum n_i}$; $D[\tilde{p}] = \dfrac{p(1-p)}{\sum n_i}$.

2.26. $\tilde{m}=\frac{2}{3}(\max_i x_i)$, $i=1, 2, \ldots, n$. 2.27. $\tilde{m}=\frac{\sum x_i/\sigma_i^2}{\sum 1/\sigma_i^2}$; $D[\tilde{m}]=$

$=\frac{1}{\sum 1/\sigma_i^2}$. 2.28. $\tilde{p}=1/k$, $M[\tilde{p}]=-\frac{p\ln p}{1-p}$. 2.29. $\tilde{p}=x/n$.

● La probabilidad de que el suceso A se produzca exactamente x veces durante n pruebas tiene la distribución de Pascal:

$$P[X-x]=C_{n-1}^{x-1}p^x(1-p)^{n-x}, \qquad n=x, x+1, \ldots$$

La estimacón $\tilde{p}=\frac{x-1}{n-1}$ es insesgada:

$$M\left[\frac{X-1}{n-1}\right]=\sum_{n=x}^{\infty}\frac{x-1}{n-1}C_{n-1}^{x-1}p^x(1-p)^{n-x}=$$

$$=p\sum_{n=x}^{\infty}C_{n-2}^{x-2}p^{x-1}(1-p)^{n-x};$$

para $l=x-1$ y $m=n-1$ tenemos $M\left[\frac{X-1}{n-1}\right]=p\sum_{m=l}^{\infty}C_{m-1}^{l-1}p^l(1-$

$-p)^{m-l}=p$, por consiguiente, la estimación VM $\tilde{p}=\frac{x}{n}$ es sesgada.

2.30. $\tilde{a}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$. La esperanza matemática $\tilde{a}$ por una sola observación no está definida. 2.31. $\tilde{p}=x/n$. 2.32. $\tilde{\lambda}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$.

2.33. $\tilde{m}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$, $\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_i-\bar{x})^2=s^2$. 2.34. $\tilde{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}$.

2.35. $\tilde{k}=\frac{1}{n}\sum x_i=\bar{x}$.

3.1. (18,35; 21,64), (17,42; 22,58). 3.2. (498,35; 501,64), (497,42; 502,58). 3.3. (28,14; 31,86), (26,64; 33,36). 3.4. (16,63; 19,37), (15,76; 20,24). 3.5. ● Hallar $D[\bar{X}]$ y determinar que $\frac{\bar{X}-m}{\sigma/\sqrt{n_1+n_2}}$ tiene la distribución $N(0, 1)$. Mostrar que $S^2=\frac{\sigma^2}{n_1+n_2-2}\chi^2(n_1+n_2-2)$ y que $\frac{X-m}{S/\sqrt{n_1+n_2}}$ tiene la distribución de Student con n_1+n_2-2 grados de libertad. 3.6. (17,96; 20,60), (17,22; 21,34). 3.7. (490,91; 493,48), (490,18; 494,21). 3.8. (28,52; 30,20), (27,98; 30,74). 3.9. (17,01; 19,41), (16,27; 20,16). 3.10. (2,70; 9,30), (2,45; 10,78).

3.11. (7.27, 119,40), (10,32; 58,61). **3.12.** (96,81; 491,34), (9,84; 22,17). **3.13.** a) 0,68; b) $n \geqslant 385$. **3.14.** a) 0,383; b) $n \geqslant 1537$. **3.15.** a) $n \geqslant 15$; b) $n \geqslant 4$. **3.17.** (5,18; 6,82). **3.18.** (—11,85; 5,85); no. **3.19.** a) (48,99; 63,41); b) (—15,1; 6,9), sí. **3.20.** (0,266; 0,454). **3.21.** (0,012; 0,038), $n \geqslant 88$. **3.22.** (0,39; 0,41), $n \geqslant 16231$. **3.23.** (0,093; 0,268), (0,088; 0,246). **3.24.** a) (0,09; 0,61); b) (0,07; 0,65). **3.25.** 0,45. No, puesto que la cota superior del intervalo confidencial es considerablemente mayor que 0,01. **3.26.** (0,0025; 0,44). **3.27.** a) (0,62; 8,75); b) (0,27; 2,56). **3.28.** 3,05; 0,45. **3.29.** (0,81; 5,83). **3.30.** (7,41; 12,18). **3.31.** (0,505; 0,810). **3.32.** (0,46; 0,86). **3.33.** (—0,93; 0,09), (—0,89; —0,12). **3.34.** (—0,01; 0,28), (—0,03; 0,25). **3.35.** (—0,14; 0,71); (—0,02; 0,65).

4.1. Las hipótesis $H^{(1)}$ — $H^{(3)}$ son estadísticas; la $H^{(4)}$ no es una hipótesis estadí stica. $H^{(1)}$ es una hipótesis simple, $H^{(2)}$ y $H^{(3)}$

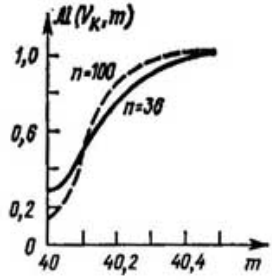


Fig. 204

m	$\mathcal{M}(V_k, m)$	
	$n = 36$	$n = 100$
40,0	0,274	0,159
40,1	0,5	0,5
40,2	0,726	0,841
40,3	0,885	0,977
40,4	0,964	0,998
40,5	0,992	1,000

son las nipótesis compuestas. **4.2.** Todas las hipótesis son estadísticas; $H^{(1)}$ y $H^{(4)}$ son simples, $H^{(2)}$ y $H^{(3)}$ son hipótesis compuestas. **4.3.** a) El número de muestras con vestigios de corrosión tiene la distribución binomial $B(20, p)$, $V = \{0, 1, 2, \ldots, 20\}$; b) $V_k = \{0\}$; c) el error de primer género: se toma la resolución de que el revestimiento anticorrosivo tiene la efectividad igual al 99%, mientras que su efectividad constituye el 90%; el error de segundo género: se toma la resolución de que el revestimiento anticorrosivo tiene la efectividad igual al 90%, mientras que su efectividad constituye el 99%; $\alpha \approx \approx 0{,}122$; $\beta \approx 0{,}182$. **4.4.** a) El error de primer género; b) el error de ségundo género; c) y d) no hay error. **4.5.** H_0: el objeto es un objeto enemigo; H_1: el objeto es un objeto amigo, o sea, la «alarma falsa». **4.6.** a) $V = \{0, 1, 2, \ldots, 5\}$, $V_k = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, la distribución binomial $B(5, p)$; b) H_0: el dispositivo funciona bien, $p = 0{,}99$; c) H_1: el dispositivo no funciona bien, $p = 0{,}40$, el error de segundo género consiste en la aceptación del dispositivo que funciona mal; d) $\alpha \approx 0{,}05$, $\beta \approx 0{,}01$. **4.7.** a) El número de artículos defectuosos, $V = \{0, 1, \ldots, 10\}$, $V_k = \{2, 3, \ldots, 10\}$; b) la distribución binomial $B(10, p)$; c) H_0: $p = 0{,}05$, es cierta la afirmación del proveedor, H_1: $p = 0{,}10$, es cierta la afirmación del comprador; d) el error de primer género: la partida ha sido aceptada según las condiciones del comprador, mientras que es cierta la afirmación del proveedor, el error de segundo género: la partida ha sido aceptada según las condiciones del proveedor, mientras que es cierta la afirmación del comprador, $\alpha \approx 0{,}086$, $\beta \approx 0{,}736$. **4.8.** Sí, $V_k = \{\bar{X} >$

$> 40{,}39\}$. **4.9.** (39,912; ∞). **4.10.** a) $\alpha \approx 0{,}274$, $\beta \approx 0{,}115$; b) los valores de la potencia del criterio para $n = 36$ y $n = 100$ se dan en la tabla respectiva y las curvas de la función de potencia están representadas en la fig. 204. **4.11.** a) $\alpha = 0{,}548$, $\beta = 0{,}107$; b) ● La función de potencia del criterio es simétrica respecto al valor $m=40$, los valores de la potencia del criterio para $n = 36$ y $n = 100$ se dan en la tabla; las curvas de la función de potencia están representadas en la fig. 205.

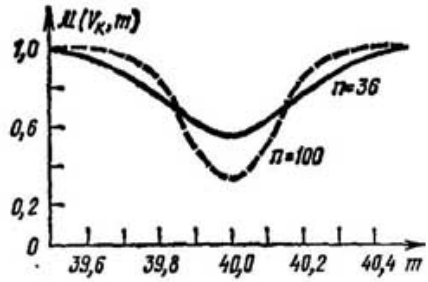


Fig. 205

m	$\mathcal{M}(V_k, m)$	
	$n = 36$	$n = 100$
40,0	0,548	0,318
40,1	0,615	0,523
40,2	0,762	0,842
40,3	0,893	0,977
40,4	0,965	0,999
40,5	0,992	1,000

4.12. $\alpha = 0{,}069$, $\beta = 0{,}910$, véase la fig. 204. **4.13.** $n = 73$, $V_k = \{\bar{X} > 40{,}15\}$. **4.14.** a) Sí; b) no. **4.15.** a) No; b) no. **4.16.** a) $1 - \beta \approx 0{,}89$, $n \geqslant 27$; b) $1 - \beta \approx 0{,}57$, $n \geqslant 53$. **4.17.** a) y b) La hipótesis se acepta. **4.18.** a) los valores de la potencia del criterio se dan en la tabla, las curvas de la función de potencia están representadas en la fig. 206, $\beta = 0{,}94$; b) véanse la tabla y la fig. 206, $\beta = 0{,}74$.

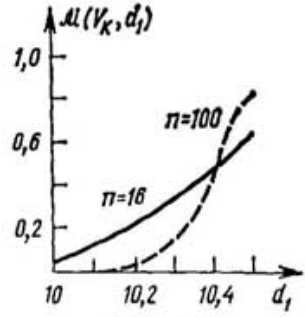


Fig. 206

d_1	$\mathcal{M}(V_k, d_1)$	
	$n = 100$	$n = 16$
10,0	0	0,05
10,1	0,001	0,107
10,2	0,017	0,201
10,3	0,134	0,330
10,4	0,461	0,484
10,5	0,816	0,631

4.19. La hipótesis se rechaza; b) la hipótesis se acepta. **4.20.** a) (8,647; 9,953), la hipótesis se rechaza; b) (8,454; 10,146), la hipótesis se acepta. **4.21.** $1 - \beta = 0{,}323$, $n > 294$. **4.22.** Los valores de la potencia del criterio se dan en la tabla, las curvas de la función de potencia están representadas en la fig. 207. ● La función de potencia es simétrica respecto al punto $m = 10$. **4.23.** a) No; b) no. **4.24.** a) $\beta = 0{,}198$; b) $\beta = 0{,}112$. **4.25.** Sí. **4.26.** (0, 1; ∞), sí **4.27.** La hipótesis se acepta. **4.28** (−1,11; 171),

la hipótesis se acepta. **4.29.** ◀ Los intervalos confidenciales para m_1 y m_2 serán $\bar{x}_1 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ y $\bar{x}_2 \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Estos intervalos son disjuntos si

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} + \frac{1}{\sqrt{n_2}}\right). \quad (*)$$

El dominio crítico (*) tiene un tamaño menor que el dominio crítico

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}, \quad (**)$$

puesto que

$$\frac{1}{\sqrt{n_1}} + \frac{1}{\sqrt{n_2}} > \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}. \blacktriangleright$$

4.30. a) No; b) sí. **4.31.** No. **4.32.** a) La hipótesis se rechaza; b) (0,132; 0,347). **4.33.** a) La hipótesis se acepta; b) la hipótesis se rechaza.

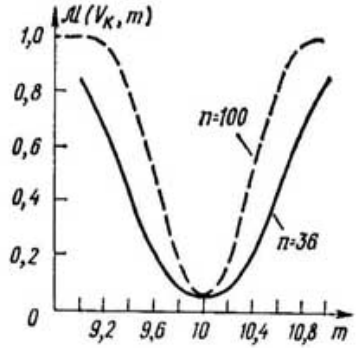


Fig. 207

m	$\mathcal{M}(V_k, m)$	
	$n = 36$	$n = 100$
9,0	0,851	0,999
9,1	0,770	0,994
9,2	0,670	0,979
9,3	0,556	0,938
9,4	0,440	0,851
9,5	0,323	0,705
9,6	0,225	0,516
9,7	0,147	0,323
9,8	0,092	0,171
9,9	0,061	0,079
10,0	0,050	0,050

4.34. No. **4.35.** a) La hipótesis se acepta; b) la hipótesis se rechaza; **4.36.** a) La hipótesis se acepta; b) la hipótesis se rechaza. **4.37.** a) La hipótesis se acepta; b) la hipótesis se rechaza. **4.38.** No. **4.39.** Sí. **4.40.** Sí. **4.41.** No. **4.42.** La hipótesis se acepta. **4.43.** a) y b) La hipótesis se acepta. **4.44.** No. **4.45.** a) No; b) sí. **4.46.** a) $\alpha \approx 0{,}159$; b) $\beta \approx 0{,}159$. **4.47.** No. ● Puesto que $nh = 2$, no puede utilizarse la aproximación normal. Para construir el intervalo confidencial para p es necesario hacer uso de las fórmulas (5) y (6), el § 3. **4.48.** Sí. ● Véase la indicación para el problema 4.47. **4.49.** No. **4.50.** No. **4.51.** Sí. **4.52.** Sí. **4.53.** a) y b) No es significativo. **4.54.** a) Es significativo; b) no es significativo; c) es significativo. **4.55.** a) No; b) sí; c) no. **4.56.** a) No; b) (0,207; 0,91). **4.57.** a) Sí; b) (—0,91;

$-0{,}814$). **4.58.** a) No; b) (0,119; 0,653). **4.59.** a) No; b) (0,858; 1). **4.60.** $V_k = (-\infty, -1) \cup (-x_k, x_k) \cup (1, \infty)$, donde $x_k = 0{,}05$; $1 - \beta = 0{,}126$. ● Construir en el mismo gráfico las densidades de la distribución $f(x)$ y de la normal $N(0, 1)$. **4.61.** $V_k = (-1, -x_k) \cup (x_k, 1)$ donde $x_k \approx 0{,}83$; $1 - \beta \approx 0{,}17$. **4.62.** $V_k = (0; 0{,}1)$; $\mathcal{M}(V_k, \theta) = 1 - e^{-0{,}1\theta}$, $\mathcal{M}(V_k, 2) = 0{,}18$. **4.63.** a) $V_k = \{\bar{x} > a_\alpha\}$; b) $V_k = \{\bar{x} < b_\alpha\}$, donde a_α y b_α son las constantes que dependen del nivel de significación α. **4.64.** Para $p_0 < p_1$ tenemos $V_k = \{x > a_\alpha\}$; para $p_0 > p_1$ tenemos $V_k = \{x < b_\alpha\}$, donde a_α y b_α son las constantes que dependen del nivel de significación α y x es el valor observado de X. **4.65.** Para $\sigma_0^2 > \sigma_1^2$ tenemos $V_k = \{\sum x_i^2 < b_\alpha\}$; para $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$ tenemos $V_k = \{\sum x_i^2 > a_\alpha\}$. **4.66.** $n \geqslant 9$. **4.67.** a) Sí; b) no. **4.68.** b) $|\bar{x}| > \bar{x}_k$.

5.1. $F_m = 0{,}115$, H_0 se acepta, $\bar{x} = 8{,}42$, $s^2 = 13{,}32$. **5.2.** $F_m = 17{,}94$, H_0 se rechaza, $m_1 \neq m_2$, $m_1 \neq m_3$, $m_2 = m_3$. **5.3.** $F_m = 3{,}89$, H_0 se acepta, $\bar{x} = 13{,}25$, $s^2 = 3{,}67$. **5.4.** $F_m = 2{,}86$, H_0 se acepta, $\bar{x} = 22{,}08$, $s^2 = 33{,}23$. **5.5.** $F_m = 47{,}07$, H_0 se rechaza, $m_1 \neq m_4$, $m_1 \neq m_5$, $m_2 \neq m_5$. **5.6.** $F_m = 8{,}36$, H_0 se rechaza, $m_1 \neq m_2$, $m_1 = m_3$, $m_2 = m_3$. **5.7.** $F_m \approx 0$, H_0 se acepta, $\bar{x} = 3{,}25$, $s^2 = 0{,}07$. **5.8.** $F_m = 1114{,}4$, H_0 se rechaza, $m_1 \neq m_2$, $m_1 \neq m_3$, $m_2 \neq m_3$. **5.9.** ● Ambos miembros de la identidad $(X_{ik} - \bar{X}) = (\bar{X}_k - \bar{X}) + (X_{ik} - \bar{X}_k)$ es necesario elevarlos al cuadrado y sumar respecto a i y respecto a k; mostrar que $\sum (\bar{X}_k - \bar{X})(X_{ik} - \bar{X}_k) = 0$.

```
      5.11. SUBROUTINE DISPAN (L, N, Q, Q1, Q2, FB)
      COMMON X (2000)
      DATA A/0./, B/0./, C/0./, S1/0./, S2/0./
      N = 0
      DO 4 J = 1, L
      READ (1, 2) NK, (X(I), I = 1, NK)
    2 FORMAT (15/KFw.d)
      N = N + NK
      DO 3 I = 1, NK
      S1 = S1 + X(I)
    3 S2 = S2 + X(I)**2
      A = A + S2
      S1 = S1**2
      B = B + S1/NK
      C = C + S1
    4 CONTINUE
      C = C**2
      C = C/N
      Q = A - C
      Q1 = B - C
      Q2 = A - B
      FB = Q1*(N - L)/(Q2*(L - 1))
      RETURN
      END
```

Si el subprograma se utiliza directamente, es necesario poner en el operador FORMAT los valores numéricos respectivos de K, w, d.

5.12. La respuesta se da para el problema 5.7.

```
      COMMON X (2000)
      CALL DISPAN (3, N, Q, Q1, Q2, FB)
      PRINT 3, Q, Q1, Q2, FB
    3 FORMAT (1X, 'Q = ', F5.2, 'Q1 = ', F5.2, 'Q2 = ',
     *F5.2, 'FB = ', F5.2)
      STOP
      END
```

Las respuestas para otros problemas se distinguen por la forma del operador FORMAT en el subprograma indicado, así como por el valor del parámetro L, o sea, el número de muestras.

● El operador FORMAT en el subprograma DISPAN en el problema dado tiene la forma

```
FORMAT (15/16F2.1).
```

6.1. Sí. ◀ Verifiquemos la hipótesis H_0 consistente en que el número de apariciones del escudo tiene la distribución binomial con el parámetro $p = \frac{1}{2}$:

$$\chi^2_m = \frac{(20-25)^2}{25} + \frac{(30-25)^2}{25} = 2;\ r-l-1 = 2-0-1 = 1.$$

Puesto que $\chi^2_{0,90}(1) = 2{,}706$, la hipótesis H_0 se acepta. ▶ **6.2.** No. **6.4.** Sí. **6.5.** No. **6.6.** Sí. **6.7.** Sí. **6.8.** H_0 se rechaza; $\chi^2_m \approx 12{,}95$ (los últimos 6 intervalos se reúnen). **6.9.** Sí; $\chi^2_m \approx 1{,}171$. **6.10.** H_0 se acepta; $\chi^2_m \approx 0{,}71$ (los últimos 5 intervalos se reúnen). **6.11.** H_0 se rechaza; $\chi^2_m \approx 4{,}9$ (los últimos 2 intervalos se reúnen). **6.12.** H_0 se acepta; $\chi^2_m \approx 7{,}03$ (los primeros 2 y los últimos 3 intervalos se reúnen). **6.13.** H_0 se acepta; $\chi^2_m \approx 3{,}26$ (los primeros 2 y los últimos 2 intervalos se reúnen). **6.14.** H_0 se acepta; $\chi^2_m \approx 0{,}476$. **6.15.** H_0 se rechaza; $\chi^2_m \approx 6{,}22$ (los primeros 2 y los últimos intervalos se reúnen). **6.16.** H_0 se acepta; $\chi^2_m \approx 0{,}517$ (los primeros 3 y los últimos 3 intervalos se reúnen). **6.17.** No depende; $\chi^2_m \approx 0{,}73$. **6.18.** No; $\chi^2_m \approx 4{,}78$. **6.19.** No; $\chi^2_m \approx 13{,}27$. **6.20.** Sí; $\chi^2_m \approx 44{,}2$. **6.21.** Sí; $\chi^2_m \approx 36$. **6.22.** No; $\chi^2_m \approx 0{,}51$. **6.23.** La hipótesis se acepta; $\chi^2_m \approx 0{,}61$. **6.24.** No; $\chi^2_m \approx 0{,}17$. **6.25.** Sí; $\chi^2_m \approx 27{,}14$. **6.26.** Sí; $\chi^2_m \approx 38{,}57$.

7.1. $y = 3{,}995 - 2{,}163x + 0{,}268x^2$. **7.2.** $y = 1{,}40 - 1{,}23x + 0{,}87x^2$. **7.3.** $y = 0{,}14 + 0{,}088x + 0{,}002x^2$. **7.4.** $y = -1{,}93 - 0{,}28x + 1{,}54x^2$. **7.5.** $y = 2 + 12/x$. **7.6.** $y = 4{,}69 + 15{,}97/x$. **7.7.** $y = 11{,}92 + 4{,}39/x$. **7.8.** No. ● El modelo debe ser transformado así: $y = \frac{1}{\beta_1}x - \frac{\beta_0}{\beta_1}$. **7.9.** $\tilde{\beta}_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x}$. **7.10.** $\tilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - \beta_0 \sum x}{\sum x_i^2}$.

7.11. $A=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$.

7.12. $A=\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen}\omega x_1 & \cos\omega x_1 \\ 1 & \operatorname{sen}\omega x_2 & \cos\omega x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \operatorname{sen}\omega x_n & \cos\omega x_n \end{pmatrix}$.

7.13. $A=\begin{pmatrix} 1 & e^{x_1} \\ 1 & e^{x_2} \\ \cdot & \cdot \\ 1 & e^{x_n} \end{pmatrix}$.

7.15. $s_\varepsilon^2=2{,}3996$, $K=\begin{pmatrix} 1{,}166 & 0 & -0{,}343 \\ 0 & 0{,}24 & 0 \\ -0{,}343 & 0 & 0{,}171 \end{pmatrix}$.

7.16. $y=-1{,}48+2{,}45x+0{,}64x^2$, $s_\varepsilon^2=6{,}77$.

$K=\begin{pmatrix} 2{,}25 & 0 & -0{,}33 \\ 0 & 0{,}24 & 0 \\ -0{,}33 & 0 & 0{,}08 \end{pmatrix}$. 7.17. a) $y=-1{,}33+1{,}07x+1{,}12x^2$; b) $s_\varepsilon^2=0{,}384$, $K=\begin{pmatrix} 0{,}128 & 0 & -0{,}018 \\ 0 & 0{,}014 & 0 \\ -0{,}018 & 0 & 0{,}005 \end{pmatrix}$; c) $\beta_0\in(-2{,}095;$ $-0{,}57)$, $\beta_1\in(0{,}82;\ 1{,}32)$, $\beta_2\in(1{,}01;\ 1{,}22)$, $\sigma_\varepsilon^2\in(0{,}162;\ 2{,}163)$. 7.18. a) $y=2{,}49+1{,}8x+0{,}86x^2$; b) $s^2=1{,}935$, $K=$ $=\begin{pmatrix} 0{,}94 & 0 & -0{,}28 \\ 0 & 0{,}193 & 0, \\ -0{,}28 & 0 & 0{,}138 \end{pmatrix}$; c) $\beta_0\in(-1{,}68;\ 6{,}66)$, $\beta_1\in(-0{,}09;$ $3{,}69)$, $\beta_2\in(-0{,}76;\ 2{,}45)$, $\sigma_\varepsilon^2\in(0{,}524;\ 76{,}48)$. 7.19. a) $y=-0{,}48+$ $+1{,}11x-0{,}27x^2$; b) $s_\varepsilon^2=0{,}27$, $K=10^{-2}\cdot\begin{pmatrix} 9{,}1 & 0 & -1{,}3 \\ 0, & 0{,}99 & 0 \\ -1{,}3 & 0 & 0{,}33 \end{pmatrix}$. c) $\beta_0\in(-0{,}81;\ -0{,}14)$, $\beta_1\in(1{,}00;\ 1{,}22)$, $\beta_2\in(-0{,}34;\ -0{,}21)$, $\sigma_\varepsilon^2\in$ $\in(0{,}12;\ 1{,}54)$. 7.20. $\bar{\theta}=\frac{1}{n}\sum\theta_i=\bar{\theta}$; $s_{\bar{\theta}}^2=\frac{1}{n-1}\sum(\theta_i-\bar{\theta})^2$. Coincide con la estimación (13). 7.21. ◀ Puesto que $Y^\top A\tilde{\beta}$ es un escalar,

tenemos

$$Q_e=(Y-A\tilde{\beta})^{\top}(Y-A\tilde{\beta})=Y^{\top}Y-\tilde{\beta}^{\top}-A^{\top}Y+$$

$$+\tilde{\beta}^{\top}(A^{\top}A\tilde{\beta}-A^{\top}Y),$$

donde la diferencia entre paréntesis es igual a cero, ya que $\tilde{\beta}$ es la solución del sistema $(A^{\top}A)\beta=A^{\top}Y$. ▶ **7.22.** ● Representar el vector de observaciones en la fórmula (6) así: $Y=A\beta+\varepsilon$, donde $\varepsilon=$ $=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \dots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix}$ es el vector de los errores de las observaciones; luego hallar la esperanza matemática $M[\tilde{\beta}]$. **7.23.** ● Aplicar el método de verosimilitud máxima para calcular las estimaciones β_j, $j=0, 1, \dots, k-1$, basándose en la muestra de variables aleatorias ε_i:

$$\varepsilon_i=y_i-f(x_i, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

7.25. $y=12{,}37-0{,}44x$, $\beta_0\in(6{,}08;\ 18{,}66)$, $\beta_1\in(-1{,}15;\ 0{,}27)$; $y_0:\tilde{y}_0\pm$ $\pm 9{,}9\cdot\sqrt{0{,}09+5{,}11\cdot10^{-3}(x_0-7{,}82)^2}$, no concuerda, $r\approx-0{,}434$. **7.26.** $y=20{,}30-1{,}06x$, $\beta_0\in(18{,}99;\ 21{,}60)$, $\beta\in(-1{,}21;\ -0{,}90)$, $y_0:\tilde{y}_0\pm1{,}79\cdot\sqrt{0{,}11+7{,}62\cdot10^{-3}(x_0-9{,}03)^2}$, concuerda, $r\approx-0{,}979$. **7.27.** $y=-1{,}49+2{,}03x$, $\beta_0\in(-5{,}78;\ 2{,}80)$, $\beta_1\in(1{,}78;\ 2{,}28)$, $y_0:\tilde{y}_0\pm$ $\pm 3{,}65\cdot\sqrt{0{,}11+4{,}7\cdot10^{-3}(x_0-16{,}43)^2}$, concuerda, $r\approx0{,}986$. **7.28.** $y=$ $=-5{,}78+1{,}66x$, $\beta_0\in(-8{,}75;\ -2{,}81)$, $\beta_1\in(1{,}37;\ 1{,}95)$, $y_0:\tilde{y}_0\pm$ $\pm 5{,}86\cdot\sqrt{0{,}06+2{,}14\cdot10^{-3}(x_0-9)^2}$, concuerda, $r\approx0{,}953$. **7.29.** $\frac{\sigma_\varepsilon^2}{nQ_x}\times$ $\times\begin{pmatrix}\sum x_i^2 & -\sum x_i\\ -\sum x_i & n\end{pmatrix}$. ● La matriz de covarianza es igual a $\sigma_\varepsilon^2\times$ $\times(A^{\top}A)^{-1}$, donde $A^{\top}A$ es la matriz del sistema normal. **7.30.** La distribución normal

$$N\left(\beta_0,\ \sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2\sum x_i^2}{nQ_x}}\right) \text{ y } N\left(\beta_1,\sqrt{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{Q_x}}\right).$$ **7.32.** $M[Y_0]=$ $=\beta_0+\beta_1x_0$, $D[Y_0]=\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{Q_x}\right)$, $N(M[Y_0],\ \sqrt{D[Y_0]})$. ● $D[Y_0]=D[\tilde{\beta}_0]+x_0^2D[\tilde{\beta}_1]+2x_0k_{\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1}$, sustituir en esta expresión los valores de $D[\tilde{\beta}_0]$, $D[\tilde{\beta}_1]$ y $k_{\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1}$ y simplificarla, utilizando la relación $\sum x_i^2=Q_x+n\bar{x}^2$ (aquí $k_{\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1}$ es la covarianza de

$\tilde{\beta}_0$ y $\tilde{\beta}_1$). 7.35. ◀ Utilizando (12) y el hecho de que $A^TY = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$ y $\tilde{\beta}_0 = \bar{x} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}$, tenemos

$$Q_e = \sum y_i^2 - (\bar{y} - \tilde{\beta}_1 \bar{x}) \left(\sum y_i\right) - \tilde{\beta}_1 \left(\sum x_i y_i\right) =$$

$$= \sum y_i^2 - \bar{y} \sum y_i + \tilde{\beta}_1 \left[\bar{x} \left(\sum y_i\right) - \sum x_i y_i\right] = Q_x - \beta_1 Q_{xy}. \blacktriangleright$$

7.36.

```
      SUBROUTINE TRANSP (A, M, N, AT)
      DIMENSION A(1), AT(1)
      DO 2 I = 1, M
      DO 2 J = 1, N
      LA = (I - 1)*N + J
      LR = (J - 1)*M + I
    2 AT(LR) = A(LA)
      RETURN
      END
```

● Los elementos de la matriz están alojados en la memoria del ordenador por filas.

7.37.

```
      SUBROUTINE INV (A, N)
      DIMENSION A (N, N)
      DO 7 K = 1, N
      A(K, K) = -1./A(K, K)
      DO 4 I = 1, N
      IF(I - K) 3, 4, 3
    3 A(I, K) = -A(I, K)*A(K, K)
    4 CONTINUE
      DO 6 I = 1, N
      DO 6 J = 1, N
      IF((I - K)*(J - K))5, 6, 5
    5 A(I, J) = A(I, J) - A(I, K)*A(K, J)
    6 CONTINUE
      DO 7 J = 1, N
      IF(J - K) 8, 7, 8
    8 A(K, J) = -A(K, J)*A(K, K)
    7 CONTINUE
      DO 10 I = 1, N
      DO 10 J = 1, N
   10 A(I, J) = -A(I, J)
      RETURN
      END
```

7.38.

a)

```
      SUBROUTINE MTYMN (A, B, M, L, N, AB)
      DIMENSION A(1), B(1), AB(1)
      DO 2 I = 1, M
      DO 2 J = 1, N
```

```
      LR = (I - 1)*N + J
      AB(LR) = 0.
      DO 1 I1 = 1, L
      LA = (I - 1)*L + I1
      LB = (I1 - 1)*N + J
    1 AB(LR) = AB(LR) + A(LA)*B(LB)
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

b)
```
      SUBROUTINE TRYMN (A, B, M, L, N, ATB)
      DIMENSION A(1), B(1), ATB(1)
      DO 2 I = 1, M
      DO 2 J = 1, N
      LR = (I - 1)*N + J
      ATB(LR) = 0
      DO 1 I1 = 1, L
      LA = (I1 - 1)*M + I
      LB = (I1 - )1*N + J
    1 ATB (LR) = ATB(LR) + A(LA)*B(LB)
    2 CONTINUE
      RETURN
      END
```

El subprograma calcula el producto de la matriz transpuesta A^T de la dimensión $M \times L$ por la matriz B de la dimensión $L \times N$, el resultado es la matriz ATB de la dimensión $M \times N$.

7.39.

```
      SUBROUTINE FORM (N, K, B, A, X, F)
      DIMENSION X(N), A(N, K), B(N, K)
      DO 2 J = 1, K
      J1 = J - 1
      DO 2 I = 1, N
    2 B(I, J) = F(X(I), J1)
      I1 = 1
      J1 = 1
      DO 3I = 1, N
      DO 3J = 1, K
      A(I1, J1)=B(I, J)
      I1 = I1 + 1
      IF(I1.LE.N) GO TO 3
      J1 = J1 + 1
      I1 = 1
    3 CONTINUE
      RETURN
      END
```

F es el parámetro formal, el parámetro real correspondiente debe ser el nombre del subprograma función que calcula $\varphi_i(x)$.

7.40.

```
      SUBROUTINE MNK (A, B, M, L, N, ATB, AT, AB, Y, BET)
      DIMENSION A(1), B(1), Y(1), BET(1), ATB(M, M),
```

```
     * AT(1), AB(1)
       CALL TRYMN (A, B, M, L, N, ATB)
       CALL INV (ATB, M)
       CALL TRANSP (A, L, M, AT)
       CALL MTYMN (ATB, AT, M, M, L, AB)
       CALL ATYMN (AB, Y, M, L, 1, BET)
       RETURN
       END
```

7.41.

```
       SUBROUTINE EVDISP (A, Y, BET, ATB1, ATB2,
     * M, L, QL, EVD)
       DIMENSION A(1), Y(1), BET(1), ATB(1), ATB2(1)
       CALL TRYMN (Y, Y, 1, L, 1, ATB1)
       S = ATB1(1)
       CALL TRYMN (A, Y, M, L, 1, ATB1)
       CALL TRYMN (BET, ATB1, 1, M, 1, ATB2)
       QL = S — ATB2(1)
       EVD = QL/(L — M)
       RETURN
       END
```

7.42.

```
       SUBROUTINE MTRCOV (ATB, COV, EVD, M, N)
       DIMENSION ATB (M, M), COV (M, M)
       CALL MTYMSC (ATB, COV, EVD, M, M)
       RETURN
       END
```

El programa MTYMSC calcula el producto de la matriz A de la dimensión M × N por el escalar S, coloca el resultado en R y tiene la forma

```
       SUBROUTINE MTYMSC (A, R, S, M, N)
       DIMENSION A(1), R(1)
       NS = M*N
       DO 2 I = 1, NS
     2 R(I) = S*A(I)
       RETURN
       END
```

7.43. Subprogramas para resolver los problemas 7.43—7.52:

```
       EXTERNAL F1
       DIMENSION COV (3, 3)
       DIMENSION A(16, 3), AT(3, 16), X(16), Y(16),
       BET(3), ATB(3, 3), AB(3, 16)
       DIMENSION B(16, 3), ATB1(3), ATB2(3)
       N = 16
```

```
      K = 3
      DO 1 I = 1, 16
    1 X(I) = I*.5
      READ 3, (Y(I), I = 1, N)
    3 FORMAT (16F3.1)
      PRINT 10, (Y(I), I = 1, N)
   10 FORMAT (12F7.3)
      CALL FORM (N, K, B, A, X, F1)
      CALL MNK (A, A, N, K, ATB, AT, AB, Y, BET)
    6 FORMAT (5X, 'BETA = ')
      PRINT 6
      PRINT 2, BET
    2 FORMAT (//5X, 3(2X, F7.3))
      CALL EVDISP (A, Y, BET, ATB1, ATB2, N, K, QL, EVD)
      PRINT 78, EVD
   78 FORMAT (//10X, 'EVD = ', E12.5)
      CALL MTRCOV (ATB, COV, EVD, K, K)
   15 FORMAT (//10X, 3E12.5)
      PRINT 15, ((COV (I, J), J = 1, K), I = 1, K)
      STOP
      END
      Aquí:
      FUNCTION F1(X, K)
      F1 = X**K
      RETURN
      END
```

$\widetilde{\beta}_0 = 0{,}265$, $\widetilde{\beta}_1 = -0{,}173$, $\widetilde{\beta}_2 = 0{,}396$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2 = 4{,}357 \cdot 10^{-2}$,

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 0{,}31821 \cdot 10^{-1} & -0{,}15405 \cdot 10^{-1} & 0{,}15560 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}15405 \cdot 10^{-1} & 0{,}93302 \cdot 10^{-2} & -0{,}10374 \cdot 10^{-2} \\ 0{,}15560 \cdot 10^{-2} & -0{,}10374 \cdot 10^{-2} & 0{,}12204 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

7.44. $\widetilde{\beta}_0 = 1{,}128$, $\widetilde{\beta}_1 = -0{,}869$, $\widetilde{\beta}_2 = 1{,}019$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2 = 0{,}11663$,

$$\sim = \begin{pmatrix} 0{,}7889 \cdot 10^{-1} & -0{,}45021 \cdot 10^{-1} & 0{,}53597 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}45021 \cdot 10^{-1} & 0{,}32252 \cdot 10^{-1} & -0{,}42314 \cdot 10^{-2} \\ 0{,}53597 \cdot 10^{-2} & -0{,}42314 \cdot 10^{-2} & 0{,}58769 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

7.45. $\widetilde{\beta}_0 = 16{,}887$, $\widetilde{\beta}_1 = 9{,}791$, $\widetilde{\beta}_2 = -6{,}904$ $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2 = 0{,}13511 \cdot 10^3$,

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 0{,}74784 \cdot 10^2 & -0{,}29155 \cdot 10^3 & 0{,}23703 \cdot 10^3 \\ -0{,}29155 \cdot 10^3 & 0{,}14388 \cdot 10^4 & -0{,}12929 \cdot 10^4 \\ 0{,}23703 \cdot 10^3 & -0{,}12929 \cdot 10^4 & 0{,}12313 \cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

7.46. $\widetilde{\beta}_0 = 0{,}226$, $\widetilde{\beta}_1 = 0{,}106$, $\widetilde{\beta}_2 = 0{,}100$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2 = 0{,}14252 \cdot 10^{-1}$,

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 0{,}83979 \cdot 10^{-2} & -0{,}34415 \cdot 10^{-2} & 0{,}29414 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}34415 \cdot 10^{-2} & 0{,}17808 \cdot 10^{-2} & -0{,}16808 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}29414 \cdot 10^{-3} & -0{,}16808 \cdot 10^{-3} & 0{,}16808 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

7.47. $\widetilde{\beta}_0=2{,}209$, $\widetilde{\beta}_1=0{,}350$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}44583$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}49234 & -0{,}24866\\ -0{,}24866 & 0{,}13685\end{pmatrix}.$$

7.48. $\widetilde{\beta}_0=4{,}973$, $\widetilde{\beta}_1=0{,}466$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}14038\cdot10^{-2}$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}16415\cdot10^{-3} & -0{,}10729\cdot10^{-3}\\ -0{,}10729\cdot10^{-3} & 0{,}18020\cdot10^{-3}\end{pmatrix}.$$

7.49. $\widetilde{\beta}_0=-0{,}863$, $\widetilde{\beta}_1=0{,}913$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}52277\cdot10^{-2}$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}41818\cdot10^{-3} & -0{,}18439\cdot10^{-2}\\ -0{,}18439\cdot10^{-2} & -0{,}90754\cdot10^{-3}\end{pmatrix}.$$

7.50. $\widetilde{\beta}_0=3{,}018$, $\widetilde{\beta}_1=0{,}992$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}84339\cdot10^{-3}$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}19319\cdot10^{-2} & -0{,}12299\cdot10^{-2}\\ -0{,}12299\cdot10^{-2} & 0{,}81017\cdot10^{-3}\end{pmatrix}.$$

7.51. $\widetilde{\beta}_0=2{,}217$, $\widetilde{\beta}_1=0{,}836$, $\widetilde{\beta}_2=-0{,}450$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}75299$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}63048\cdot10^{-1} & 0{,}68163\cdot10^{-3} & 0{,}62628\cdot10^{-2}\\ 0{,}68163\cdot10^{-3} & 0{,}11984 & -0{,}13818\cdot10^{-2}\\ 0{,}62628\cdot10^{-2} & 0{,}13818\cdot10^{-2} & 0{,}13238\end{pmatrix}.$$

7.52. $\widetilde{\beta}_0=2{,}960$, $\widetilde{\beta}_1=-0{,}047$, $\widetilde{\beta}_2=0{,}969$, $\widetilde{\sigma}_\varepsilon^2=0{,}13599\cdot10^{-1}$,

$$\widetilde{K}=\begin{pmatrix}0{,}10483\cdot10^{-2} & -0{,}68179\cdot10^{-4} & 0{,}29972\cdot10^{-6}\\ -0{,}68179\cdot10^{-4} & 0{,}20267\cdot10^{-2} & 0{,}61506\cdot10^{-6}\\ 0{,}29972\cdot10^{-6} & 0{,}61506\cdot10^{-6} & 0{,}21669\cdot10^{-2}\end{pmatrix}.$$

7.53. $y_i=23{,}3+2{,}59P_1(i)$. 7.54. $y_i=0{,}455+0{,}081P_1(i)$.

7.55. $y_i=23{,}662+2{,}984P_1(i)+0{,}317P_2(i)+0{,}087P_3(i)$.

7.56. $\mathrm{D}[\widetilde{\beta}_j]=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_j^2(x_i)}$, $j=0,1,\ldots,k-1$, donde σ_ε^2 es la varianza de los errores de observaciones. 7.58. $\widetilde{\alpha}_0=\bar{y}$, $\widetilde{\alpha}_j=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}y_k\times$

$\times\cos jx_k$, $\widetilde{\beta}_j=\dfrac{2}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}y_k\operatorname{sen}jx_k$, $\mathrm{D}[\widetilde{\alpha}_0]=\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{n}$, $\mathrm{D}[\widetilde{\alpha}_j]=\mathrm{D}[\widetilde{\beta}_j]=\dfrac{2}{n}\times$

$\times\sigma_\varepsilon^2$, $s_\varepsilon^2=\dfrac{Q_e}{n-2m-1}$, donde $Q_e=\sum\limits_{k=0}^{n-1}y_k^2-n\widetilde{\alpha}_0^2-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}(\widetilde{\alpha}_j^2+\widetilde{\beta}_j^2)$.

● $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 jx_k = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}^2 jx_k = \frac{n}{2}$, para determinar Q_e y s_ε^2.

utilícense las fórmulas (12) y (13). **7.59.** $\widetilde{\alpha}_0 = 3{,}156$, $\widetilde{\alpha}_1 = 0{,}802$, $\widetilde{\beta}_1 = 0{,}765$, $s_\varepsilon^2 = 0{,}565$. **7.60.** $\widetilde{\alpha}_0 = 0{,}044$, $\widetilde{\alpha}_1 = 0{,}911$, $\widetilde{\beta}_1 = 1{,}85$, $s_\varepsilon^2 = 5{,}457$. **7.61.** a) Concuerda, $s_p^2 = 0{,}0867$; b) no. **7.62.** a) Concuerda, $s_p^2 = 0{,}65$; b) sí, $y = 0{,}906 + 0{,}932x$, $Q_e = 17{,}3$. **7.63.** a) No concuerda, $s_p^2 = 6{,}428 \cdot 10^{-3}$; b) no. **7.65.** $z = \beta_0 - \beta_1 x$, donde $z = \ln y$. **7.66.** $w = \beta_0 + \theta z$, donde $w = 1/y$, $z = 1/x$, $\theta = 1/\beta_1$. **7.67.** El modelo es lineal. **7.68.** $y = \theta_0 + \beta_1 \operatorname{sen} x$, donde $\theta_0 = \operatorname{sen} \beta_0$. **7.69.** $w = \theta_0 + \beta_1 \ln x$, donde $w = \ln y$, $\theta_0 = \ln \beta_0$. **7.70.** $w = \beta_0 + \beta_1 x$, donde $w = \frac{x}{y}$. **7.71.** $\widetilde{p}_0 = 3053{,}365$, $k/\widetilde{T} = 0{,}0015$.

7.72. $\widetilde{\beta} = 1{,}73$, $\widetilde{\alpha} = -1{,}066$. **7.73.** $\widetilde{a} = 4480{,}4$, $\widetilde{b} = 3{,}304$. **7.74.** $\widetilde{A} = 2$, $\widetilde{\gamma} = 2{,}6$. **7.75.** $\widetilde{\beta}_0 = 0{,}01$, $\widetilde{\beta}_1 = 5{,}7 \cdot 10^{-3}$. **7.76.** a) $y = 1{,}8 + 1{,}07x_1 + 0{,}59x_2$, $\beta_1 \in (0{,}51;\ 1{,}64)$, $\beta_2 \in (0{,}18;\ 1{,}0)$; b) y c) las hipótesis se rechazan; d) $R \approx 0{,}815$. **7.77.** a) $y = 2{,}75 - 1{,}42x_1 - 0{,}26x_2$, $\beta_1 \in (-4{,}07;\ 1{,}232)$, $\beta_2 \in (-1{,}534;\ 1{,}012)$; b) y c) las hipótesis se aceptan; d) $R \approx 0{,}739$. **7.78.** a) $y = -94{,}55 + 2{,}80x_1 + 1{,}07x_2$, $\beta_1 \in (2{,}03;\ 3{,}57)$, $\beta_2 \in (0{,}83;\ 1{,}31)$; b) y c) las hipótesis se rechazan; d) $R \approx 0{,}99$, **7.79.** a) $y = 2{,}21 + 0{,}091x_1 - 0{,}059x_2$, $\beta_1 \in (0{,}6;\ 1{,}23)$, $\beta_2 \in (-0{,}48;\ 0{,}36)$; b) la hipótesis se rechaza; c) la hipótesis H_0: $\beta_1 = 0$ se rechaza; la hipótesis H_0: $\beta_2 = 0$ se acepta; d) $R \approx 0{,}933$.

7.80.
$$\begin{cases} \beta_0 n + \beta_1 \sum x_{1i} + \beta_2 \sum x_{2i} = \sum y_i, \\ \beta_0 \sum x_{1i} + \beta_1 \sum x_{1i}^2 + \beta_2 \sum x_{1i}x_{2i} = \sum y_i x_{1i}. \\ \beta_0 \sum x_{2i} + \beta_1 \sum x_{1i}x_{2i} + \beta_2 \sum x_{2i}^2 = \sum y_i x_{2i}. \end{cases}$$

7.81. $\widetilde{\beta}_0 = -1{,}59$, $\widetilde{\beta}_1 = 2{,}61$, $\widetilde{\beta}_1 = 0{,}66$, $\widetilde{\sigma}^2 = 10{,}429$.

$$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} 3{,}16 & 0 & -0{,}42 \\ 0 & 0{,}21 & 0 \\ -0{,}42 & 0 & 8{,}4 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

7.82. $\widetilde{m} = \frac{\sum w_i m_i}{\sum w_i}$, $D[\widetilde{m}] = \frac{\sigma^2}{\sum w_i}$. **7.83.** $\widetilde{\beta} = \frac{\sum y_i}{\sum x_i}$, $D[\widetilde{\beta}] = \frac{a}{\sum x_i}$, donde a es el coeficiente de proporcionalidad. **7.84.** $\widetilde{\beta} = \frac{1}{n} \sum \frac{y_i}{x_i}$, $D[\widetilde{\beta}] = \frac{a}{n}$, donde a es el coeficiente de proporcionalidad. **7.85.** a) $\widetilde{\beta} = 0{,}2605$, $D[\widetilde{\beta}] = 2{,}26 \cdot 10^{-3}$; b) $\widetilde{\beta} = 0{,}2618$, $D[\widetilde{\beta}] = 1{,}82 \cdot 10^{-2}$; c) $\widetilde{\beta} = 0{,}2914$, $D[\widetilde{\beta}] = 0{,}1$.

8.1. ◀ Sean (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, los valores, conexos dos a dos, de dos muestras $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Supongamos que las diferencias $d_i = x_i - y_i$ han sido obtenidas de una población madre normalmente distribuida $N(m_d, \sigma_d)$. Se verifica la hipótesis H_0: $m_d = 0$, siendo la hipótesis alternativa H_1: $m_d \neq 0$. La estadística Z del criterio: $\dfrac{\bar{d} - m_d}{s_d}$, donde $\bar{d}$ es la media muestral y s_d^2 es la varianza muestral de la sucesión de las diferencias $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Z tiene (a condición de que la hipótesis H_0 sea cierta) la distribución de Student con $(n-1)$ grados de libertad. ▶ **8.2.** No. La distribución de los signos no será binomial. **8.3.** Sí. **8.4.** a) y b) No. **8.5.** No. **8.6.** La suposición se rechaza. **8.7.** La suposición se acepta. **8.8.** No. **8.9.** No. **8.10.** No. **8.11.** Sí. **8.12.** Sí. **8.13.** No. **8.14.** La suposición se rechaza. **8.15.** Sí. **8.16.** Sí. **8.17.** H_0 se acepta. **8.18.** H_0 se rechaza. **8.19.** Sí. **8.20.** H_0 se acepta. **8.21.** Sí. **8.22.** No. **8.23.** Sí. **8.24.** Sí. **8.25.** Sí. **8.26.** No. **8.27.** $r_s \approx 0{,}455$. **8.28.** $r_s \approx 0{,}789$. **8.29.** $r_s \approx 0{,}944$. **8.30.** $-0{,}009$; $-0{,}22$, ambos coeficientes no son significativos. **8.31.** a) $r_s \approx 0{,}86$; b) $r \approx 0{,}889$, ambos coeficientes son significativos. **8.32.** a) $r_s \approx 0{,}706$; b) $r \approx 0{,}636$. **8.35.** No. **8.36.** ● Puesto que

$$\bar{x}' = \frac{n+1}{2} \text{ y } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ entonces}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i' - \bar{x}')^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[k - \frac{n+1}{2}\right]^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{4} n (n+1)^2.$$

Análogamente se transforma la suma $\sum_{i=1}^{n} (y_i' - \bar{y}')^2$. La suma

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i' - x')(y_i' - \bar{y}') = \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i' - \frac{n}{4}(n+1)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i' - y_i')^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n}{4}(n+1)^2 =$$

$$= \frac{n}{12}(n^2-1) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i' - y_i')^2.$$

CAPÍTULO 16

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

§ 1. Problemas fundamentales y ecuaciones de la física matemática

1. Deducción de ecuaciones y planteamiento de los problemas de la física matemática. Muchos problemas de la mecánica, la física y la tecnología conducen a la investigación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden, llamadas *ecuaciones de la física matemática*. Su deducción se apoya en las leyes mecánicas o físicas. De toda la diversidad de problemas de esta índole nos limitamos a examinar sólo algunos, más simples, que ilustran ciertos métodos de construcción de los modelos matemáticos de los procesos mecánicos o físicos reales.

EJEMPLO 1. Deducir la ecuación de propagación del calor en el cuerpo sólido isótropo.

◀ Designemos con $u(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en un punto $M(x, y, z)$ y en un instante t. Como es sabido, en el cuerpo el calor se transfiere de las partes más calentadas a las menos calentadas. En la teoría de la conductibilidad térmica se considera que la cantidad de calor ΔQ que pasa a través de cierto elemento de la superficie $\Delta\sigma$, el cual está dentro del cuerpo dado, es proporcional a $\Delta\Pi\Delta t$, donde $\Delta\Pi$ es el flujo del vector grad u a través del elemento $\Delta\sigma$, o sea,

$$\Delta Q = k\Delta\Pi\Delta t. \tag{1}$$

Aquí $k = k(x, y, z)$ es el coeficiente de conductibilidad térmica.

En el seno del cuerpo destaquemos un volumen arbitrario V, limitado por una superficie cerrada Σ, y planteemos la ecuación de balance térmico para el volumen destacado. Sea Q_1 la cantidad de calor que entra en V a través de la superficie Σ en el transcurso del tiempo $(t, t + \Delta t)$. Entonces de (1) se desprende que

$$Q_1 = \iint\limits_{\Sigma} k(M)\,(\operatorname{grad} u,\ d\sigma)\,\Delta t.$$

Designemos con Q_2 la cantidad de calor que se desprende o se absorbe en el volumen V en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ debido a las fuentes (o vaciaderos), existentes en este volumen, cuya densidad, es decir, la cantidad del calor absorbido o desprendido por unidad de tiempo en unidad de volumen se designa con $F(x, y, z, t)$. Es claro

que

$$Q_2 = \int\int_V\int F(x, y, z, t)\, dv\, \Delta t$$

y entonces, utilizando la fórmula de Gauss—Ostrogradski, para toda la cantidad de calor que llega al volumen V en el transcurso de tiempo $(t, t + \Delta t)$, obtenemos la expresión

$$Q_1 + Q_2 = \int\int_V\int \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)\, dv\, \Delta t + \int\int_V\int F(x, y, z, t)\, dv\, \Delta t. \quad (2)$$

Por otro lado, para variar la temperatura del volumen del cuerpo V durante el tiempo $(t, t + \Delta t)$ en magnitud $\Delta_t u = u(x, y, z, t + \Delta t) - u(x, y, z, t) \approx \frac{\partial u(M-t)}{\partial t} \Delta t$ es necesario gastar la siguiente cantidad de calor:

$$Q_3 = \int\int_V\int [u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t)] \times$$

$$\times \gamma(x, y, z)\, \rho(x, y, z)\, dv \approx \int\int_V\int \gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dv\, \Delta t, \quad (3)$$

donde $\gamma = \gamma(M)$ es la capacidad calorífica de la sustancia y $\rho = \rho(M)$, la densidad de la misma. Pero $Q_1 + Q_2 = Q_3$ y por eso de (2) y (3) resulta la relación

$$\int\int_V\int \left[\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - F(x, y, z, t)\right] dv = 0.$$

Puesto que el volumen V es arbitrario y la función subintegral es continua, de aquí se deduce que en todo instante t debe cumplirse la relación

$$\gamma\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(M, t). \quad (4)$$

Esta ecuación (4) se denomina *ecuación de conductibilidad térmica de un cuerpo isótropo heterogéneo*. Si el cuerpo es homogéneo, entonces γ, ρ y k son constantes y la ecuación (4) se escribirá así:

$$\frac{\partial u}{dt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + f(x, y, z, t), \quad (5)$$

donde

$$a = \sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}}, \qquad f(x, y, z, t) = \frac{1}{\gamma\rho} F(x, y, z, t). \blacktriangleright$$

Para calcular la temperatura del cuerpo $u(x, y, z, t)$ en todo punto del cuerpo y en todo instante t es insuficiente resolver la ecuación (4) y (5). De las relaciones físicas resulta que es indispensable también conocer la distribución de la temperatura dentro del cuerpo en el instante inicial (condición inicial) y el régimen térmico existente

en la frontera del cuerpo (condición de frontera). Así mismo para resolver otros problemas de la física matemática se necesita conocer las condiciones iniciales (si el proceso no es estacionario) y de frontera. Por eso a continuación por *planteamiento del problema* se entienden la elección de la función que caracteriza el proceso físico a investigar, la deducción (o elección) de una ecuación que corresponde a este proceso, la determinación de las condiciones de frontera y la enunciación de las condiciones iniciales.

EJEMPLO 2. Plantear el problema de determinación de la temperatura de una varilla isótropa homogénea $0 \leqslant x \leqslant l$, provista de superficie lateral termoaislante, si la temperatura inicial de la varilla es cierta función de x y de afuera se suministra a los extremos de la misma el flujo térmico dado.

◀ La temperatura de la varilla depende exclusivamente de la coordenada del punto $x \in [0, l]$ y del tiempo t, o sea, $u = u(x, t)$. En el interior de la varilla no existen fuentes de calor, o sea, $F(x, y, z, t) \equiv 0$. Por eso la ecuación (5) toma la forma $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, donde $a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$. La condición inicial se escribe en forma de $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, donde $\varphi(x)$ es la función dada. Las condiciones de frontera tienen la forma

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t), \quad u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t), \quad 0 < t < \infty,$$

donde σ es el área de la sección transversal de la varilla, $q_1(t)$ y $q_2(t)$ son los flujos de calor (cantidad de calor suministrada por unidad de tiempo) que penetran en la varilla a través de sus extremos. Ahora bien, tenemos el problema:

Hallar una solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{\gamma\rho}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < t < \infty, \tag{6}$$

que satisfaga las condiciones:

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (\textit{condición inicial}),$$

$$u'_x(0, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_1(t),$$

$$u'_x(l, t) = \frac{1}{k\sigma} q_2(t).$$

(*condiciones de frontera o de contorno*). ▶ (7)

El problema examinado en el ejemplo 2 pertenece a los así llamados *problemas mixtos* en los que participan tanto las condiciones iniciales como las de frontera. Las condiciones de frontera (7) se denominan *condiciones de segundo género*. Se examinan también problemas con *condiciones de primer género*

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t) \tag{8}$$

y con *condiciones de tercer género*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\Big|_{x=0}=\psi_1(t),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\delta u\right)\Big|_{x=l}=\psi_2(t). \tag{9}$$

Además del problema mixto, se encuentra con bastante frecuencia el *problema de Cauchy* consistente en hallar una solución $u(x, t)$ en el dominio $-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$, que satisfaga únicamente las condiciones iniciales (por ejemplo, la condición $u(x, 0) = \varphi(x)$ para la ecuación (6)).

1.1.** Deducir la ecuación de pequeñas oscilaciones de una cuerda tensa, sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = l$, o sea, de un hilo fino que se encorva libremente en el plano. La fuerza de tensión T, que actúa sobre la cuerda, es considerablemente mayor que la de gravedad, o sea, la influencia ejercida por la fuerza de gravedad puede ser despreciada.

1.2. Utilizando la ecuación del problema 1.1, plantear el problema de oscilaciones forzadas de una cuerda homogénea, sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = l$, si en el instante $t = 0$ la cuerda tenía la forma $\varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, y la velocidad de la cuerda en cada punto de la misma es definida por la función $\psi(x)$.

1.3*. Utilizando la ecuación del problema 1.1, plantear el problema de oscilaciones libres de una cuerda homogénea, sujetada en el extremo $x = l$, cuyo extremo izquierdo (si $x = 0$) se mueve de modo que la tangente en este extremo (si $x \to +0$) es horizontal en todo instante. En el instante $t = 0$ la cuerda tenía la forma de $\varphi(x)$ y la velocidad de cada punto es igual a cero.

1.4.** Examinando una línea bifilar homogénea de las uniformemente distribuidas inductancias, resistencias, capacidades y fugas, deducir la *ecuación de onda*, llamada también ecuación de línea larga. (Introducir las magnitudes: L, el coeficiente de inducción; C, la capacidad; R, la resistencia; G, el coeficiente de fuga, considerando estas magnitudes referidas a la unidad de longitud.)

1.5. Utilizando la ecuación del problema 1.4, plantear el problema de determinación de la ley de variación de la tensión y de la intensidad de corriente en una línea larga ($0 \leqslant x < \infty$) sin pérdidas (o sea, $R = G = 0$), si se conocen la tensión inicial $\varphi(x)$ y la intensidad de corriente $\psi(x)$, mientras que la tensión en el punto $x = 0$ es constante e igual a E_0.

1.6*. Haciendo uso de la ecuación (6) dada en el ejemplo 2, plantear el problema de distribución de la temperatura dentro de una varilla isótropa homogénea cuya temperatura inicial es igual a u_0, siendo libre el intercambio de calor interior, si en el extremo izquierdo de la varilla (para $x = 0$) se mantiene una temperatura constante u_0 y a través del extremo derecho (para $x = l > 0$) se realiza el cambio de calor con el medio ambiente cuya temperatura es definida por la función $\varphi(t)$.

1.7. En la frontera de un cilindro homogéneo isótropo infinito, cuya directriz, la curva L, está en el plano perpendicular a la generatriz, se mantiene la temperatura prefijada que depende sólo de la posición del punto sobre L. Utilizando la ecuación (5) del ejemplo 1, plantear el problema de distribución estacionaria establecida de la temperatura en el interior del cilindro (*problema plano de Dirichlet*).

2. Reducción de las ecuaciones a la forma canónica. La ecuación general de segundo orden respecto a la función $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tiene la forma

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + f\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \qquad (10)$$

Los métodos de resolución de tales ecuaciones y el carácter de los procesos físicos que van descritos por estas ecuaciones dependen del tipo de la forma cuadrática

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \cdots, x_n^0)\, t_i t_j \qquad (11)$$

en cada punto $M_0(x_0^1, \ldots, x_n^0)$ de cierto dominio D del espacio n-dimensional.

Como es sabido, eligiendo una transformación lineal, la matriz $(a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0))_{i,j=1}^n$ de la forma cuadrática (11) puede ser reducida al tipo canónico (diagonal); en este caso, según la ley de inercia, el número de coeficientes positivos, negativos y nulos de tipo canónico de la matriz no depende del método de diagonalización.

De acuerdo con lo dicho, la ecuación (10) en el punto M_0 (en el dominio D) se llama *ecuación de tipo elíptico* si todos los n coeficientes de tipo canónico de la forma cuadrática de igual signo, o sea, la forma cuadrática (11) es positiva o negativamente definida en el punto M_0 (respectivamente, en todo punto del dominio D). Suelen reducirse a las ecuaciones de tipo elíptico los problemas de distribución estaciona-

ria del calor y de determinación de las funciones armónicas en el dominio D.

La ecuación (10) tiene un *tipo hiperbólico* en el punto M_0 (en el dominio D) si en el punto M_0 (respectivamente, en todo punto del dominio D) $n-1$ coeficientes de tipo canónico de la forma cuadrática (11) tienen el mismo signo, mientras que un coeficiente es de signo contrario. Se reducen al tipo hiperbólico diferentes problemas sobre los fenómenos oscilatorios. En un caso más general la ecuación (10) tiene un *tipo ultrahiperbólico* si m coeficientes de tipo canónico de la forma cuadrática son de igual signo, mientras que los demás $n-m$ coeficientes son de signo contrario.

Por último, la ecuación (10) tiene en el punto M_0 (en el dominio D) un *tipo parabólico* si en el punto M_0 (respectivamente, en todo punto del dominio D) al menos uno de los coeficientes de tipo canónico de la forma cuadrática (11) es igual a cero. Tales ecuaciones describen los procesos de propagación del calor, la difusión y algunos otros.

Si se trata de dos variables independientes x e y, la ecuación (10) se escribe, de ordinario, del modo siguiente:

$$a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{du}{\partial y}\right)=0. \qquad (12)$$

La forma cuadrática que le corresponde tiene el aspecto

$$a(x, y)\,t_1^2+2b(x, y)\,t_1t_2+c(x, y)\,t_2^2.$$

El tipo de la ecuación (12) puede ser definido también sin reducir la forma cuadrática al tipo canónico. A saber: la ecuación (12) tiene en el punto $M_0(x_0, y_0)$ (en el dominio D)

tipo elíptico si $ac-b^2>0$,

tipo hiperbólico si $ac-b^2<0$,

tipo parabólico si $ac-b^2=0$

en el punto M_0 (respectivamente, en el dominio D).

La ecuación

$$a(x, y)\,dy^2-2b(x, y)\,dx\,dy+c(x, y)\,dx^2=0 \qquad (13)$$

se denomina *ecuación característica* para la ecuación (12) y sus integrales generales

$$\varphi(x, y)=C \quad \text{y} \quad \psi(x, y)=C$$

se llaman *características*.

Las características de una ecuación lineal en derivadas parciales de segundo orden (12) se utilizan para reducirla al tipo canónico. Para una ecuación de tipo hiperbólico ($ac-b^2<0$) las características son reales y diferentes. Poniendo $\xi=\varphi(x, y)$ y $\eta=\psi(x, y)$, reducimos la ecuación (9) a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0 \qquad (14)$$

o bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}+\Phi_1\left(\alpha,\ \beta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \alpha},\ \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)=0, \qquad (14')$$

si ponemos adicionalmente $\alpha=\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, $\beta=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$.

Para una ecuación de tipo elíptico ($ac-b^2>0$) las características son complejas y complejamente conjugadas ($\varphi(x, y)=\overline{\psi}(x, y)$). Poniendo $\xi=\frac{1}{2}(\varphi(x, y)+\psi(x, y))=\operatorname{Re}\varphi(x, y)$ y $\eta=\frac{1}{2i}(\varphi(x, y)-\psi(x, y))=\operatorname{Im}\varphi(x, y)$, reduzcamos la ecuación (12) a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\Phi_2\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0. \qquad (15)$$

Si se trata de una ecuación de tipo parabólico ($ac-b^2=0$), hay una sola característica $\varphi(x, y)=C$. Poniendo $\xi=\varphi(x, y)$ y $\eta=\psi(x, y)$, donde $\psi(x, y)$ es una función arbitraria, independiente con $\varphi(x, y)$ (o sea, el jacobiano $I=\begin{vmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y\\ \psi'_x & \varphi'_y\end{vmatrix}\neq 0$), obtenemos

$$\frac{\partial^2 u^2}{\partial \eta^2}+\Phi_3\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial \xi},\ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0. \qquad (16)$$

Las ecuaciones (14), (14'), (15), (16) se denominan *canónicas*.

El método examinado de reducir la ecuación (12) al tipo canónico (14) — (16) y la resolución de la ecuación obtenida lleva el nombre de *método de características*.

Puesto que para cada tipo de ecuaciones canónicas están elaborados los métodos determinados de solución analítica y numérica, el problema de reducción de la ecuación (12) al tipo canónico tiene interés práctico.

Obsérvese que en diferentes dominios el tipo de la misma ecuación (12) puede ser distinto.

EJEMPLO 3. Determinar el tipo de la ecuación

$$y^2 y''_{xx}+x^2 u''_{yy}-\frac{x^2}{y}u'_y-\frac{y^2}{x}u'_x=0 \qquad (17)$$

y reducirla a la forma canónica.

◀ Puesto que $ac-b^2=y^2x^2>0$ en todos los puntos que no están sobre las rectas $x=0$ ó $y=0$, en todo cuadrante abierto la ecuación dada tiene un tipo elíptico. Planteemos la ecuación característica

$$y^2\,dy^2+x^2\,dx^2=0.$$

Esta ecuación tiene integrales generales complejamente conjugados $y^2+ix^2=k$ e $y^2-ix^2=k$. Por eso pongamos $\xi=y^2$ y $\eta=x^2$.

Entonces tenemos:

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\eta \cdot 2x,$$

$$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi \cdot 2y,$$

$$u''_{xx} = (u''_{\eta\xi} \xi'_x + u''_{\eta\eta} \eta'_x) \cdot 2x + u'_\eta \cdot 2 = u''_{\eta\eta} \cdot 4x^2 + 2u'_\eta,$$

$$u''_{yy} = (u''_{\xi\xi} \xi'_y + u''_{\xi\eta} \eta'_y) \cdot 2y + u'_\xi \cdot 2 = u''_{\xi\xi} \cdot 4y^2 + 2u'_\xi.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación inicial, obtenemos

$$y^2 (4x^2 u''_{\eta\eta} + 2u'_\eta) + x^2 (4y^2 u''_{\xi\xi} + 2u'_\xi) - \frac{x^2}{y} 2yu'_\xi - \frac{y^2}{x} 2xu'_\eta = 0,$$

o sea, $4x^2y^2 (u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\xi}) = 0$. Al simplificar, eliminando $4x^2y^2 \neq 0$, llegamos a la ecuación de forma canónica $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$. De aquí concluimos que la solución de la ecuación es una función armónica respecto a las variables ξ y η. ▶

En los problemas 1.8—1.14 determinar el tipo de las ecuaciones y reducirlas a la forma canónica.

1.8. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} - \sqrt{y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.9. $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.10. $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

1.11. $xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} y \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

1.12. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \operatorname{ctg} x \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$

1.13. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.14. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

1.15.** Hallar la solución general para la ecuación del problema 1.8.

1.16. Hallar la solución general para la ecuación del problema 1.12.

§ 2. Métodos analíticos de resolución de las ecuaciones de la física matemática

1. Método de D'Alembert. Uno de los ampliamente utilizados procedimientos de resolver las ecuaciones de oscilaciones de una cuerda es el método de características llamado en este caso *método de D'Alem-*

bert. Se basa en el hecho de que con ayuda de la sustitución de $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

se transforma en ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ (véase el problema (1.12) que tiene la solución general $u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + F(\eta)$, donde Φ y F son las funciones arbitrarias dos veces derivables. Para determinar estas funciones Φ y F, o sea, para definir la ley de oscilaciones de una cuerda se necesita utilizar las condiciones iniciales y, para ciertos problemas, también las de frontera. Si regresamos a las viejas variables x y t, la solución tiene la forma

$$u(x, t) = \Phi(x + at) + F(x - at).$$

Aquí $F(x - at)$ caracteriza la onda directa (la curva $F(x)$ se desplaza a la derecha con velocidad a) y $\Phi(x + at)$, la onda inversa (la curva $\Phi(x)$ se desplaza a la izquierda con velocidad a).

Si se examina el problema de Cauchy para una cuerda infinita $-\infty < x < \infty$, por las condiciones iniciales dadas

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u'_t(x, 0) = \psi(x) \tag{2}$$

se determinan las funciones Φ y F y la solución buscada (*fórmula de D'Alembert*)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(z)\, dz. \tag{3}$$

Si se trata de una cuerda semiinfinita, entonces, además de las condiciones iniciales (2) prefijadas para $0 \leqslant x < \infty$, es necesario añadir las condiciones de frontera (se supone que el extremo esté en el punto $x = 0$)

$$u(0, t) = 0 \tag{4}$$

para la cuerda sujetada en el punto $x = 0$,

$$u'_x(0, t) = 0 \tag{5}$$

para el extremo libre en el punto $x = 0$,

$$u'_x(0, t) - hu(0, t) = 0$$

para la sujeción elástica en el punto $x = 0$.

De las condiciones (2) y (4) se deduce que $\varphi(0) = 0$.

Si las condiciones de frontera (4) ó (5) son homogéneas la resolución del problema sobre la oscilación de una cuerda semiinfinita se reduce a la resolución del problema sobre la oscilación de una cuerda infinita, prolongando las condiciones iniciales sobre todo el eje, de un modo impar para la condición (4), o sea, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$ y de un modo par para la condición (5), o sea, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = \psi(x)$.

EJEMPLO 1. Hallar la solución $u(x, t)$ del problema de Cauchy $(-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \cos x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

◀ Utilizando la fórmula de D'Alembert (3), tenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\cos(x-t) + \cos(x+t)] = \cos x \cos t. \blacktriangleright$$

EJEMPLO 2. Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$, que satisface las condiciones $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \operatorname{sen}^2 x$, $u(0, t) = 0$.

◀ Prolonguemos las funciones $\varphi(x) = x^2$ y $\psi(x) = \operatorname{sen}^2 x$ sobre el semieje negativo, haciendo esto de un modo impar:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x^2 \text{ para } x \geqslant 0, \\ -x^2 \text{ para } x < 0; \end{cases} \quad \psi_1(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x \text{ para } x \geqslant 0. \\ -\operatorname{sen}^2 x \text{ para } x < 0. \end{cases}$$

Entonces, según la fórmula de D'Alembert (3), la solución se escribirá de la manera siguiente:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(z)\, dz =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}[(x+at)^2 + (x-at)^2] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \operatorname{sen}^2 z\, dz \quad \text{para } t \leqslant \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[(x+at)^2 - (x-at)^2] + \frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at} \operatorname{sen}^2 z\, dz - \int_{x-at}^{0} \operatorname{sen}^2 z\, dz\right] \\ \qquad\qquad \text{para } t > \frac{x}{a} > 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a}\cos 2x \operatorname{sen} 2at \text{ para } t \leqslant \frac{x}{a}, \\ 2axt + \frac{1}{4a}[2x - \operatorname{sen} 2x \cos 2at] \text{ para } t > \frac{x}{a} > 0. \blacktriangleright \end{cases}$$

OBSERVACIÓN. Como se ve de la fórmula de D'Alembert (3), la función $\varphi(x)$ que forma parte de la condición (2) debe tener la segunda derivada y la función $\psi(x)$, la primera. Sin embargo, en los problemas posteriores examinaremos las funciones $\varphi(x)$ con puntos angulosos y las funciones $\psi(x)$, con puntos de discontinuidad, suponiendo, a pesar de todo, que la función definible por la fórmula (3) es la solución (hablando en general, generalizada) de la ecuación inicial (1). Esto se explica por la circunstancia de que, realizando variaciones insigni-

ficantes, las funciones φ y ψ pueden hacerse suficientemente suaves y las soluciones $u^*(x, t)$ obtenidas para estas funciones suavizadas poco se distinguirán de $u(x, t)$.

Utilizando la fórmula de D'Alembert, hallar la solución $u(x, t)$ de los problemas de Cauchy siguientes ($-\infty < x < \infty$, $0 < t < \infty$):

2.1*. Hallar la solución de la ecuación $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ para las condiciones iniciales $u(x, 0) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $u'_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

2.2. Hallar la solución de la ecuación $u''_{tt} = u''_{xx}$, siendo las condiciones iniciales $u(x, 0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u'_t(x, 0) = \operatorname{sen} x$.

2.3*. Hallar la ley de oscilaciones libres de una cuerda infinita si la velocidad inicial de cada su punto es igual a cero y la desviación inicial es definida por la función

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \in (-\infty, 0) \cup (2l, \infty), \\ x & \text{para } x \in (0, l), \\ 2l - x & \text{para } x \in (l, 2l). \end{cases}$$

Construir en el dibujo el perfil de la cuerda en los instantes $t = l/2a$ y $t = l/a$ (a es la constante que forma parte de la ecuación (1)).

2.4*. Hallar la solución de la ecuación $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$, siendo las condiciones iniciales $u(x, 0) = \varphi(x) \equiv 0$,

$$u'_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > h, \\ -a & \text{si } -h < x < 0, \\ a & \text{si } 0 < x < h. \end{cases}$$

Construir el perfil de la cuerda en los instantes $t = h/2a$ y $t = 3h/2a$.

Utilizando el método de prolongación y la fórmula de D'Alembert, hallar las soluciones de los problemas siguientes:

2.5. En el dominio $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$ hallar la solución de la ecuación (1), que satisface las condiciones

$$u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad u'_x(0, t) = 0.$$

2.6. Para $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$ hallar la solución de la ecuación (1), que satisface las condiciones

$$u(x, 0) = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

2.7. En el dominio $0 \leqslant x < \infty$, $0 < t < \infty$ hallar la solución de la ecuación (1), que satisface las condiciones

$$u(x, 0) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} & \text{para } x \in [0, l], \\ 0 & \text{para } x \in (l, \infty), \end{cases}$$

$$u'_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0.$$

Construir las gráficas de resolución en los instantes $t = l/4a$ y $t = 3l/4a$.

2.8. Una cuerda semilimitada ($u(0, t) = 0$) en el instante inicial tiene la forma $u(x, 0) = 0$ y la velocidad inicial

$$u'_t(x, 0) = \begin{cases} c & \text{para } x \in [0, l), \\ 0 & \text{para } x \in [l, \infty). \end{cases}$$

Hallar la forma de la cuerda para los instantes $t = l/a$ y $t = 5l/a$, donde a es la constante que entra en la ecuación (1).

2. Espacios de Hilbert. Sistemas ortogonales. Uno de los procedimientos analíticos más aplicados para resolver las ecuaciones de la física matemática es el llamado *método de Fourier* que se apoya en las propiedades de los sistemas ortogonales y desarrollos ortogonales. Por eso, antes de proceder a la exposición del método de Fourier, propongamos varios problemas referentes a las propiedades de los sistemas ortogonales y series ortogonales, así como a la resolución de algunos problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Supongamos que en un espacio vectorial lineal $\mathcal{U}$ está introducido el *producto escalar (interior)* (x, y) de los vectores $x \in \mathcal{U}$ e $y \in \mathcal{U}$ (véase la parte 1, cap. 4, § 1, p. 3) que satisface las condiciones:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
3) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
4) $(x, x) \geqslant 0$, con la particularidad de que $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

El número igual a $\sqrt{(x, x)}$, o sea, $\| x \|^2 = (x, x)$ se llama *norma* del elemento $x \in \mathcal{U}$ que va designada por $\| x \|$. La sucesión de los vectores $\{x_n\} \subset \mathcal{U}$ se denomina *fundamental* si satisface la condición: para todos los $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ tal que para cualesquiera $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad $\| x_{n_1} - x_{n_2} \| < \varepsilon$. El espacio $\mathcal{U}$ se llama *completo* si toda sucesión fundamental de los vectores $\{x_n\}$ de este espacio tiene el límite $x_0 \in \mathcal{U}$. El espacio vectorial lineal completo se denomina *espacio de Hilbert* y se designa con H.

2.9*. Demostrar que el producto escalar que satisface las condiciones de 1) a 4) es una función continua respecto a la convergencia en norma, o sea, si $\| x_n - x \| \to 0$ e $\| y_n - y \| \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces también $|(x_n, y_n) - (x, y)| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

2.10. Demostrar que las operaciones lineales sobre los vectores del espacio de Hilbert H son continuas, o sea, si $\| x_n - x \| \to 0$, $\| y_n - y \| \to 0$ y la sucesión de los números $\lambda_n \to \lambda$ $(n \to \infty)$, entonces $\| (x_n + y_n) - (x + y) \| \to 0$ y $\| \lambda_n x_n - \lambda x \| \to 0$.

2.11*. Demostrar que el espacio euclídeo de dimensión finita es completo.

2.12. Sea l_2 un espacio vectorial lineal de colecciones ordenadas infinitas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ con componentes reales (complejas) x_n, $n \in \mathbb{N}$, con la particularidad de que $\sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 < \infty$. Demostrar que la relación $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$ define el producto escalar en el espacio l_2.

2.13. Demostrar que un conjunto numerable $B = \{e_n, n \in \mathbb{N}: e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)\}$ forma una base ortonormalizada en el espacio l_2 respecto al producto escalar del problema 2.12.

2.14*. Demostrar que l_2 es el espacio de Hilbert.

2.15. Sea $L_2(a, b)$ un espacio de funciones de valor complejo $f(x)$ dadas sobre $[a, b]$ tales que $\int_a^b | f(x) |^2 dx < \infty$. Considerando conocido lo que a partir de la condición $\int_a^b | f(x) |^2 dx = 0$ resulta que $f(x) = \theta(x)$, donde $\theta(x)$ es el elemento nulo del espacio $L^2(a, b)$, demostrar que si $f(x) \in L_2(a, b)$, $g(x) \in L_2(a, b)$, entonces la relación $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ define el producto escalar en $L_2(a, b)$. Escríbase la desigualdad de Cauchy—Buniakovski en $L_2(a, b)$, llamada también *desigualdad de Schwarz* (véase la parte I, pág. 210).

2.16*. Demostrar que la sucesión de funciones continuas

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} -1 \text{ para } t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt \text{ para } t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1 \text{ para } t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

es fundamental en el espacio de funciones derivables continuamente dos veces $C^2[-1, 1]$, pero no tiene el límite. Así pues, el espacio $C^{(2)}[-1, 1]$ no es completo.

2.17. Sea $L_2^\rho(a, b)$ el espacio de las funciones $f(x)$, dadas sobre $[a, b]$, tales que $\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < \infty$, donde la función ponderante $\rho(x) \geqslant 0$ y puede anularse sólo en algunos puntos. Demostrar que si $f(x) \in L_2^\rho(a, b)$, $g(x) \in L_2^\rho(a, b)$, entonces la relación

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, \rho(x)\, dx$$

define el producto escalar en $L_2^\rho(a, b)$ (véanse los datos del problema 2.15).

El sistema de funciones $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$, dadas sobre el segmento $[a, b]$, se llama *ortogonal* en $[a, b]$, si

a) $\varphi_n(x) \in L_2(a, b)$, $n = 0, 1, \ldots$;

b) $(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ d_n \neq 0 & \text{para } m = n. \end{cases}$

El sistema de funciones $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ se llama *ortogonal en* $[a, b]$ *con peso* $\rho(x)$ si

a) $\varphi_n(x) \in L_2^\rho(a, b)$, $n = 0, 1, \ldots$;

b) $(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \varphi_n(x)\, \varphi_m(x)\, \rho(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ d_n \neq 0 & \text{para } m = n. \end{cases}$

Si $d_n = 1$ para todos los $n = 0, 1, \ldots$, el sistema se denomina *ortonormalizado en* $[a, b]$ o, respectivamente, *ortonormalizado en* $[a, b]$ *con peso* $\rho(x)$.

Tomando como ejemplos los problemas siguientes, cerciórese de la existencia de los sistemas de funciones ortogonales y ortogonales con peso.

2.18. Demostrar que el sistema de funciones trigonométricas

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots$$

es ortogonal en el segmento $[-\pi, \pi]$ y el sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

es ortonormalizado en $[-\pi, \pi]$.

2.19. Demostrar que el sistema de funciones

$$\left\{\cos\frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=0}^{\infty} \text{ es ortogonal en el segmento } [0, l].$$

2.20. Demostrar que el sistema de funciones

$$\left\{\operatorname{sen}\frac{2\pi n x}{l}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es ortogonal en el segmento } \left[0, \frac{l}{2}\right].$$

2.21. Supongamos que el sistema de funciones $f_0(x)$, $f_1(x)$, . . ., $f_n(x)$, . . . de $L_2(a, b)$ es linealmente independiente en $[a, b]$. Demostrar por inducción que las funciones construidas según la fórmula recurrente

$$\varphi_0(x) = \frac{f_0(x)}{\|f_0\|}, \quad \varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k)\varphi_k(x)}{\left\|f_n - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, \varphi_k)\varphi_k\right\|},$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

forman un sistema ortonormalizado en $[a, b]$ (método de ortogonalización de Schmidt).

2.22. Utilizando el método de ortogonalización de Schmidt (véase el problema 2.21), hallar las primeras cuatro funciones (*polinomios ortonormalizados de Legendre* $\hat{P}_0(x)$, $\hat{P}_1(x)$, $\hat{P}_2(x)$ y $\hat{P}_3(x)$) que se obtienen al ortogonalizar el sistema de potencias $1, x, x^2, \ldots$ en el segmento $[-1, 1]$.

2.23. Utilizando el método de ortogonalización de Schmidt (véase el problema 2.21), hallar las primeras cuatro funciones que se obtienen al ortogonalizar el sistema de potencias $1, x, x^2, \ldots$ en el segmento $[-1, 1]$ con peso $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*polinomios ortonormalizados de Chébishev*).

2.24*. Los *polinomios no normalizados de Chébishev* con el coeficiente igual a 1 de la potencia mayor tienen la forma

$$T_0(x) \equiv 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

$(n \in \mathbb{N})$. Demostrar que el sistema $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal en $[-1, 1]$ con peso $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.25. Utilizando el método de ortogonalización de Schmidt (véase el problema 2.21), hallar las primeras tres funciones obtenidas al ortogonalizar el sistema de potencias $1, x, x^2, \ldots$ en el segmento $[0, 1]$.

Las *funciones de Rademacher* $r_n(x)$ se definen del modo siguiente:

$$r_n(x) = \operatorname{sign} \operatorname{sen} 2^{n+1}\pi x, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

donde

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{para } x > 0, \\ 0 & \text{para } x = 0, \\ -1 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

2.26. Construir las gráficas de las funciones de Rademacher $r_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

2.27. Mostrar que cuando $\mu > \nu$ cada intervalo de constancia de la función $r_\nu(x)$ contiene un número par $2^{\mu-\nu}$ de los intervalos de constancia de la función $r_\mu(x)$.

2.28. Demostrar la ortonormalidad del sistema $\{r_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ en el segmento $[0, 1]$.

Las *funciones de Walsh* $W_n(x)$, $x \in [0, 1]$ en la numeración de Paley se definen del modo siguiente:

$$W_0(x) \equiv 1, \quad W_{2^k}(x) = r_k(x), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

y si $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_\nu}$, $n_1 > n_2 > \ldots > n_\nu \geqslant 0$, entonces

$$W_n(x) = \prod_{k=1}^{\nu} W_{2^{n_k}}(x) = \prod_{k=1}^{\nu} r_{n_k}(x),$$

donde $r_n(x)$ es la función de Rademacher, con la particularidad de que en los puntos de discontinuidad

$$W_n(x) = \frac{1}{2}[W_n(x+0) + W_n(x-0)].$$

2.29. Construir las gráficas de funciones de Walsh $W_n(x)$ para $n = 0, 1, \ldots, 8$.

2.30. Demostrar la ortonormalidad del sistema $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ en el segmento $[0, 1]$.

2.31.** Sean $I_\nu(x)$ la solución de la ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0$ y $\{\mu_k^{\nu}\}_{k=1}^{\infty}$ las raíces de $I_\nu(x)$. Demostrar que el sistema de funciones $\{I_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)\}_{k=1}^{\infty}$ es ortogonal en el segmento $[0, 1]$ con peso $\rho(x) = x$.

Determinación de la solución $y(x)$, $x \in [a, b]$ de la ecuación

$$(k(x)\, y'(x))' - q(x)\, y(x) + \lambda \rho(x)\, y(x) = 0, \qquad (6)$$

que satisface las condiciones de contorno homogéneas de uno de los tipos

1) $y(a) = y(b) = 0$,
2) $y'(a) = y'(b) = 0$,
3) $y(x)$ está limitada cuando $x \to a + 0$ y $x \to b - 0$,

se llama *problema de Sturm — Liouville*. En este caso suponemos que las funciones $k(x)$, $q(x)$ y $\rho(x)$ son continuas en el segmento $[a, b]$, cion la particularidad de que $k(a) = k(b) = 0$, si se trata de la condición de tercer tipo, $k(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$ y $\rho(x)$ está limitada para $x \in [a, b]$.

Las condiciones de contorno de 1) a 3) pueden entrar en el problema general de Sturm — Liouville, formando ciertas combinaciones lineales.

Las soluciones no triviales $y(x) \not\equiv 0$ de la ecuación (6) que satisfacen una de las condiciones de contorno de 1) a 3) existen no para todos los λ. El valor de λ^* para el cual existe una solución no trivial $y^*(x)$ del problema de Sturm — Liouville se llama *número propio de la ecuación* (6) y la solución $y^*(x)$ que le corresponde, *función propia*.

2.32*. Demostrar que las funciones propias $y_1(x)$ e $y_2(x)$ del problema de Sturm — Liouville, correspondientes a diferentes números propios $\lambda_1 \neq \lambda_2$, son ortogonales en $[a, b]$ con peso $\rho(x)$, o sea,

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

Hallar los números propios y las funciones propias de los problemas siguientes:

2.33*. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ hallar una solución no trivial de la ecuación $y'' - \lambda y = 0$ que satisfaga las condiciones $y(0) = y(l) = 0$.

2.34. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ hallar una solución no trivial de la ecuación $y'' - \lambda y = 0$ que satisfaga las condiciones $y'(0) = y'(l) = 0$.

2.35. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ hallar una solución no trivial de la ecuación $y'' - \lambda y = 0$ que satisfaga las condiciones $y(0) = y'(l) = 0$.

3. Series ortogonales. Supongamos que $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ es un sistema de funciones ortonormalizado en $[a, b]$ y la función $f(x) \in L_2(a, b)$. Entonces existen los números

$$c_n = c_n(f) = (f, \varphi_n) = \int_a^b f(x)\, \varphi_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

llamados *coeficientes de Fourier* de la función $f(x)$ en el sistema Φ. La serie con estos coeficientes

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

se denomina *desarrollo ortogonal* o *serie de Fourier* de la función $f(x)$ en el sistema Φ.

Si el sistema Φ es solamente ortogonal, pero no normalizado, entonces

$$c_n = \frac{1}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx} \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x)\,dx, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

2.36. Utilizando el resultado del problema 2.31 (véase la resolución), hallar la expresión de los coeficientes de Fourier — Bessel de la función $f(x) \in L_2^{\rho}(0,\ 1)$ $(\rho(x) = x)$ en el sistema $\{I_\nu(\mu_k^{(\nu)} x)\}_{k \in \mathbb{N}}$.

2.37*. Los *polinomios no normalizados de Legendre* $P_n(x)$ (véase el problema 2.22) pueden definirse también por la relación (fórmula de Rodrigues)

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!\,2^n} \cdot \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}, \quad n=0,\ 1,\ \ldots$$

Forman un sistema ortogonal en $[-1,\ 1]$, o sea,

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{para } m = n. \end{cases}$$

Hallar los primeros cuatro coeficientes del desarrollo de la función $f(x) = |x|$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ si se conoce que $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 3/2x^2 - 1/2$, $P_3(x) = 5/2x^3 - 3/2x$.

2.38. Escribir la expresión de los coeficientes de Fourier de la función $f(x) \in L_2^{\rho}(-1,\ 1)\left(\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ en el sistema de polinomios de Chébishev (véase el problema 2.24).

2.39. Para la función $f(x) = x$ en el segmento $[0,\ 1]$ calcular los primeros cuatro coeficientes de su desarrollo según el sistema de Walsh en la numeración de Paley.

2.40*. Demostrar que las sumas parciales $S_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$ del desarrollo de la función $f(x)$ en el sistema Φ dan la solución del siguiente problema sobre la mejor aproximación en media cuadrática: en el conjunto

$$M_n = \{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)\}$$

de «polinomios» $T_n(x)$ según el sistema Φ de orden no superior a n hallar el que dé el mínimo a las integrales

$$\min_{T_n \in M_n} \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 \, dx.$$

2.41. Utilizando el resultado del problema 2.40, deducir la desigualdad de Bessel para las sumas finitas:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx$$

y para las series infinitas

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

2.42. Escribir la desigualdad de Bessel del problema 2.41 para los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$ de período 2π en el sistema trigonométrico $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n \in \mathbb{N}}$.

El sistema ortogonal $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ se llama *completo* si de las igualdades

$$(f, \varphi_n) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) \, dx = 0, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

resulta que $f(x) = 0$ casi en todos los puntos del segmentc $[a, b]$.

Para los sistemas ortonormalizados completos la desigualdad de Bessel se convierte en *igualdad de Parseval*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Los examinados anteriormente sistemas trigonométricos, sistema de Walsh, sistema de funciones de Bessel, sistemas de polinomios de Legendre y de Chébishev son completos.

2.43. ¿Cuál es el sentido de la desigualdad de Bessel y de la igualdad de Parseval en el espacio euclídeo vectorial de dimensión finita?

2.44*. Demostrar que el sistema de funciones de Rademacher no es completo en el segmento $[0, 1]$.

4. Método de Fourier para resolver ecuaciones de la física matemática. El método de Fourier, utilizable ampliamente para resolver varios problemas de la física matemática, consiste en lo siguiente. La función incógnita, dependiente de algunas variables, es buscada en forma del producto de funciones cada una de las cuales depende de una sola variable. Sustituido este producto en la ecuación inicial, se obtienen varias ecuaciones diferenciales ordinarias una parte de las cuales, junto con las condiciones de contorno del problema inicial, son problemas de contorno de Sturm — Liouville. La solución buscada se representa como serie formada por los productos de funciones propias de estos problemas de Sturm — Liouville.

EJEMPLO 3. Una membrana rectangular homogénea ($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant y \leqslant m$), que está sujetada a lo largo de todo el contorno y tiene en el instante inicial la forma $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, comienza a oscilar con velocidad inicial $u'_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$. Hallar la ley de oscilaciones libres de la membrana. Obtener la solución en caso de $\psi(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = xy(l - x)(m - y)$ si la tensión de la membrana T_0 es igual a su densidad superficial $\rho \left(a^2 = \dfrac{T_0}{\rho} 1\right)$.

◀ Suponiendo que la membrana efectúa pequeñas oscilaciones, tenemos el primer problema de contorno: hallar la solución $u(x, y, t)$ de la ecuación de oscilaciones libres de la membrana

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \tag{7}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y) \tag{8}$$

y las de frontera

$$u(0, y, t) = u(l, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, m, t) = 0. \tag{9}$$

Buscamos la solución en forma del producto

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t),$$

sustituyendo el cual en (7), obtenemos

$$XYT'' = a^2 (X''YT + Y''XT).$$

Dividiendo esta igualdad por a^2XYT, tenemos

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}. \tag{10}$$

Cada relación depende aquí de la propia variable y por eso la igualdad es posible únicamente en el caso en que cada una de estas relaciones es constante. Poniendo $X''/X = \lambda$, $Y''/Y = \mu$ y utilizando las condiciones de frontera (9), obtenemos dos problemas de Sturm — Liouville:

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0 \tag{11}$$

y

$$Y'' - \mu Y = 0, \qquad Y(0) = Y(m) = 0. \tag{12}$$

Examinemos primeramente el problema (11). Como hemos mostrado en el problema 2.33, los números propios del problema (11) son los números $\lambda_k = -(\pi k/l)^2$ y las funciones propias, las funciones

$$X_k(x) = \operatorname{sen} \pi k x/l, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Análogamente, los números $\mu_n = -(\pi n/m)^2$, $n \in \mathbb{N}$, son los valores propios del problema (12) y el sistema de funciones $Y_n(y) = \operatorname{sen} \pi n y/m$, $n \in \mathbb{N}$, constituye las funciones propias. Sustituyendo en (10) en vez de las relaciones X''/X e Y''/Y sus valores $-(\pi k/l)^2$ y $-(\pi n/m)^2$, obtenemos las ecuaciones

$$T'' + \pi^2 a^2 \left[\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2 \right] T = 0$$

cuyas soluciones, para diferentes k y n, serán las funciones

$$T_{k,n}(t) = A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t + B_{k,n} \operatorname{sen} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t.$$

Ahora bien, las funciones

$$u_{k,n}(x, y, t) = \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t + B_{k,n} \operatorname{sen} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t \right) \operatorname{sen} \frac{\pi k x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{m}. \tag{14}$$

son las soluciones de la ecuación (7) que satisfacen las condiciones de frontera (9).

De la linealidad de la ecuación (7) resulta que también toda combinación lineal de las soluciones (14), o sea, la serie doble compuesta formalmente

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_{k,n} \cos \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t + B_{k,n} \operatorname{sen} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}\, t \right) \operatorname{sen} \frac{\pi k x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{m}, \tag{15}$$

a condición de que sea posible derivarla doblemente término por término, es asimismo la solución de la ecuación (7) que satisface las con-

diciones (9). Exijamos que la solución $u(x, y, t)$ representada por la serie (15) satisfaga las condiciones (8), o sea, que

$$u(x, y, 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{k, n} \operatorname{sen} \frac{\pi k x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{m}=\varphi(x, y)$$

y

$$u_t'(x, y, 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{k, n} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi k x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n y}{m}=\psi(x, y).$$

Basándonos en estas igualdades concluimos que si los números $A_{k,n}$ son los coeficientes de Fourier de la función $\varphi(x, y)$, o sea, si

$$A_{k, n}=\frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l \varphi(v, z) \operatorname{sen} \frac{\pi k v}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{m}\, dv\, dz, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

y los números $B_{k, n} \pi a \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2}$ son los coeficientes de Fourier de la función $\psi(x, y)$, o sea, si

$$B_{k, n}=\frac{4}{\pi a l m \sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^2}} \int_0^m \int_0^l \psi(v, z) \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi k v}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{m}\, dv\, dz, \quad k, n \in \mathbb{N},$$

entonces la serie (15) es la solución buscada del problema (7)—(9).

Hallemos ahora la solución del problema inicial para las condiciones de partida dadas $\psi(x, y)=0$ y $\varphi(x, y)=xy(l-x)(m-y)$. Puesto que $\psi(x, y)=0$, entonces $B_{k,n}=0$ para todos los k, $n=1, 2, \ldots$ Calculemos $A_{k,n}$:

$$A_{k, n}=\frac{4}{lm} \int_0^m \int_0^l vz(l-v)(m-z) \operatorname{sen} \frac{\pi k v}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{m}\, dv\, dz=$$

$$=\frac{4}{lm} \int_0^m z(m-z) \operatorname{sen} \frac{\pi n z}{m}\, dz \int_0^l v(l-v) \operatorname{sen} \frac{\pi k v}{l}\, dv=$$

$$=\frac{4}{lm} \frac{2m^3}{(\pi n)^3}\left[1-(-1)^n\right] \frac{2l^3}{(\pi k)^3}\left[1-(-1)^k\right]=$$

$$=\begin{cases} \dfrac{4^3 m^2 l^2}{\pi^6 (2n'+1)^3 (2k'+1)^3} & \text{para } n=2n'+1 \text{ y } k=2k'+1, \\ 0 & \text{para } n \neq 2n'+1 \text{ ó } k \neq 2k'+1, \\ & k', n'=0, 1, \ldots \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (15), obtenemos

$$u(x, y, t) = \frac{4^3 l^2 m^2}{\pi^6} \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{\cos \pi a \omega_{k, n} t}{(2k+1)^3 (2n+1)^3} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi (2k+1) x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi (2n+1) y}{m},$$

donde $\omega_{k, n} = \sqrt{\left(\frac{2k+1}{l}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{m}\right)^2}$. ▶

En el caso en que la ecuación inicial en derivadas parciales es heterogénea, o sea, en el proceso físico caracterizado por esta ecuación hay fuerzas y fuentes exteriores, se encuentra previamente el sistema de funciones propias de la ecuación homogénea correspondiente y la solución se busca en forma de una serie constituida a base de estas funciones propias con coeficientes variables.

EJEMPLO 4. Hallar la forma $u(x, t)$ (desviación a partir de la posición de equilibrio) de una cuerda homogénea, sujetada en el extremo $x = 0$, el extremo derecho de la cual tiene una tangente horizontal y la cual está sometida a la acción de una fuerza exterior con la densidad $F(x, t) \not\equiv 0$. En el instante inicial $t = 0$ la cuerda tenía la forma $\varphi(x)$ y cada punto poseía la velocidad $\psi(x)$. Hallar $u(x, t)$ a condición de que $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ y $F(x, t) = a^2 = T_0/\rho$.

◀ Suponiendo que la cuerda efectúa pequeñas oscilaciones, tenemos el primer problema de contorno: hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación de oscilaciones forzadas de la cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t), \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \tag{16}$$

que satisface las condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 \tag{17}$$

y las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{18}$$

Para hallar las funciones propias de la ecuación homogénea $u''_{tt} = a^2 u''_{xx}$ con las condiciones de frontera (18), pongamos $u(x, t) = X(x) T(t)$ y, después de dividir las variables, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \tag{19}$$

con las condiciones de frontera

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{20}$$

Resolviendo la ecuación $X'' - \lambda X = 0$ con las condiciones de contorno (20), encontramos los números propios $\lambda_k = -\left(\frac{\pi (2k-1)}{2l}\right)^2$ y las

funciones propias respectivas

$$X_k(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{21}$$

(véase el problema 2.35).

Considerando t como parámetro, desarrollemos la función $F(x, t)$ en serie según el sistema $\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$:

$$F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l},$$

donde

$$A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l F(v, t) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)v}{2l}\, dv, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Buscaremos la solución de la ecuación (16) en forma de la serie

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}, \tag{22}$$

sustituyendo la serie en (16) (suponemos que $c_k(t)$ son tales que es posible la derivación doble, término a término, respecto a x y respecto a t) y comparando los coeficientes de iguales armónicos, obtenemos un sistema infinito de ecuaciones diferenciales de segundo orden con respecto a las funciones $c_k(t)$:

$$c_k''(t) = \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = A_k(t), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{23}$$

De las condiciones iniciales (18) resulta que las funciones $c_k(t)$ deben satisfacer las condiciones

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}$$

$$u_t'(x, 0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(0) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}.$$

Sea

$$c_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(v) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)v}{2l}\, dv \tag{24}$$

y

$$c_k'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(v) \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)v}{2l}\, dv, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

es decir, $c_k(0)$ y $c_k'(0)$ *son los coeficientes de Fourier* de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, respectivamente, en el sistema (21). Hallemos ahora las soluciones $c_k(t)$ de las ecuaciones (23) que satisfacen las condiciones (24) y (25) y, sustituyéndolas en la serie (22), obtenemos la solución buscada $u(x, t)$.

Según la condición, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, por eso

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0 \quad \text{para todos los} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Luego, puesto que $F(x, t) = a^2$, entonces

$$A_k(t) = A_k = \frac{2}{l} \int_0^l a^2 \operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)v}{2l}\, dv =$$

$$= -\frac{2a^2}{l} \frac{2l}{\pi(2k-1)} \cos \frac{\pi(2k-1)v}{2l} \Big|_{v=0}^{l} = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}.$$

Por eso se necesita hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales

$$c_k''(t) + \frac{\pi^2 a^2 (2k-1)^2}{4l^2} c_k(t) = \frac{4a^2}{\pi(2k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N} \cdot \quad (26)$$

que satisfacen las condiciones

$$c_k(0) = c_k'(0) = 0. \quad (27)$$

Las raíces de la ecuación característica para la ecuación (26) son imaginarias, por eso las soluciones particulares de las ecuaciones (26) se buscan en forma de $\tilde{c}_k(t) = \gamma_k$. Sustituyendo estos valores en (26), hallamos que

$$\gamma_k = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}$$

y por eso la solución general de las ecuaciones (26) se escribirá en la forma

$$c_k(t) = \alpha_k \cos \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} + \beta_k \operatorname{sen} \frac{\pi a(2k-1)t}{2l} +$$

$$+ \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}, \quad k \in \mathbb{N}$$

y a partir de las condiciones (27) obtenemos

$$c_k(0) = \alpha_k + \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3} = 0,$$

$$c_k'(0) = \beta_k \frac{\pi a(2k-1)}{2l} = 0,$$

o sea, $\beta_k = 0$ y $\alpha_k = -\dfrac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ahora bien,

$$c_k(t) = \frac{16l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\left(1-\cos\frac{\pi a(2k-1)t}{2l}\right) = \frac{32l^2}{\pi^3(2k-1)^3}\operatorname{sen}^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}$$

y la solución buscada tiene la forma

$$u(x, t) = \frac{32l^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\operatorname{sen}^2\frac{\pi a(2k-1)t}{4l}\operatorname{sen}\frac{\pi(2k-1)x}{2l}. \blacktriangleright$$

En los ejemplos 3 y 4 las condiciones de contorno son homogéneas (véase la definición del problema de Sturm — Liouville antes del problema 2.32). Si se examina el problema con condiciones de contorno heterogéneas, entonces, con ayuda de la sustitución $u = v + U$, eligiendo de modo debido la función U, el problema se reduce a la resolución de la ecuación respecto a la función v con las condiciones de contorno homogéneas.

EJEMPLO 5. Hallar la distribución de la temperatura en el interior de un cilindro circular infinito de radio R si la temperatura inicial es igual a $u(r, 0) = \Phi(r) = u_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ y en la superficie lateral del mismo se mantiene la temperatura constante $u(R, t) = u_0$.

◀ La ecuación general de conducción del calor

$$u'_t(x, y, z, t) = a^2(u''_{xx}(x, y, z, t) + u''_{yy}(x, y, z, t) + u''_{zz}(x, y, z, t)$$

se transforma aplicando las coordenadas cilíndricas; en este caso se tiene en cuenta que la función u no depende de φ ni de z, o sea, $u = u(r, t)$. Tenemos la ecuación de propagación radial de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{28}$$

con la condición inicial

$$u(r, 0) = \Phi(r) = u_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

y la condición de contorno

$$u(R, t) = u_0.$$

Si $u_0 \neq 0$, la condición de contorno es heterogénea, por eso para aplicar el método de Fourier se realiza la sustitución

$$u(r, t) = v(r, t) + u_0.$$

Entonces la ecuación (28) se transforma en ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) \tag{29}$$

con la condición inicial

$$v(r,\ 0)=\Phi(r)-u_0=-u_0\frac{r^2}{R^2} \tag{30}$$

y la condición de contorno

$$v(R,\ t)=0. \tag{31}$$

Buscamos la solución de la ecuación (29) en forma del producto $v(r,\ t)=V(r)\,T(t)$. Entonces la ecuación (29) se reduce a la forma

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{V''+\frac{1}{r}V'}{V}=\lambda=-\omega^2.$$

La negatividad de estas relaciones resulta del hecho de que la ecuación $T'=a^2\lambda T$ tiene la solución $T(t)=ce^{a^2\lambda t}$ que no debe tender hacia la infinidad cuando $t\to\infty$. La segunda de estas relaciones, junto con la condición de frontera (31), da el problema de Sturm — Liouville

$$V''(r)+\frac{1}{r}V'(r)+\omega^2V(r)=0,\ V(R)=0. \tag{32}$$

Sustituyamos en esta ecuación la variable $\eta=\omega r$. Puesto que $V'_r=V'_\eta\omega$, $V''_{rr}=V''_{\eta\eta}\,\omega^2$, la ecuación se transforma del modo siguiente

$$\omega^2\left[V''_{\eta\eta}(\eta)+\frac{1}{\eta}V'_\eta(\eta)+V(\eta)\right]=0 \tag{33}$$

y llega a ser un caso particular (cuando $\nu=0$) de la ecuación de Bessel

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0.$$

Por consiguiente, la función de Bessel $I_0(\eta)$ de orden cero es la solución de la ecuación (33) y por eso la función $I_0(\omega r)$ será la solución de la ecuación (32). De la condición de frontera $V(R)=0$ resulta que sólo los números $\omega=\omega_k$ para los cuales $\omega_kR=\mu_k$, $k=1,2,\ldots$, donde μ_k son los ceros de la función de Bessel $I_0(\eta)$ ($I_0(\mu_k)=0$, $k\in\mathbb{N}$, pueden ser valores propios del problema (32). Las funciones $I_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$ serán funciones propias del problema (32).

Tomando en consideración que las funciones $T_k(t)=A_ke^{-\frac{a^2\mu_k^2}{R^2}t}$ serán la solución de la ecuación $T'=a^2\lambda t$, para $\lambda=-\omega_k^2=-\left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2$, sacamos la conclusión de que las funciones

$$v_k(r,\ t)=A_ke^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2t}I_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$$

serán las soluciones de la ecuación (29) que satisfacen la condición (31). Escojamos los números A_k, $k \in \mathbb{N}$, de modo que la serie

$$v(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right)$$

satisfaga la condición (30), o sea, que

$$\Phi(r) - u_0 = -\frac{u_0 r^2}{R^2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right).$$

Designando $x = \frac{r}{R}$ vemos que los números A_k deben ser los coeficientes de Fourier — Bessel de la función $-u_0 \frac{r^2}{R^2} = -u_0 x^2$, o sea, (véase el problema 2.34)

$$A_k = \frac{2}{[I_0'(\mu_k)]^2} \int_0^1 x^2 I_0(\mu_k x)\, x\, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Utilizando las relaciones (véase el problema 4.77 del capítulo 12, parte 2) $xI_0(x) = \frac{d}{dx}[xI_1(x)]$ e $I_1(x) = -\frac{d}{dx}[I_0(x)]$, tenemos

$$\int_0^1 x^3 I_0(\mu_k x)\, dx = \frac{1}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} y^2 [yI_0(y)]\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} y^2 \frac{d}{dy}[yI_1(y)]\, dy = \frac{1}{\mu_k^4}\left[y^2 y I_1(y)\Big|_{y=0}^{\mu_k} -\right.$$

$$\left. -2\int_0^{\mu_k} y^2 I_1(y)\, dy\right] = \frac{1}{\mu_k} I_1(\mu_k) + \frac{2}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} y^2 \frac{d}{dy}[I_0(y)]\, dy =$$

$$= \frac{1}{\mu_k} I_1(\mu_k) + \frac{2}{\mu_k^4}\left[y^2 I_0(y)\Big|_{y=0}^{\mu_k} - 2\int_0^{\mu_k} y I_0(y)\, dy\right] =$$

$$= \frac{1}{\mu_k} I_1(\mu_k) - \frac{4}{\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} \frac{d}{dy}[yI_1(y)]\, dy = \frac{1}{\mu_k} I_1(\mu_k) - \frac{4}{\mu_k^3} I_1(\mu_k).$$

Ahora bien,

$$A_k = \frac{2}{[I_0'(\mu_k)]^2} I_1(\mu_k)\left(\frac{1}{\mu_k} - \frac{4}{\mu_k^3}\right) =$$

$$= \frac{2}{I_1^2(\mu_k)} I_1(\mu_k) \frac{\mu_k^2 - 4}{\mu_k^3} = \frac{2(\mu_k^2 - 4)}{\mu_k^3 I_1(\mu_k)}.$$

Por lo tanto, la solución buscada tiene la forma

$$u(r, t) = u_0 + v(r, t) =$$

$$= u_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 - 4}{\mu_k^3 I_1(\mu_k)} e^{-\left(\frac{a\mu_k}{R}\right)^2 t} I_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right). \blacktriangleright$$

Al resolver el problema de Cauchy, o sea, cuando las condiciones de contorno están sustituidas por la limitación de la solución en el infinito, el método de Fourier lleva a la utilización de la integral de Fourier.

EJEMPLO 6. Hallar la ley de distribución de la temperatura $u(x, t)$ en una varilla larga homogénea cuya superficie lateral está termoaislada y es conocida la distribución inicial de la temperatura

$$u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}.$$

◀ Despreciando la influencia que las condiciones de temperatura ejercen en los extremos de la varilla, consideraremos que ésta es infinita. Por eso tenemos el siguiente problema de Cauchy: hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \tag{34}$$

que satisface la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) = e^{-x^2}. \tag{35}$$

Supongamos que $\varphi(x)$ es absolutamente integrable sobre el eje $(-\infty, \infty)$. Buscamos la solución en forma del producto $u(x, t) = X(x) T(t)$, por eso la ecuación (34) se reduce a la forma

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\omega^2, \tag{36}$$

en este caso la relación es negativa en virtud del hecho de que para $t \to \infty$ la función $T(t) = e^{-a^2\omega^2 t}$ no debe crecer hasta el infinito. La segunda de las relaciones (36) conduce a la ecuación $X'' + \omega^2 X = 0$ cuyas soluciones son las funciones

$$X_\omega(x) = A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x$$

y por eso las funciones

$$u_\omega(x, t) = e^{-a^2\omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x)$$

son las soluciones de la ecuación (34). Si $A(\omega)$ y $B(\omega)$ son absolutamente integrables para $\omega \in [0, +\infty)$, la integral

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} u_\omega(x, t)\, d\omega = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x)\, d\omega \tag{37}$$

puede derivarse respecto a los parámetros t y x y tenemos

$$u'_t(x, t) = -a^2 \int_0^{+\infty} \omega^2 e^{-a^2\omega^2 t} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x)\, d\omega,$$

$$u''_{xx}(x, t) = -\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \omega^2 (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \operatorname{sen} \omega x)\, d\omega.$$

Por consiguiente, la función $u(x, t)$, definible por la integral (37) es la solución de la ecuación (34), por eso si escogemos

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau$$

y

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \operatorname{sen} \omega\tau\, d\tau$$

entonces la función $u(x, t)$ definible por la integral (37) satisfacerá también la condición (35). Ahora bien, la función

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t}\, d\omega \int_0^{+\infty} \varphi(\tau) [\cos \omega x \cos \omega\tau + \operatorname{sen} \omega x \operatorname{sen} \omega\tau]\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\, d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega (x - \tau)\, d\omega.$$

Utilizando la fórmula (véase el problema 4.28, capítulo 8, parte 2)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma\omega^2} \cos \delta\omega\, d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}}\, e^{-\frac{\delta^2}{4\gamma}},$$

calculamos la integral interior

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\omega^2 t} \cos \omega (x - \tau)\, d\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}$$

y por eso

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\, e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}\, d\tau.$$

En nuestro caso $\varphi(\tau)=e^{-\tau^2}$, por eso

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\tau^2+\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}\right)}d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\left(2\tau^2+\frac{(x-\tau)^2+(x+\tau)^2}{4a^2t}\right)}d\tau. \blacktriangleright$$

2.45. Hallar la desviación $u(x, t)$ de una cuerda homogénea, sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = l$, a partir de la posición de equilibrio si en el instante inicial la cuerda tenía la forma de una parábola cuyo vértice se encontraba en el punto $x = l/2$ y cuya desviación con respecto a la posición de equilibrio era igual a h, mientras que las velocidades iniciales no existían.

● Resuélvase la ecuación de oscilaciones de una cuerda sujetada en los extremos $u_{tt}^{\sim} = a^2 u_{xx}^{\sim}$ para las condiciones iniciales siguientes:

$$u(x, 0)=\frac{4hx(l-x)}{l^2},\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0.$$

2.46. Hallar las oscilaciones de una cuerda homogénea, sujetada en los extremos $x = 0$ y $x = l$, que se encuentra en la posición de equilibrio si en el instante inicial, dando un golpe con martillo contra el punto $x = l/3$, se comunica a la cuerda una velocidad inicial constante

$$\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=\begin{cases} v_0 \text{ para } \left|x-\frac{l}{3}\right|<\frac{\pi}{2h}, \\ 0 \text{ para } \left|x-\frac{l}{3}\right|>\frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

donde π/h es la anchura del martillo.

2.47. Hallar la ley de oscilaciones libres de una cuerda homogénea sujetada en el extremo $x = 0$ si su extremo derecho, cuando $x = l$, se traslada de modo que la tangente a la cuerda quede siempre horizontal. En el instante inicial la cuerda se encontraba en la posición de equilibrio y le fue comunicada la velocidad inicial $u_t'(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x/l$.

● En este caso las condiciones $u(0, t)=\frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=0$ son las de frontera y el sistema $\left\{\operatorname{sen}\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right\}_{k\in N}$ es el sistema de funciones propias.

2.48. Se comunica la velocidad inicial $v = \frac{x(l-x)}{l^2}$ a una cuerda homogénea, sujetada en el punto $x = l$, cuyo extremo izquierdo en el punto $x = 0$ puede desplazarse con la tangente horizontal. Hallar la ley de oscilaciones libres de la cuerda si en el instante inicial ésta tenía la forma $\varphi(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$.

● El sistema $\left\{\cos \frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right\}_{k \in N}$ es el sistema de funciones propias del problema.

2.49. En los extremos de una varilla isótropa homogénea de longitud l se mantiene la temperatura cero. Se supone que las paredes de la varilla son termoaisladas con respecto al medio ambiente. Hallar la ley de distribución de la temperatura en la varilla si se conoce que en el instante inicial se tenía la siguiente distribución de la temperatura: $u(x, 0) = u_0 \frac{x(l-x)}{l^2}$, donde $u_0 = \text{const}$.

● Resuélvase la ecuación de propagación del calor $u'_t = a^2 u''_{xx}$.

2.50. Un extremo de una varilla (para $x = 0$) se mantiene a la temperatura constante igual a cero y el segundo extremo (para $x = l$) está termoaislado con respecto al medio ambiente (o, sea, la derivada de $u(x, t)$ respecto a x en este extremo es igual a cero: $u'_x(l, t) = 0$). Hallar la ley de distribución de la temperatura en el interior de la varilla si la temperatura inicial está definida por la función

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leqslant x < \frac{l}{2} \\ u_0 & \text{para } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

● El sistema

$$\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right\}_{k \in N}$$

es el sistema de funciones propias.

2.51. Hallar las oscilaciones libres de una membrana redonda homogénea, de radio l, sujetada en el borde si en el instante inicial la desviación en cada punto se definía por la igualdad $u(r, \varphi, 0) = \alpha I_0\left(\frac{\mu_1 r}{l}\right)$, en la cual μ_1 es la pri-

mera raíz positiva $I_0(x)$, y la velocidad inicial de la membrana es igual a ca, donde a es la constante que forma parte de la ecuación de oscilaciones de la membrana.

● Las condiciones iniciales no dependen de φ, por eso las oscilaciones son radiales y la ecuación se examina en la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$. El proceso ulterior de resolución es análogo al de resolución del ejemplo 5.

2.52. Se da la forma $u(x, y, 0)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{l}$ a una membrana cuadrada homogénea, de lado l, sujetada por el contorno. Hallar la ley de oscilaciones libres si la velocidad inicial de los puntos de membrana es constante e igual a a/l, donde a es la constante que forma parte de la ecuación de oscilaciones.

● Hágase uso de las fórmulas para los coeficientes $A_{k,n}$ y $B_{k,n}$ obtenidos en el ejemplo 3.

2.53.** Hallar la distribución estacionaria de la temperatura en un rectángulo $D=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$ si en la frontera del rectángulo se mantiene la temperatura dada:

$$u(x, 0)=u(x, b)=0, \qquad x \in (0, a),$$

$$u(0, y)=\varphi(y)=y(b-y), \quad u(a, y)=\psi(y)=\operatorname{sen}\frac{\pi y}{b},$$

$$y \in (0, b).$$

2.54*. Hallar la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace $\Delta u \equiv u''_{xx}+u''_{yy}=0$ en el rectángulo $D=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, que satisface las condiciones de contorno siguientes:

$$u(0, y)=y(b-y), \quad u(a, y)=\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x, b)}{\partial y}=0.$$

2.55. Hallar la solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace $\Delta u=0$ en el rectángulo $D=\{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b\}$, que satisface las condiciones

$$u(0, y)=\alpha, \quad u(a, y)=\alpha y, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x, b)}{\partial y}=0.$$

2.56.** Hallar la ley de distribución estacionaria de la temperatura en el interior de un cilindro circular infinito, de radio R, si sobre la superficie del mismo se mantiene la temperatura dada:

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = f(\varphi) = \operatorname{sen} \varphi.$$

2.57*. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t \geqslant 0$, resuélvase la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x-l),$$

siendo las condiciones iniciales y de contorno nulas

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

2.58*. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t \geqslant 0$, resuélvase la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi a t}{l},$$

siendo nulas las condiciones iniciales y las de contorno

$$u(x, 0) = u'_t(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

2.59. Hallar la temperatura de una varilla, para $0 \leqslant x \leqslant l$, provista de superficie lateral termoaislada, si la temperatura inicial de la varilla y la de sus extremos son iguales a cero, mientras que en el punto $x_0 \in (0, l)$ se encuentra una fuente concentrada con potencia constante Q.

● Se necesita hallar la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

con las condiciones iniciales y las de frontera nulas $u(x, 0) = u(0, t) = u(l, t) = 0$, en la cual $f(x, t) = Q\delta(x - x_0)/c\rho$, $\delta(x)$ es la función delta de Dirac, c es el calor específico y ρ es la densidad específica.

Al calcular los coeficientes $A_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(v, t) \operatorname{sen} \frac{\pi k v}{l} dv$, utilícese la siguiente propiedad de la función δ:

si $f(x)$ está definida y es continua en el punto x_0, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x - x_0)\, dx = f(x_0).$$

2.60. Para $0 \leqslant x \leqslant 2$ y $t \geqslant 0$ hállese la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2},$$

que satisface la condición inicial $u\,(x, 0) = 0$ y las condiciones de frontera $u\,(0, t) = 0$ y $u'_x\,(2, t) = 0$.

2.61.** Hallar la ley de oscilaciones libres de una cuerda cuyo extremo derecho, para $x = l$, está sujetado y cuyo extremo izquierdo, para $x = 0$, se mueve según la ley $u\,(0, t) = \operatorname{sen} \pi at/l$. La velocidad inicial y la desviación inicial de la cuerda son iguales a cero.

2.62. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t \geqslant 0$ hállese la solución de la ecuación $u'_t = a^2 u''_{xx}$, siendo la condición inicial $u\,(x, 0) = x/l$ y las condiciones de frontera $u\,(0, t) = 0$ y $u\,(l, t) = e^{-t}$.

● Para reducir las condiciones de frontera heterogéneas a las homogéneas efectúese la sustitución $u\,(x, t) = v\,(x, t) + xe^{-t}/l$.

2.63. Para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t \geqslant 0$, hállese la solución de la ecuación $u'_t = u''_{xx}$, siendo la condición inicial $u\,(x, 0) = 1$ y las condiciones de frontera $u\,(0, t) = e^{-\frac{t}{4l^2}}$ y $\frac{\partial u\,(l, t)}{\partial x} = 0$.

● Para reducir las condiciones de frontera heterogéneas a las homogéneas efectúese la sustitución $u\,(x, t) = v\,(x, t) + e^{-\frac{t}{4l^2}}$.

2.64. Hallar la solución del siguiente problema de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 \leqslant t < +\infty,$$

$$u\,(x, 0) = \begin{cases} A & \text{para } |x| \leqslant h, \\ 0 & \text{para } |x| > h. \end{cases}$$

§ 3. Métodos aproximados para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. Conceptos principales del método de diferencias finitas. Muchos problemas aplicados y teóricos de las ciencias naturales modernas conducen a las ecuaciones en derivadas parciales. Las más de las veces es imposible obtener la solución de estas ecuaciones en forma explícita, como fórmula finita, valiéndose de las funciones elementales o especiales. Por eso revisten gran importancia los métodos aproximados para resolver los problemas de contorno de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Nos limitaremos a examinar problemas de contorno para las ecuaciones lineales en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes en el dominio

D con frontera γ:

$$Lu = f(x, y), \qquad (x, y) \in D,$$
$$\Gamma u \mid_{x,y \in \gamma} = \varphi, \tag{1}$$

donde

$$Lu \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + gu,$$

a, b, c, d, k, g son las funciones de variables independientes x e y, exclusivamente, y Γ, cierto operador de condiciones de frontera. El método más aplicado para la resolución numérica del problema de

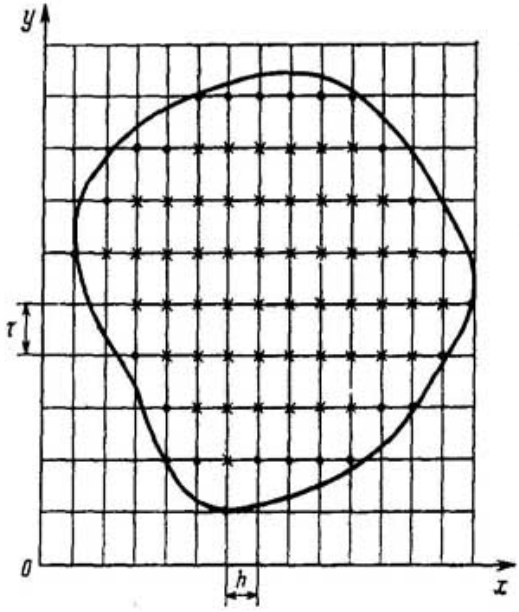


Fig. 208

contorno (1) es el de diferencias finitas (método de redes). La esencia de este método consiste en que la solución buscada $u(x, y)$ se representa en forma de una tabla $[u]^*$ de valores de esta solución en los puntos de cierto conjunto de puntos $D^* \subset D + \gamma$ llamado *red*. Los puntos del conjunto se denominan *nodos de la red*. Por lo general, como nodos de la red se toman los puntos de intersección de las rectas $x = x_0 + mh$, $y = y_0 + n\tau$ (véase la fig. 208), o sea, los puntos $(x_m, y_n) = (x_0 + mh, y_0 + n\tau)$. Los nodos en los cuales todos los cuatro nodos vecinos pertenecen al conjunto D^* se llaman *interiores*. En la fig. 208 están señalados con símbolo *. Designemos con D^*_{in} el conjunto de los nodos interiores. Los nodos en los cuales al menos uno de los cuatro nodos vecinos no pertenece al conjunto D^* se llaman *nodos de frontera*. En la fig. 208 están señalados con símbolo ●. La colección de los nodos de frontera se denomina *frontera* del dominio reticular y se designa con ΓD^*. Por solución exacta $[u]^*$ del problema de contorno (1) entendremos a continuación la tabla de valores de la solución buscada

$u(x, y)$ en los puntos $(x_m, y_n) = (x_0 + mh, y_0 + n\tau)$, o sea, $\{u(x_0 + mh, y_0 + n\tau)\} \equiv \{u_{m,n}\} = [u]$ *. Para obtener una solución aproximada del problema (1) todas las funciones a, b, c, d, k, g, f, u, que entran aquí, se sustituyen por sus valores en los nodos (x_m, y_n) designados, respectivamente, con $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, etc. Las derivadas parciales u'_x y u'_y se sustituyen por las diferencias centrales

$$u'_x(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n} - u_{m-1,\,n}}{2h},$$

$$u'_y(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m,\,n+1} - u_{m,\,n-1}}{2\tau}, \qquad (2)$$

o bien por las diferencias

$$u'_x(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n} - u_{m,\,n}}{h},$$

$$u'_y(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m,\,n+1} - u_{m,\,n}}{\tau}. \qquad (3)$$

Las segundas derivadas parciales se sustituyen por las diferencias

$$u''_{xx}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n} - 2u_{m,\,n} - u_{m-1,\,n}}{h^2}, \qquad (4)$$

$$u''_{xx}(x\ \ , y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n+1} - 2u_{m,\,n+1} + u_{m-1,\,n+1}}{h^2}, \qquad (4^*)$$

$$u''_{yy}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m,\,n+1} - 2u_{m,\,n} + u_{m,\,n-1}}{\tau^2} \qquad (5)$$

$$u''_{xy}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n+1} - u_{m+1,\,n-1} - u_{m-1,\,n+1} + u_{m-1,\,n-1}}{4h\tau}. \qquad (6)$$

La derivada mixta u''_{xy} puede ser sustituida también por tal diferencia:

$$u''_{xy}(x_m, y_n) \approx \frac{u_{m+1,\,n+1} - u_{m,\,n+1} - u_{m+1,\,n} + u_{m,\,n}}{h\tau}. \qquad (7)$$

Como resultado de tal sustitución en cada nodo interior $(x_m, y_n) \in \in D^*_{\text{in}}$ obtenemos una ecuación algebraica en diferencias que depende tanto del valor de $u_{m,n}$ como de los valores de $u(x, y)$ en los nodos vecinos de la red D^*. Las condiciones de contorno $\Gamma u|_{(x,\,y)\in\gamma} = = \varphi(x, y)$ se escriben asimismo en los nodos $(x_m, y_n) \in \Gamma D^*$, con la particularidad de que en calidad de valores de $\varphi(x_m, y_n)$ en estos nodos se eligen los valores de $\varphi(x, y)$ en los puntos $(x, y) \in \gamma$ que distan a partir de los nodos (x_m, y_n) en magnitudes menores que $\sqrt{h^2 + \tau^2}$. Designemos con $\overline{\varphi}$ la colección de los valores escogidos de $\overline{\varphi}(x_m, y_n)$, $(x_m, y_n) \in \Gamma D^*$, que son, hablando en general, aproximados y designemos con $\widetilde{f}$ la colección de los valores de $f(x_m, y_n)$ en los puntos $(x_m, y_n) \in D^*_{\text{in}}$.

Ahora bien, del problema de contorno (1) llegamos a un sistema de ecuaciones lineales con respecto a los valores buscados de $u_{m,n}$ de

al tabla $[u]^*$:

$$\begin{aligned} &\widetilde{L}\,[u]^* = \widetilde{f} \text{ en los puntos } D^*_{\text{in}}, \\ &\widetilde{\Gamma}\,[u]^* = \widetilde{\varphi} \text{ en los puntos } \Gamma D^*, \end{aligned} \tag{8}$$

donde $\widetilde{L}$ y $\widetilde{\Gamma}$ son ciertos operadores de diferencias, correspondientes a los operadores L y Γ. El sistema de ecuaciones (8) suele llamarse *esquema de diferencias que aproxima el problema de contorno* (1). Es cómodo, a veces, esribir el esquema de diferencias (8) en forma de $\widetilde{L}_1\,[u]^* = \widetilde{f}_1$, donde

$$\widetilde{L}_1 = \begin{cases} \widetilde{L} & \text{en} \quad D^*_{\text{in}}, \\ \widetilde{\Gamma} & \text{sobre} \quad \Gamma D^*; \end{cases} \qquad \widetilde{f}_1 = \begin{cases} \widetilde{f} & \text{en} \quad D^*_{\text{in}}, \\ \widetilde{\varphi} & \text{sobre} \quad \Gamma D^*. \end{cases} \tag{9}$$

Designemos con $[\widetilde{u}]$ la tabla de valores del esquema de diferencias (9).

EJEMPLO 1. Componer el esquema de diferencias para la ecuación de conducción del calor en el dominio $D = \{(x, t) \mid 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(b, t) = \psi_2(t). \tag{10}$$

◀ Representemos el problema inicial en forma de $L_1 u = f_1$, donde

$$L_1 u \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0), \quad 0 \leqslant x \leqslant b \\ u(0, t) \\ u(b, t) \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \end{cases} \qquad f_1(x, t) \equiv \begin{cases} f(x, t), \\ \varphi(x), \\ \psi_1(t), \\ \psi_2(t). \end{cases}$$

En calidad de la red D^* tomamos la colección de puntos de intersección de las rectas $x = mh$, $t = n\tau$, $m = 0, \ldots, k$, $n = 0, \ldots, s$, $k = [b/h]$, $s = [T/\tau]$. La tabla buscada de solución $[u]^*$ es $\{u(mh, n\tau)\}$. Para obtener la ecuación en diferencias sustituyamos la derivada u''_{xx} por la fórmula (4) y la derivada u'_t, por la fórmula (3). Si se introduce la designación

$$\widetilde{L}_1 u \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{m,\,n+1} - u_{m,\,n}}{\tau} - a^2 \dfrac{u_{m+1,\,n} - 2u_{m,\,n} + u_{m-1,\,n}}{h^2}, \\ \qquad 1 \leqslant m \leqslant k-1, \quad n = 0, \ldots, s-1, \\ u_{m,\,0}, \quad 0 \leqslant m \leqslant k, \\ u_{0,\,n}, \\ u_{k,\,n}, \quad 0 \leqslant n \leqslant s; \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_1 \equiv \begin{cases} f_{m,\,n} & 1 \leqslant m \leqslant k-1, \quad 0 \leqslant n \leqslant s-1, \\ \varphi_m, & m = 0, \ldots, k, \\ \psi_{1,\,n}, \\ \psi_{2,\,n}, & n = 0, \ldots, s, \end{cases}$$

entonces el esquema de diferencias buscado se escribirá en forma de $\widetilde{L}_1 [u]^* = \widetilde{f}_1$.

La solución del esquema de diferencias obtenido se encuentra sucesivamente por capas. Por capa se entiende la colección de los puntos de la red D^* que se encuentran sobre la recta $t = \text{const}$. Conociendo la solución en la n-ésima capa, se halla la solución en la capa $n + 1$. La solución en la capa $n = 0$ se encuentra a partir de las

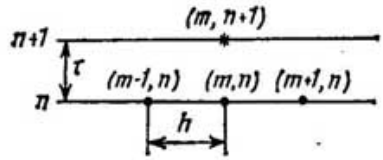


Fig. 209

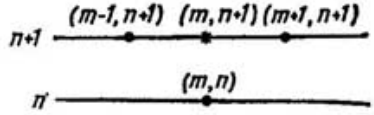


Fig. 210

condiciones iniciales, a saber, $u_{m,0} = \varphi_m$, $m = 0, \ldots, k$. Tales esquemas se llaman *explícitos*. Para facilitar la recordación del esquema de diferencias es útil asignarle un «molde», o sea, un cuadro geométrico de disposición de los nodos de la red, en los cuales los valores son ligados por la ecuación en diferencias a ciertos valores fijos m y n. Para un esquema explícito en el caso dado el molde tiene la forma indicada en la fig. 209. Con el signo * se señala el punto en el cual se calcula el valor de la solución buscada. Tales esquemas poseen un inconveniente considerable, a saber, para efectuar cálculos estables por medio de estos esquemas es necesario imponer restricciones adicionales sobre la red, o sea, concordar los valores de pasos por variables independientes. ▶

3.1. Utilizando para la sustitución de las derivadas u'_t y u''_{xx} las fórmulas (3,), (4*), obtener el esquema para determinar los valores de la solución del problema (10) del ejemplo 1 en los nodos de la capa $n + 1$. El molde de este esquema tiene la forma indicada en la fig. 210.

OBSERVACIÓN. A distinción del esquema construido en el ejemplo 1, donde los valores de la solución se buscan sucesivamente de una capa a otra, en el esquema dado, llamado implícito, para determinar los valores de la sucesión en los conjuntos de la capa $n + 1$ obtenemos un sistema de ecuaciones que ligan varios valores de la solución en los nodos de esta capa.

Componer los esquemas de diferencias para los siguientes problemas de contorno.

Componer los esquemas de diferencias para los siguientes problemas de contorno.

3.2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$, $u(0, t) = \psi_1(t)$, $u(b, t) = \psi_2(t)$, $D = \{(x, t) | 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

3.3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, $c > 0$, $d > 0$, $u|_\Gamma = \psi(x, y)$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant Y\}$.

Al sustituir el problema inicial (1) por el esquema de diferencias (9) introduzcamos un error que se llama *error de aproximación*. Designemos con $\delta\widetilde{f}_1$ *discrepancia* la que surge sustituyendo $[u]^*$ en el esquema de diferencias (9), o sea, $\delta\widetilde{f}_1 = \widetilde{L}_1 [u]^* - \widetilde{f}_1$. El error de aproximación puede estimarse con ayuda de la métrica en cierto espacio métrico S. Examinaremos los espacios vectoriales de dimensión finita, dependientes de la forma del esquema de diferencias, en los cuales la métrica se define por la relación $\rho_S(x, y) = \max_\nu | x_\nu - y_\nu |$, donde x_ν son las coordenadas del vector x e y_ν, las coordenadas del vector y. Supongamos que $\tau = h$. Diremos que el esquema de diferencias (9) *aproxima* el problema (1) para resolver u con el *orden de aproximación* n si $\rho_S(0, \delta\widetilde{f}_1) \leqslant Ch^n$, donde C es la constante que no depende de h.

Para estimar el orden de aproximación del problema de contorno (1) por el esquema de diferencias (9) se utiliza la fórmula de Taylor.

EJEMPLO 2. Determinar el orden de aproximación de la derivada $u'_x(x_m, y_n)$ por la fórmula (2).

◀ Suponiendo que la función $u(x, y)$ es dos veces derivable y aplicando la fórmula de Taylor para la función de dos variables, tenemos:

$$u(x_m+h, y_n) = u(x_m, y_n) + u'_x(x_m, y_n)\, h + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}(x_1, y_n), \quad x_1 \in (x_m, x_m+h).$$

De aquí encontramos

$$\frac{u(x_m+h, y_n) - u(x_m, y_n)}{h} \approx u'_x(x_m, y_n) + \frac{Mh}{2} = u'_x(x_m, y_n) + O(h),$$

donde $M = \max_{(x, y) \in D} | u''_{xx}(x, y)|$. Así pues, el orden de aproximación es igual a 1. ▶

EJEMPLO 3. Determinar el orden de aproximación del esquema de diferencias del ejemplo 1.

◀ Utilizando la fórmula de Taylor, obtenemos

$$\frac{u(x_m, t_n+\tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, t_1) \times$$

$$\times (t_m < t_1 < t_m + \tau),$$

$$\frac{u_{m+1, n} - 2u_{m, n} + u_{m-1, n}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_1, t_n) \times$$

$$\times (x_m - h < x_1 < x_m + h).$$

Con ayuda de estas relaciones el operador de diferencias $\widetilde{L}u$ se representa en la forma

$$\widetilde{L}u \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m, t_n)} + \left[\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m, t_1) - \frac{a^2 h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_1, t_n)\right].$$

La aproximación de las condiciones iniciales y de frontera para el dominio en examen no introduce un error. Ahora bien, la discrepancia para el esquema de diferencias dado tiene la forma

$$\delta\widetilde{f}_1 = \begin{cases} \dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_m,\ t_1) - \dfrac{a^2h^2}{12}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_1,\ t_n), \\ 0, \\ 0, \\ 0, \end{cases}$$

Si $\left|\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| \leqslant M_1 \left|\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right| \leqslant M_2$, entonces para la discrepancia tenemos la estimación siguiente:

$$\rho_S(0,\ \delta\widetilde{f}_1) = |\tau M_1' + h^2 M_2'| = O(\tau + h^2)$$

y esto quiere decir que el esquema tiene el primer orden de aproximación respecto a la variable t y el segundo, respecto a la variable x. ▶

3.4.** Investigar el orden de aproximación de las derivadas u_t' y u_{xx}'' por las fórmulas (3) (4).

3.5.** En el dominio $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant Y\}$ construir un esquema de diferencias de primer orden que aproxime el primer problema de contorno para la ecuación de tipo hiperbólico

$$Lu \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f,\quad a > 0,\ b > 0,$$

$$u|_{y=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x),\quad u|_{x=0} = \Phi(y),\ u|_{x=0} = F(y).$$

3.6*. En el dominio D del problema 3.5 construir un esquema de diferencias de segundo orden que aproxime el primer problema de contorno.

3.7*. En el dominio D construir un esquema de diferencias de primer orden que aproxime el tercer problema de contorno

$$Lu = f,\ u|_{y=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_1(y)\,u\right)\Big|_{x=0} = \Phi(y),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y)\,u\right)\Big|_{x=1} = F(y).$$

3.8.** Construir un esquema de diferencias de segundo orden que aproxime el tercer problema de contorno.

3.9*. Determinar el orden de aproximación del esquema de diferencias del problema 3.3.

En los problemas antes citados la sustitución del problema de contorno inicial por el esquema de diferencias se llevaba a cabo con ayuda de la sustitución de cada derivada parcial, que forma parte de

la ecuación, por las relaciones de diferencias. Un método más general de construir los esquemas de diferencias es *el de coeficientes indeterminados*. Consiste en que no se aproxima cada derivada por separado, sino a la vez todo el operador diferencial Lu. Para obtener una ecuación en diferencias que aproxime el operador diferencial Lu en el nodo (m, n), examinemos N nodos vecinos. Para hacer más sencilla la notación designemos el nodo (m, n) con el índice 0 y los demás nodos en consideración, con los números $1, 2, \ldots, N$. Hagamos una combinación lineal $\sum_{k=0}^{N} c_k u_k$ con coeficientes indeterminados c_k, donde u_k es el valor de $u(x, y)$ en el nodo k. Suponiendo que la función $u(x, y)$ es derivable $n+1$ veces, desarrollemos u_k por la fórmula de Taylor en el entorno del nodo 0. Suponiendo que la red es cuadrada ($\tau = h$), tenemos

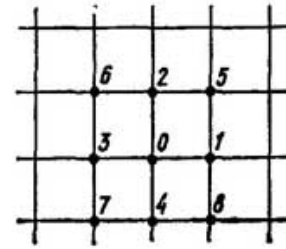


Fig. 211

$$\sum_{k=0}^{N} c_k u_k = \sum_{i+j \leqslant n} \gamma_{ij} \left(\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \, \partial y^j} \right) h^{i+j} + R. \tag{11}$$

Los coeficientes γ_{ij} se expresan linealmente por c_k. Escojamos los coeficientes c_k de modo que el segundo miembro de la igualdad (11) se distinga lo menor posible del valor de la expresión diferencial Lu en el nodo 0, o sea, que los coeficientes de las derivadas en la ecuación (1) coincidan con los coeficientes de las derivadas respectivas contenidas en el segun o miembro (11) e igualemos a cero los coeficientes de las derivadas superiores de orden r ($2 < r \leqslant n$) en (11), o sea,

$$\gamma_{ij} = 0 \quad \text{para} \quad 2 < i + j = r \leqslant n. \tag{12}$$

Tomando en cuenta que γ_{ij} se expresan por c_k, tenemos un sistema de ecuaciones respecto a c_k y al resolverlo obtendremos la aproximación del operador Lu en el nodo (m, n):

$$\sum_{k=0}^{N} c_k u_k = (Lu)_0 + O(h^{r-1}).$$

El sistema de ecuaciones (12) respecto a c_k puede tener varias soluciones, pero es suficiente tomar una de ellas. Utilizando en caso de necesidad un número bastante grande de nodos N, se puede obtener una buena aproximación de Lu en el nodo (m, n).

EJEMPLO 4. Valiéndose del método de coeficientes indeterminados, aproximar la ecuación $2u''_{xx} + 2u''_{xy} + 5u''_{yy} = f(x, y)$ hasta el orden de $n = 3$.

◀ Construyamos una cuadrícula D_h, o sea, escogemos igual a h el paso tanto para la variable x como para la y. En calidad de nodos vecinos tomamos 8 nodos (véase la fig. 211), o sea, $N = 8$. Tenemos

una combinación lineal

$$\sum_{k=0}^{8} c_k u_k = (Lu)_0.$$

Desarrollando u_k por la fórmula de Taylor en el entorno del nodo 0, tendremos

$$u_1 = u(x_0+h,\ y_0) = u_0 + u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_2 = u(x_0,\ y_0+h) = u_0 + u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 + \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_3 = u(x_0-h,\ y_0) = u_0 - u'_x h + \frac{u''_{xx}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{xxx}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_4 = u(x_0,\ y_0-h) = u_0 - u'_y h + \frac{u''_{yy}}{2!} h^2 - \frac{u'''_{yyy}}{3!} h^3 + O(h^4),$$

$$u_5 = u(x_0+h,\ y_0+h) = u_0 + u'_x h + u'_y h +$$

$$+ \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) + \frac{h^3}{3!}(u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4),$$

$$u_6 = u(x_0-h,\ y_0+h) = u_0 - u'_x h + u'_y h + \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!}(-u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} - 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4),$$

$$u_7 = u(x_0-h,\ y_0-h) = u_0 - u'_x h - u'_y h +$$

$$+ \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy}) - \frac{h^3}{3!}(u'''_{xxx} + 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} + u'''_{yyy}) + O(h^4),$$

$$u_8 = u(x_0+h,\ y_0-h) = u_0 + u'_x h - u'_y h + \frac{h^2}{2!}(u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy}) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!}(u'''_{xxx} - 3u'''_{x^2y} + 3u'''_{xy^2} - u'''_{yyy}) + O(h^4).$$

Sustituyamos estas expresiones en $(Lu)_0$ e igualémoslas al primer miembro de la ecuación inicial:

$$(Lu)_0 \equiv u_0(c_0+c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8) +$$

$$+ u'_x h(c_1 - c_3 + c_5 - c_6 - c_7 + c_8) + u'_y h(c_2 - c_4 + c_5 + c_6 - c_7 - c_8) +$$

$$+ u''_{xx}\frac{h^2}{2!}(c_1+c_3+c_5+c_6+c_7+c_8) +$$

$$+ u''_{yy}\frac{h^2}{2!}(c_2+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8) + \frac{2u''_{xy}}{2!} h^2(c_5 - c_6 + c_7 - c_8) +$$

$$+ \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}(c_1 - c_3) + \frac{h^3}{3!} u'''_{yyy}(c_2 - c_4) +$$

$$+\frac{h^3}{3!}c_5(u'''_{xxx}+3u'''_{x^2y}+3u'''_{xy^2}+u'''_{yyy})+$$

$$+\frac{h^3}{3!}c_6(-u'''_{xxx}+3u'''_{x^2y}-3u'''_{xy^2}+u'''_{yyy})-$$

$$-\frac{h^3}{3!}c_7(u'''_{xxx}+3u'''_{x^2y}+3u'''_{xy^2}+u'''_{yyy})+$$

$$+\frac{h^3}{3!}c_8(u'''_{xxx}-3u'''_{x^2y}+3u'''_{xy^2}-u'''_{yyy})+R(c_1, c_2, \ldots, c_8)h^4=$$

$$=2u''_{xx}+2u''_{xy}+5u''_{yy}.$$

Comparando los coeficientes de las derivadas respectivas, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales para determinar c_k, escogiendo en este caso $i+j=3$:

$$\begin{aligned}
c_0+c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+c_6+c_7+c_8&=0,\\
c_1\quad -c_3\quad +c_5-c_6-c_7+c_8&=0,\\
c_2\quad -c_4+c_5+c_6-c_7-c_8&=0,\\
c_1\quad +c_3\quad +c_5+c_6+c_7+c_8&=\frac{2}{h^2},\\
c^2\quad +c_4+c_5+c_6+c_7+c_8&=\frac{10}{h^2},\\
c_5-c_6-c_7+c_8&=\frac{2}{h^2},\\
c_1\quad -c_3+c_4+c_5-c_6-c_7+c_8&=0,\\
c_5+c_6-c_7-c_8&=0,\\
c^2\quad -c_4+c_5+c_6-c_7-c_8&=0.
\end{aligned}\qquad (13)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones (13), aplicando el método de eliminación. De las últimas cuatro ecuaciones obtenemos $c_5=c_7$, $c_2=c_4$. Utilizando estas igualdades, a base de la segunda y tercera ecuaciones del sistema determinamos que $c_6=c_8$, $c_1=c_3$. Podemos volver a escribir el sistema de ecuaciones (13) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
c_0+2c_1+2c_2+2c_5+2c_6&=0,\\
2c_1\quad +2c_5+2c_6&=\frac{4}{h^2},\\
2c_2+2c_5+2c_6&=\frac{10}{h^2},\\
2c_5-2c_6&=\frac{2}{h^2},\\
c_4&=0,\\
c_2&=0.
\end{aligned}\qquad (14)$$

Resolviendo el sistema (14), obtenemos los valores siguientes para las constantes buscadas:

$$c_0 = -\frac{2}{h^2}, \quad c_1 = -\frac{4}{h^2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{3}{h^2}, \quad c_4 = 0,$$

$$c_5 = \frac{3}{h^2}; \quad c_6 = \frac{2}{h^2}, \quad c_7 = \frac{3}{h^2}, \quad c_8 = \frac{2}{h^2}.$$

Finalmente, para el nodo 0 obtenemos la ecuación en diferencias

$$(-4u_0 - 3u_1 - 3u_3 + 3u_5 + 2u_6 + 3u_7 + 2u_8) = h^2 f_0,$$

o sea, para todos los nodos interiores de la cuadrícula D^* tiene lugar la fórmula

$$4u_{m,n} + 3u_{m+1,n} + 3u_{m-1,n} + 3u_{m+1,n+1} + 2u_{m-1,n+1} + \\ + 3u_{m-1,n-1} + 2u_{m,n+1} = -h^2 f_{m,n}.$$

El orden de aproximación es el segundo: $r - 1 = n - 1 = 2$. ▶

Obsérvese que el esquema obtenido es estable, puesto que está cumplida la condición de estabilidad para los esquemas de diferencias de las ecuaciones elípticas:

$$\frac{|b|}{a} < \frac{\tau}{h} \frac{c}{|b|}.$$

3.10*. Valiéndose del método de coeficientes no determinados, construir el esquema de diferencias para la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

hasta el orden $n = 3$ con ayuda del molde indicado en la fig. 212.

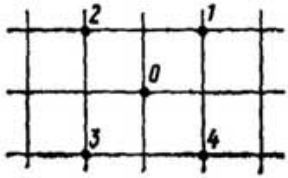


Fig. 212

2. Estabilidad numerable. Para la realización numérica del esquema de diferencias es necesario conocer que los valores de la solución, obtenidos por el método de diferencias finitas en los nodos, son próximos a los valores de la solución exacta. Para la práctica representan interés sólo esquemas de diferencias con cuya ayuda puede ser obtenida una solución suficientemente próxima a la exacta. Llamaremos *convergente* el esquema de diferencias, para el procedimiento dado de tender h y τ hacia el cero si la solución $[\tilde{u}]$ del sistema de ecuaciones en diferencias tiende hacia la solución exacta del problema. Por eso son de interés únicamente los esquemas para los cuales pequeños errores, cometidos en el proceso de resolución de las ecuaciones en diferencias, no crecen de una capa a otra. Tales esquemas se denominan *estables numerablemente*. La investigación de la estabilidad de esta índole está realizada bastante bien para los problemas de contorno evolutivos, tales, por ejemplo, como propagación del calor o de ondas. Nos limitaremos a examinar precisamente tales problemas y no procuraremos ofrecer definiciones más generales de la estabilidad de

esquemas de diferencias, puesto que a continuación estudiaremos exclusivamente esquemas de diferencias más simples que aproximan los problemas de contorno iniciales para las ecuaciones en derivadas parciales. Con el fin de investigar la estabilidad numerable es necesario representar el esquema de diferencias en la forma

$$u_{m,n+1} = T(h, \tau)\, u_{m,n} + \tau B f_{m,n}, \tag{15}$$

donde $T(h, \tau)$ es el operador de diferencias lineal que relaciona el valor de la solución en las capas temporales sucesivas con los números n y $n+1$; B, cierto operador cuya forma se determina por el problema concreto. Para investigar la estabilidad numerable del esquema (15) suele aplicarse el procedimiento siguiente. Se examinan perturbaciones parciales de la solución, representables en forma de armónicos complejos

$$u^*_{m,n} = \tilde{u}_n e^{i\nu x_m}, \quad u^*_{m,n+1} = \tilde{u}_{n+1} e^{i\nu x_m}, \tag{16}$$

donde ν es la frecuencia, $\tilde{u}_n$ y $\tilde{u}_{n+1}$ son las amplitudes y se investiga la estabilidad del esquema homogéneo

$$u_{m,n+1} = T(h, \tau)\, u_{m,n} \tag{17}$$

sobre estas perturbaciones. En este caso por *estabilidad* se entiende el cumplimiento de la relación $|\tilde{u}_{n+1}| \leqslant |\tilde{u}_n|$ para todas las ν. Con el fin de obtener la dependencia entre las amplitudes de los armónicos de Fourier de las capas temporales n, $n+1$ sustituyamos (16) en (17) y de la relación obtenida deducimos la igualdad

$$\tilde{u}_{n+1} = R(h, \tau, \nu)\, \tilde{u}_n, \tag{18}$$

donde $R(h, \tau, \nu)$ es cierto operador que liga las amplitudes respectivas de los armónicos de Fourier. El operador $R(h, \tau, \nu)$ puede ser función escalar, verbi grasia en el ejemplo 5 citado posteriormente, o matriz (véase el problema 3.12). Si designamos con λ_j el número propio del operador R, la condición de estabilidad se escribirá en forma de $|\lambda_j| \leqslant 1$ para todas las ν. Además de la condición indicada de estabilidad, se utilizan también algunas otras, en particular, la condición de estabilidad $|\lambda_j| \leqslant 1 + O(\tau)$ que admite un crecimiento exponencial de los errores de la solución en el tiempo, de una capa a otra.

EJEMPLO 5. Investigar la estabilidad del esquema de diferencias dado en el ejemplo 1.

◀ Al utilizar la ecuación en diferencias homogénea correspondiente, determinemos el factor de paso por la fórmula (18), haciendo uso de la relación (16):

$$\tilde{u}_{n+1} e^{i\nu x_m} = \tilde{u}_n e^{i\nu x_m} + \frac{a^2\tau}{h^2} \left[e^{i\nu x_{m+1}} - 2e^{i\nu x_m} + e^{i\nu x_{m-1}}\right] \tilde{u}_n.$$

Después de efectuar las transformaciones obtenemos la ligazón entre las amplitudes

$$\tilde{u}_{n+1} = \left[1 + \frac{a^2\tau}{h^2} \left(e^{i\nu h} - 2 + e^{-i\nu h}\right)\right] \tilde{u}_n.$$

Tomando en cuenta que $e^{i\nu h}-2+e^{-i\nu h}=-4\left(\frac{e^{\frac{i\nu h}{2}}-e^{-\frac{i\nu h}{2}}}{2i}\right)^2=$

$=-4\operatorname{sen}^2\frac{\nu h}{2}$, tenemos

$$R(h,\ \tau,\ \nu)=1-\frac{4a^2\tau}{h^2}\operatorname{sen}^2\frac{\nu h}{2}.$$

Ahora bien, la desigualdad

$$\left|1-\frac{4a^2\tau}{h^2}\operatorname{sen}^2\frac{\nu h}{2}\right|\leqslant 1$$

es la condición de estabilidad. Esta condición debe cumplirse para todas las ν. Sustituyendo el valor del seno por la unidad, obtenemos la relación

$$\tau\leqslant\frac{h^2}{2a^2}. \tag{19}$$

por lo tanto, para obtener una solución numérica estable es necesario que los pasos h y τ satisfagan la desigualdad (19). Esto es la condición de estabilidad del esquema explícito indicado en el ejemplo 1. ▶

3.11*. Investigar la estabilidad del esquema de diferencias indicado en el problema 3.1.

3.12.** Investigar la estabilidad del esquema de diferencias indicado en el problema 3.2.

3. Método de recorrido. Al resolver un esquema de diferencias implícito es cómodo aplicar el método de recorrido, o sea, el método modificado de eliminación destinado para la resolución de un sistema de ecuaciones lineales de tipo especial. Vamos a analizar la esencia de este método, basándonos en el esquema de diferencias implícito para la ecuación de conducción del calor (véase el problema 3.1). Introduzcamos las designaciones

$$a_{m,\ n+1}=-\frac{a^2\tau}{h^2},\quad b_{m,\ n+1}=1+\frac{2a^2\tau}{h^2},\quad g_{m,\ n+1}=u_{m,\ n}+\tau f_{m,\ n+1}. \tag{20}$$

Escribamos el esquema de diferencias, indicado en el problema 3.1, en la forma siguiente:

$$u_{0,\ n}=\psi_{1,\ n},$$

$$a_{m,\ n+1}u_{m-1,\ n+1}+b_{m,\ n}u_{m,\ n+1}+a_{m,\ n+1}u_{m+1,\ n+1}=g_{m,\ n+1}, \tag{21}$$

$$u_{k,\ n}=\psi_{2,\ n},\quad n=0,\ \ldots,\ s-1,$$

$$u_{m,\ 0}=\varphi_m,\quad m=1,\ \ldots,\ k-1.$$

Para cada valor fijo n el sistema de ecuaciones (21) coincide con el sistema

$$u_0 = \varphi,$$

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = g_n, \qquad n = 1, \ldots, N-1, \tag{22}$$

$$u_N = \varphi,$$

para el cual es válido

LEMA. *El sistema de ecuaciones* (22) *cuyos coeficientes satisfacen las desigualdades* $|b_n| \geqslant 1 + |a_n| + |c_n|$ *es resoluble cualesquiera que sean los segundos miembros y para su solución es válida la estimación*

$$|u| \leqslant \max\{|\varphi|, |g_1|, \ldots, |g_{n-1}|, |\psi|\}.$$

Para el sistema (21) las condiciones del lema están cumplidas. El sistema de ecuaciones (21) es cómodo resolverlo con ayuda del método llamado *método de recorrido*. Buscaremos la solución del sistema (21), para cada valor fijo n, en la forma

$$u_{m-1,n+1} = Q_{m,n+1} u_{m,n+1} + H_{m,n+1}, \quad m = k, \ldots, 2 \tag{23}$$

Eliminando $u_{m-1\,n+1}$ del sistema (21), obtenemos

$$u_{m,\,n+1} = -\frac{a_{m,\,n+1}}{a_{m,\,n+1}Q_{m,\,n+1} + b_{m,\,n+1}} u_{m+1,\,n+1} + \\ + \frac{g_{m,\,n+1} - a_{m,\,n+1}H_{m,\,n+1}}{a_{m,\,n+1}Q_{m,\,n+1} + b_{m,\,n+1}}. \tag{24}$$

La relación (24) liga los valores de las funciones $u_{m,n+1}$, $u_{m+1,n+1}$ y por eso se puede escribir

$$u_{m,\,n+1} = Q_{m+1,\,n+1} u_{m+1,\,n+1} + H_{m+1,\,n+1}. \tag{25}$$

Comparando las relaciones (24) y (25), tenemos

$$Q_{m+1,\,n+1} = -\frac{a_{m,\,n+1}}{a_{m,\,n+1}Q_{m,\,n+1} + b_{m,\,n+1}}, \\ H_{m+1,\,n+1} = \frac{g_{m,\,n+1} - a_{m,\,n+1}H_{m,\,n+1}}{a_{m,\,n+1}Q_{m,\,n+1} + b_{m,\,n+1}}. \tag{26}$$

Las relaciones (26) determinan los valores de todos los coeficientes de recorrido $Q_{m,n}$, $H_{m,n}$. Con ayuda de estas ecuaciones la red es recorrida hacia arriba por m desde el valor de 1 hasta el valor de $k-1$, quedando fijo el valor n. En éste se determinan todos los valores de $Q_{m,n}$, $H_{m,n}$ en la red (*recorrido directo*). Una vez determinados todos los coeficientes de recorrido $Q_{m,n}$, $H_{m,n}$, se recorre la red hacia abajo desde el valor k hasta 2, determinando consecutivamente los valores $u_{m,n}$ a partir de la ecuación (23) (*recorrido inverso*). La condición de frontera para $m = 0$ determina los valores iniciales de $Q_{1,n+1}$, $H_{1,n+1}$ y, en el caso general, la condición de frontera para $m = k$ determina el primer valor de u_k. El método de recorrido posee la propiedad que se expresa en lo que los errores de redondeo, obtenidos a cada paso, no se acrecientan. Esta propiedad del recorrido sirve de base para aplicar en gran escala el método en cuestión.

3.13.** Determinar los valores iniciales de los coeficientes de recorrido y el valor u_k para la resolución de la ecuación parabólica en caso de las condiciones de frontera

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = \Phi_1, \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=1} = \Phi_2.$$

4. Resolución numérica de los problemas de contorno.

En los problemas 3.14—3.25, utilizando los esquemas de diferencias examinados anteriormente, hallar una solución numérica aproximada.

3.14. $2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tx^2 = 0$, $D = \{(x, t) | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $u|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \operatorname{sen} x$, $u|_{x=0} = e^t - 1$, $u|_{x=2} = 4\cos t$.

3.15. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 8xy = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u(0, x) = x$, $u(0, y) = y$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$, $u(1, y) = 1 - y$.

3.16. $u_{xx} - 4u_{yy} = xy$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ $u_{y=0} = x^2 + 1$, $u'_y|_{y=0} = \frac{x^2}{2} + 6$, $u|_{x=0} = \operatorname{sen} y + 1$, $u|_{x=2} = 5\cos y$.

3.17. $u_{xx} - 4u_{yy} - xy = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{y=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 8x - 2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + yu\right)\Big|_{x=0} = y^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^2 u\right)\Big|_{x=1} = 5y^3 + 4y$.

3.18. $u_{xx} - 4u_{yy} = e^{xy}$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{y=0} = 4x + 5$, $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 1$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen} yu\right)\Big|_{x=0} = 5y$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + y^3 u\right)\Big|_{x=1} = \cos y$.

Resolver los problemas 3.19—3.22, utilizando esquemas explícito e implícito.

3.19. $\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{y=0} = 1 - \frac{x}{2}$, $u|_{x=0} = \cos y$, $u|_{x=2} = \operatorname{sen} y$.

3.20. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 1 = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u(x, 0) = x^2$, $u|_{x=1} = e^{x}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right)\Big|_{x=0} = 0$.

3.21. $4u_t - 2u_{xx} + xt = 0$, $D = \{(x, t) | 0 \leqslant x \leqslant 2, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $u|_{t=0} = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = t$, $\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=2} = 0$.

3.22. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8x^2 t^4$, $D = \{(x, t) | 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $u|_{t=0} = \operatorname{sen} \pi x$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 0{,}5u\right)\Big|_{x=0} = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 0{,}5u\right)\Big|_{x=1} = 0$.

Resolver los siguientes problemas de Dirichlet.

3.23. $2u_{xx} + u_{yy} = x^2 + 2xy$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{y=0} = 1 + x$, $u|_{x=2} = 3 - y^2$, $u|_{x=0} = 1 + 5y$, $u|_{y=1} = 6 - x^2$.

3.24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{x=0} = 2y^2$, $u|_{x=1} = y^2 + 4y$, $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=1} = x^2 + 2x + 2$.

3.25. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{sen} xy$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant y + 1, \ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, $u|_{y=0} = x$, $u|_{y=x-1} = xy + 1$, $u|_{y=1} = 5 - x$, $u|_{x=0} = 5y$.

3.26. $2u_{xx} + 4u_{yy} + yx = 0$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 2, \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $u|_{x=0} = 5y$, $u|_{y=0} = \sqrt{x}$, $u|_{y=1} = 5 - x^2$, $u|_{x=2} = \sqrt{\frac{2}{y+1}}$.

En los problemas 3.27—3.31 háganse en el Fortran los subprogramas para la solución numérica de las ecuaciones en derivadas parciales con ayuda del método de diferencias finitas, utilizando los esquemas de diferencias anteriormente examinados. En calidad de parámetros de los subprogramas utilizar: F, F1, PSI1, PSI2, DLT1, DLT2, etc., los identificadores de los subprogramas funciones que calculan los valores de los segundos miembros de las ecuaciones, así como las condiciones iniciales y de contorno, respectivamente.

3.27. Hacer el subprograma para resolver la ecuación parabólica $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$, $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u|_{x=0} = \psi_1(t)$, $u|_{x=1} = \psi_2(t)$, con

ayuda del método explícito, utilizando el esquema del ejemplo 1.

3.28. Hacer el subprograma para resolver el primer problema de contorno, utilizando el esquema de diferencias del problema 3.6.

3.29. Hacer el subprograma para resolver el tercer problema de contorno, utilizando el esquema de diferencias del problema 3.8.

3.30*. Hacer el subprograma para resolver la ecuación de Poisson, utilizando el esquema de diferencias del problema 3.3.

3.31. Hacer el subprograma para resolver la ecuación de conducción del calor con ayuda del método de recorrido, utilizando el esquema de diferencias del problema 3.1: a) las condiciones de frontera no contienen derivadas; b) las condiciones de frontera son del tipo general (véase el problema 3.13).

3.32. Redactar en el Fortran los subprogramas funciones para calcular las funciones de los segundos miembros de las ecuaciones 3.14—3.26.

3.33. Redactar en el Fortran los subprogramas funciones para calcular las condiciones iniciales y de contorno en los problemas 3.14—3.26.

3.34*. Redactar en el Fortran los programas para resolver los problemas 3.14—3.26, utilizando los subprogramas obtenidos durante la resolución de los problemas 3.27—3.33.

RESPUESTAS

1.1. $\dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\rho} F(x, t)$, donde $u(x, t)$ es la desviación del punto de la cuerda, que tiene por abscisa x, a partir de la posición de equilibrio; $a^2 = T/\rho$; ρ es la densidad de la cuerda; $F(x, t)$, la densidad de distribución de las fuerzas exteriores que actúan sobre la cuerda. ◀ Sea $\alpha = \alpha(x, t)$ el ángulo agudo entre el eje de abscisas y la tangente a la cuerda en el punto con abscisa x en el instante t. La condición de que las oscilaciones sean pequeñas quiere decir que la magnitud $\alpha^2(x, t)$ puede ser despreciada y por eso tenemos $\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$. La longitud de toda parte M_1M_2 de la cuerda en el instante t se expresa por la fórmula

$$|M_1M_2| = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx;$$

puesto que $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx \alpha^2 \approx 0$, entonces

$$| M_1M_2 | \approx x_2 - x_1 = \Delta x.$$

Según la segunda ley de Newton la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la parte M_1M_2 de la cuerda es igual, en cuanto a la magnitud y el sentido, al vector de aceleración de esta parte, multiplicado por su masa. Calculemos todas las fuerzas que actúan sobre esta parte. Designemos con $F(x, t)$ la densidad de distribución de las fuerzas exteriores, entonces la fuerza exterior actuante sobre la parte M_1M_2 es igual a $F(x, t)\,\Delta x$. Luego, las fuerzas de tensión T_1 y T_2 que actúan sobre los extremos M_1 y M_2 están dirigidas por las tangentes a los arcos en los puntos respectivos. De la pequeñez de las oscilaciones y del hecho de que la resultante de estas fuerzas origina sólo un desplazamiento vertical, sacamos la conclusión de que la componente horizontal de la resultante es igual a cero, o sea, $-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 = 0$. Ya que $\cos \alpha_1 \approx \cos \alpha_2 \approx 1$, de aquí deducimos la igualdad $T_1 = T_2 = T$. Por consiguiente, la componente vertical de las fuerzas de tensión se da por la expresión $T \operatorname{sen} \alpha_2 - T \operatorname{sen} \alpha_1$ y la suma de todas las fuerzas $F_{M_1M_2}$ que actúan sobre la parte M_1M_2 es igual a

$$F_{M_1M_2} = T(\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1) + F(x, t)\,\Delta x.$$

Pero en el instante $t\alpha = \alpha(x) = \operatorname{arctg} u'_x$ y por eso

$$\operatorname{sen} \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha(x_1 + \Delta x) - \operatorname{sen} \alpha(x_1) =$$

$$= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x)(\alpha(x_1 + \Delta x) - \alpha(x_1)) =$$

$$= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x)(\operatorname{arctg} u'_x)'_x \Big|_{x = x_1 + \theta_1 \Delta x} \Delta x =$$

$$= \cos \alpha(x_1 + \theta \Delta x) \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (u'_x)^2}} u''_{xx}\right]\Bigg|_{x = x_1 + \theta_1 \Delta x} \Delta x$$

$$(0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta_1 < 1).$$

Con nuestras suposiciones $\cos \alpha(x_1 + \theta\,\Delta x) \approx 1$ y $(u'_x)^2 \Big|_{x = x_1 + \theta_1 \Delta x} \approx \approx 0$. Por lo tanto,

$$F_{M_1M_2} \approx T \frac{\partial^2 u(x_1 + \theta_1 \Delta x, t)}{\partial x^2} \Delta x + F(x, t)\,\Delta x. \qquad (*)$$

Por otro lado, considerando la parte M_1M_2 como punto material (para Δx suficientemente pequeño), tenemos

$$F_{M_1M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \rho \Delta x. \qquad (**)$$

Igualando, según la ley de Newton, las expresiones (*) y (**) y pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, para la función buscada $u(x, t)$ obtenemos la ecuación diferencial

$$u''_{tt} = \frac{T}{\rho} u''_{xx} + \frac{1}{\rho} F(x, t). \blacktriangleright$$

1.2. Hallar la función $u(x, t)$ definida para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $0 \leqslant t < +\infty$ que es la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$$

($a^2 = T/\rho$, T es la tensión de la cuerda; ρ, la densidad de la cuerda; $F(x, t)$, la densidad de distribución de las fuerzas exteriores) y que satisface las condiciones

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \text{ (condiciones de frontera)},$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \text{(condiciones iniciales)}$$

1.3. Hallar la función $u(x, t)$, definida para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $0 \leqslant t < +\infty$, que es la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\left(a^2 = \frac{T}{\rho}\right.$, T es la tensión y ρ, la densidad de la cuerda$\left.\right)$ y satisface las condiciones

$$\left.\begin{aligned} u(l, t) &= 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= 0, \end{aligned}\right\} \text{(condiciones de frontera)},$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(condiciones iniciales)}.$$

● La condición de frontera para $x = 0$ se obtiene teniendo en cuenta que en este extremo falta una fuerza exterior y, por consiguiente, la fuerza de tensión T, proporcional a $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}$, es igual a cero.

1.4. La tensión $u(x, t)$ y la intensidad de corriente $i(x, t)$ en los puntos de la línea deben satisfacer, en todo instante t, la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + (LC + RC) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + RGw(x, t).$$

◀ Consideramos la línea bifilar como sistema de inductancias, resistencias, capacidades y fugas uniformemente distribuidas (véase la fig. 213). Según la primera ley de Kirchhoff (la suma algebraica de las corrientes que convergen en el nudo es igual a cero) tenemos

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = C\Delta x \frac{\partial u}{\partial t} + G\Delta x u(x, t),$$

donde $C\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}$ es la corriente a través del condensador y $G\Delta x u(x, t)$ es la corriente de fuga. Dividiendo esta igualdad por Δx y pasando al

límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - Gu(x, t). \qquad (*)$$

Luego, de acuerdo con la segunda ley de Kirchhoff, la caída de tensión $u(x, t)$ en el trozo entre x y $x+\Delta x$ se compone de la caída

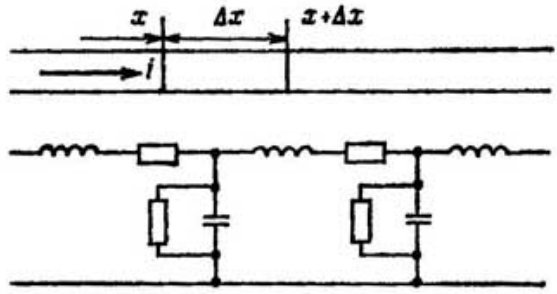


Fig. 213

de tensión en la inductancia $L\Delta x \dfrac{\partial i(x, t)}{\partial t}$ y de la caída de tensión en la resistencia $R\Delta x i(x, t)$, o sea,

$$u(x, t) - u(x+\Delta x, t) = L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R\Delta x i(x, t).$$

Dividiendo por Δx y pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - Ri(x, t). \qquad (**)$$

Las ecuaciones (*) y (**) se llaman *ecuaciones de una línea larga*. Eliminando de estas ecuaciones $i(x, t)$, llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial u}{\partial t} + RGu \qquad (***)$$

y eliminando $u(x, t)$ llegamos a la ecuación

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (LC + RG) \frac{\partial i}{\partial t} + RGi. \qquad (****)$$

Las ecuaciones (***) y (****) se llaman también *ecuaciones de los telegrafistas.* ▶ 1.5. Hallar las funciones $u(x, t)$ e $i(x, t)$, definidas para $0 \leqslant x < +\infty$ y $0 \leqslant t < +\infty$, que son las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

y satisfacen las condiciones

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0)=\varphi(x), \\ i(x, 0)=\psi(x) \end{array}\right\} \text{ (condiciones iniciales),}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t)=E_0, \\ u(+\infty, t)=i(+\infty, t)=0 \end{array}\right\} \text{ (condiciones de frontera)}$$

(las condiciones para $x = +\infty$ resultan de las consideraciones físicas). **1.6.** Hallar la función $u(x, t)$ que es la solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

y satisface las condiciones

$$u(x, 0) = u_0 \quad \text{(condición inicial)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t)=u_0, \\ u'_x(l, t)+\gamma[u(l, t)-\varphi(t)]=0 \end{array}\right\} \text{ (condiciones de frontera),}$$

donde γ es el coeficiente de intercambio del calor entre la varilla y el medio ambiente. ● Para obtener la condición de frontera cuando $x = l$ obsérvese que la cantidad de calor que pasa a través del extremo de la varilla en el transcurso de tiempo Δt es igual a $\Delta q = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} \times$ $\times S\,\Delta t$, donde S es el área de la sección transversal de la varilla y k, el coeficiente de conductibilidad térmica del material de la varilla. Por otro lado, Δq es proporcional al producto de diferencia de las temperaturas $u(l, t) - \varphi(t)$ por el área S y por el tiempo Δt, o sea, $\Delta q = h[u(l, t) - \varphi(t)]\,S\,\Delta t$, donde $h \geqslant 0$ depende del grado de aislamiento térmico del extremo de la varilla respecto al medio ambiente. Comparando ambas expresiones para Δq y designando $\gamma = \frac{h}{k}$, llegamos a la condición de frontera escrita. **1.7.** Supongamos que el sistema de coordenadas está escogido de modo que el ej Oz sea paralelo a la generatriz. Designemos con D el dominio limitado por la curva L en el plano Oxy. Hallar la función $u(x, y)$ que para todos los puntos $M(x, y) \in D$ satisface la condición

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

o sea, es armónica en el dominio D y en la frontera del dominio, o sea, en la curva L, satisface la condición

$$u(x, y)|_{(x, y)\in L}=f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ es la función continua dada sobre L. Para un proceso térmico establecido $\frac{\partial u}{\partial t}=0$. **1.8.** Ecuación parabólica. Escogiendo $\xi=\sqrt{y}-\sqrt{x}$ y $\eta=x$, después de las transformaciones obtenemos

la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$. **1.9.** Ecuación parabólica. Escogiendo $\xi=x^2+y^2$, $\eta=x$ para $\xi \neq \eta^2$, o sea, para $y \neq 0$, obtenemos la ecuación $u''_{\eta\eta}+\frac{2\xi}{\xi-\eta^2}u'_\xi=0$. Cuando $y=0$, tenemos la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. **1.10.** En el dominio $D=\{(x, y)\,|\,x \neq 0,\ y \neq 0\}$ es la ecuación hiperbólica, $u''_{\xi\eta}-\frac{\xi+2\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u'_\xi-\frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)}u'_\eta=0$. Cuando $x=0$ o bien $y=0$, es la ecuación parabólica. **1.11.** En el dominio $D=\{(x, y)\,|\,x \neq 0,\ y \neq 0\}$ es la ecuación elíptica, $u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}=0$. Cuando $x=0$ o bien $y=0$, es la ecuación parabólica. **1.12.** Ecuación hiperbólica, $u''_{\xi\eta}=0$. **1.13.** En el dominio $D=\{(x, y)\,|\,x \neq 0\}$ es la ecuación hiperbólica, $u''_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u'_\xi-u'_\eta)=0$. Cuando $x=0$, es la ecuación parabólica. **1.14.** En el dominio $D=\{(x, y)\,|\,x \neq 0\}$ es la ecuación elíptica, $u''_{\xi\xi}+u''_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u'_\eta=0$. Cuando $x=0$, es la ecuación parabólica. **1.15.** $u(x, y)=x\varphi(\sqrt{y}-\sqrt{x})+\psi(\sqrt{y}-\sqrt{x})$, donde $\varphi(v)$ y $\psi(v)$ son las funciones arbitrarias dos veces derivables. ◀ Escogiendo $\xi=\sqrt{y}-\sqrt{x}$ y $\eta=x$, reducimos la ecuación a la forma

$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$ (véase el problema 1.8) y al integrarla sucesivamente,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}=\varphi(\xi), \qquad u(\xi, \eta)=\eta\varphi(\xi)+\psi(\xi).$$

Substituyendo aquí ξ y η, obtenemos la solución buscada. ▶ **1.16.** $u(x, y)=\Phi(y-x+\cos x+x)+\Psi(y-x-\cos x)$, donde $\Phi(v)$ y $\Psi(v)$ son las funciones arbitrarias dos veces derivables.

2.1. $n(x, t)=\frac{x \operatorname{sen} x \cos at-at \cos x \operatorname{sen} at}{x^2-(at)^2}+$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2at}{1+x^2-(at)^2}.$$

● Designando la diferencia de los arcos tangents por α, o sea,

$$\operatorname{arctg}(x+at)-\operatorname{arctg}(x-at)=\alpha,$$

tenemos

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+at))-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-at))}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+at))\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x-at))}=$$

$$=\frac{x+at-x+at}{1+(x+at)(x-at)}=\frac{2at}{1+x^2-(at)^2}.$$

Precisamente de esta relación obtendremos la expresión para α.

2.2. $u(x, t)=\frac{1}{2}\left[\frac{x+t}{1+(x+t)^2}+\frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right]+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t.$

2.3. Si $0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{2a}$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant at, \\ x & \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant l-at, \\ l-at & \text{para} \quad l-at \leqslant x \leqslant l+at, \\ 2l-x & \text{para} \quad l+at \leqslant x \leqslant 2l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{para} \quad 2l-at \leqslant x \leqslant 2l+at, \\ 0 & \text{para los demás } x. \end{cases}$$

Si $\frac{l}{2a} \leqslant t \leqslant \frac{l}{a}$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad l-at \leqslant x \leqslant at, \\ l-at & \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad 2l-at \leqslant x \leqslant l+at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{para} \quad l+at \leqslant x \leqslant l+at, \\ 0 & \text{para los demás } x. \end{cases}$$

Si $\frac{l}{a} \leqslant t < +\infty$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant l-at, \\ l-\frac{1}{2}(x+at) & \text{para} \quad l-at \leqslant x \leqslant 2l-at, \\ \frac{1}{2}(x-at) & \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant l+at, \\ l-\frac{1}{2}(x-at) & \text{para} \quad l+at \leqslant x \leqslant 2l+at, \\ 0 & \text{para los demás } x. \end{cases}$$

$$\left(x, \frac{l}{2a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x+\frac{l}{2}\right) & \text{para} \quad -\frac{l}{2} \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}, \\ \frac{l}{2} & \text{para} \quad \frac{l}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3l}{2}, \\ \frac{5}{4}l-\frac{1}{3}x & \text{para} \quad \frac{3l}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5l}{2}, \\ 0 & \text{para los demás } x; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+l) & \text{para} \quad -l \leqslant x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}(l-x) & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{1}{2}(x-l) & \text{para} \quad l \leqslant x \leqslant 2l, \\ \frac{3l}{2} - \frac{x}{2} & \text{para} \quad 2l \leqslant x \leqslant 3l, \\ 0 & \text{para los demás } x. \end{cases}$$

● Examinar los casos de disposición distinta posible de los valores $x - at$ y $x + at$ sobre el eje x, a saber: si $x - at < 0$, el punto $x+at$ puede hallarse en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, l)$, $(l, 2l)$ y $(2l, +\infty)$; si $0 < x - at < l$, el punto $x + at$ puede hallarse en los intervalos $(0, l)$, $(l, 2l)$ y $(2l, +\infty)$; si $l < x - at < 2l$, el punto $x + at$ puede hallarse en los intervalos $(l, 2l)$ y $(2l, +\infty)$; si $2l < x - at < +\infty$, entonces también $x + at \in (2l, +\infty)$. 2.4. Si $0 \leqslant t \leqslant \frac{h}{2a}$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ para } -\infty < x \leqslant -h-at \text{ y para } h+at \leqslant x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x+at+h) & \text{para} \quad -h-at \leqslant x \leqslant at-h, \\ -at & \text{para} \quad at-h \leqslant x \leqslant -at, \\ x & \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant at, \\ at & \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant h-at, \\ \frac{1}{2}(-x+at+h) & \text{para} \quad h-at \leqslant x \leqslant h+at. \end{cases}$$

Si $\frac{h}{2a} \leqslant t \leqslant \frac{h}{a}$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ para } -\infty < x \leqslant -h-at \text{ y para } h+at \leqslant x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x+at+h) & \text{para} \quad -h-at \leqslant x \leqslant -at, \\ \frac{1}{2}(x+at-h) & \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant at-h, \\ x & \text{para} \quad -h+at \leqslant x \leqslant h-at, \\ \frac{1}{2}(x-at+h) & \text{para} \quad h-at \leqslant x \leqslant at, \\ \frac{1}{2}(-x+at+h) & \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant h+at. \end{cases}$$

Si $t \geqslant \frac{h}{a}$ tenemos

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ para } -\infty < x \leqslant -h-at \text{ y para } h+at \leqslant x < +\infty, \\ -\frac{1}{2}(x+at+h) \quad \text{para} \quad -h-at \leqslant x \leqslant -at, \\ \frac{1}{2}(x+at-h) \quad \text{para} \quad -at \leqslant x \leqslant h-at, \\ 0 \quad \text{para} \quad h-at \leqslant x \leqslant at-h, \\ \frac{1}{2}(x-at+h) \quad \text{para} \quad at-h \leqslant x \leqslant at, \\ \frac{1}{2}(-x+at+h) \quad \text{para} \quad at \leqslant x \leqslant h+at; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{h}{2a}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } x \in \left(-\infty, -\frac{3h}{2}\right) \cup \left(\frac{3h}{2}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2}\left(x+\frac{3h}{2}\right) & \text{para } x \in \left(-\frac{3h}{2}, -\frac{h}{2}\right), \\ x & \text{para } x \in \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(-x+\frac{3h}{2}\right) & \text{para } x \in \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right); \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3h}{4a}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } x \in \left(-\infty, -\frac{7h}{4}\right) \cup \left(\frac{7h}{4}, +\infty\right), \\ -\frac{1}{2}\left(x+\frac{7h}{4}\right) & \text{para } x \in \left(-\frac{7h}{4}, -\frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(x-\frac{h}{4}\right) & \text{para } x \in \left(-\frac{3h}{4}, -\frac{h}{4}\right), \\ x & \text{para } x \in \left(-\frac{h}{4}, \frac{h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(x+\frac{h}{4}\right) & \text{para } x \in \left(\frac{h}{4}, \frac{3h}{4}\right), \\ \frac{1}{2}\left(-x+\frac{7h}{4}\right) & \text{para } x \in \left(\frac{3h}{4}, \frac{7h}{4}\right). \end{cases}$$

● Examinar los casos de disposición distinta posible de los valores $x - at$ y $x + at$: si $x - at < -h$, entonces $x + at$ puede hallarse en los intervalos $(-\infty, -h)$, $(-h, 0)$, $(0, h)$ y $(h, +\infty)$; si $-h < x - at < 0$, entonces $x + at$ puede hallarse en los intervalos

$(-h, 0)$, $(0, h)$ y $(h, +\infty)$; si $0 < x - at < h$, entonces $x + at$ puede hallarse en los intervalos $(0, h)$ y $(h, +\infty)$; si $h < x - at < +\infty$, entonces también $x + at \in (h, +\infty)$.

2.5. $$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} at, & at \leqslant x < +\infty, \\ \frac{1}{a}(1 - \cos x \cos at), & 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

2.6. $$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \frac{(x-at)^2}{1+(x-at)^2}\right] & \text{para } x \geqslant at, \\ \frac{1}{2}\left[\frac{(x+at)^2}{1+(a+at)^2} - \frac{(at-x)^2}{1+(at-x)^2}\right] & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant at. \end{cases}$$

2.7. Si $0 \leqslant t \leqslant \frac{l}{a}$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l} & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant l - at, \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l}(x - at) & \text{para } l - at \leqslant x \leqslant l + at, \\ 0 & \text{para } l + at \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Si $\frac{l}{a} \leqslant t < +\infty$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant at - l \text{ y para } l + at \leqslant x < +\infty, \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l}(x - at) & \text{para } at - l \leqslant x \leqslant at + l. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{3l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l}\left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{para } \frac{3l}{4} \leqslant x \leqslant \frac{5l}{4}, \\ 0 & \text{para } \frac{5l}{4} \leqslant x < +\infty; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{3l}{4a}\right) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{4}, \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{l}\left(x - \frac{l}{4}\right) & \text{para } \frac{l}{4} \leqslant x \leqslant \frac{7l}{4}, \\ 0 & \text{para } \frac{7l}{4} \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

2.8. Si $0 \leqslant t < \frac{l}{a}$ entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} ct & \text{para } 0 \leqslant x < l - at, \\ \frac{c}{2a}(l + at - x) & \text{para } l - at \leqslant x < l + at, \\ 0 & \text{para } l + at \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

Si $\frac{l}{a} \leqslant t < +\infty$, entonces

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{cl}{a} & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant at - l, \\ \frac{c}{2a}(l + at - x) & \text{para} \quad at - l \leqslant x < at + l, \\ 0 & \text{para} \quad at + l \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{c}{2a}(2l - x) & \text{para } 0 \leqslant x < 2l \\ 0 & \text{para } 2l \leqslant x < +\infty; \end{cases}$$

$$u\left(x, \frac{5l}{a}\right) = \begin{cases} \frac{cl}{a} & \text{para } 0 \leqslant x < 4l, \\ \frac{c}{2a}(6l - x) & \text{para } 4l \leqslant x < 6l, \\ 0 & \text{para } 6l \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

2.9. ● Escribir la expresión $(x_n, y_n) - (x, y)$ en la forma $(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)$ y hacer uso de la desigualdad de Cauchy — Buniakovski. **2.11.** ● Mostrar que en una base ortonormalizada arbitraria el carácter fundamental de la sucesión de los vectores $\{x_n\}_{n \in N}$ es equivalente al carácter fundamental de las sucesiones numéricas de las coordenadas de los mismos. **2.14.** ● Utilizando los resultados de los problemas 2.12 y 2.13, demostrar la completitud del espacio l_2.

2.15. $\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)}\, dx \right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$

2.16. ● Sea $f(x)$ una función arbitraria de $C^{(2)}[-1, 1]$ y sea $h(t)$ una función discontinua, igual a -1 cuando $t < 0$ e igual a 1 cuando $t \geqslant 0$. De la desigualdad de Cauchy — Buniakovski para los integrales (desigualdad de Schwarz, véase el problema 2.15) se deduce que

$$\left(\int_{-1}^{1} (f(t) - \varphi_n(t))^2 dt \right)^{1/2} \geqslant \left(\int_{-1}^{1} (f(t)) - h(t))^2 dt \right)^{1/2} - \left(\int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Mostrar que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} (\varphi_n(t) - h(t))^2 dt = 0$$

y en virtud de la continuidad

$$\int_{-1}^{1} (f(t) - h(t))^2 dt > 0.$$

De aquí resulta que la integral $\int_{-1}^{1} (f(t)-\varphi_n(t))^2\,dt$ no puede tender al cero cuando $n \to \infty$, cualquiera que sea $f(t) \in C^{(1)}[-1, 1]$. 2.22. $\hat{P}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\hat{P}_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,x$, $\hat{P}_2(x)=\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$, $\hat{P}_3(x)=\sqrt{\frac{175}{8}}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$. 2.23. $\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\hat{T}_1(x)=$ $=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x$, $\hat{T}_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2x^2-1)$, $\hat{T}_3(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(4x^3-3x)$. 2.24. ● Al calcular las integrales es necesario efectuar la sustitución de la variable $\arccos x=\theta$. 2.25. $\varphi_0(x)=1$, $\varphi_1(x)=2\sqrt{3}\times$ $\times\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $\varphi_2(x)=6\sqrt{5}\left(x^2-x+\frac{1}{6}\right)$. 2.26. Véase la fig. 214. Las rectas verticales han sido trazadas en los puntos de discontinuidad sólo para mayor claridad. 2.29. Véase la fig. 215. Las rectas verticales están trazadas en los puntos de discontinuidad sólo para mayor claridad. 2.31. ◀ Teniendo en cuenta que $I_\nu(\alpha x)$ es la solución de la ecuación $xy''+y'+\left(\alpha^2 x-\frac{\nu}{x}\right)y=0$ (véase la parte 2, cap. 12, problema 4.80), o sea, de la ecuación

$$\frac{d}{dx}(xy')+\left(\alpha^2 x-\frac{\nu}{x}\right)y=0$$

y suponiendo $Z_\alpha = I_\nu(\alpha x)$ y $U_l = I_\nu(\mu_l^{(\nu)}x)$, se puede escribir

$$\frac{d}{dx}(xZ'_\alpha)+\left(\alpha^2 x-\frac{\nu^2}{x}\right)Z_\alpha=0$$

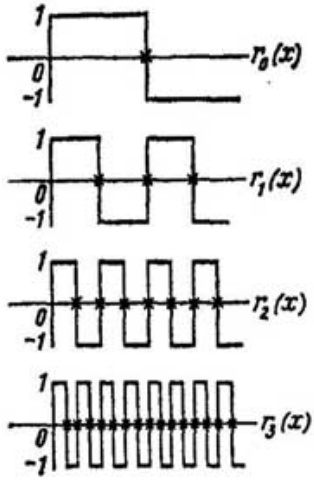


Fig. 214

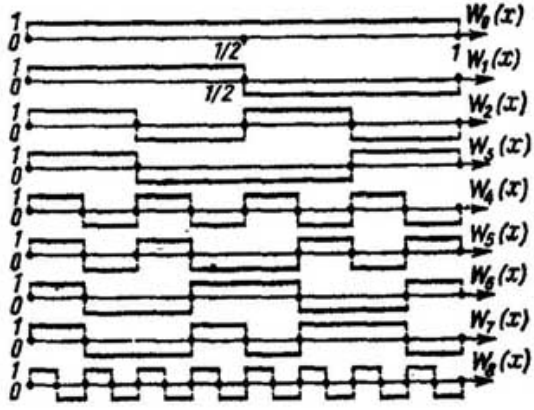


Fig. 215

y

$$\frac{d}{dx}(x+U_l')+\left((\mu_l^{(\nu)})\,x-\frac{\nu^2}{x}\right)U_l=0.$$

Multiplicando la primera igualdad por U_l y la segunda por Z_α, restando de la primera igualdad obtenida la segunda y tomando en consideración la relación

$$U_l\frac{d}{dx}(xZ_\alpha')-Z_\alpha\frac{d}{dx}(xU_l')=\frac{d}{dx}(Z_\alpha xU_l'-xU_lZ_\alpha'),$$

obtenemos

$$\frac{d}{dx}(xZ_\alpha U_l'-xU_lZ_\alpha')+x((\mu_l^{(\nu)})^2-\alpha^2)\,Z_\alpha U_l=0.$$

Integrando esta igualdad dentro de los límites de 0 hasta 1 y teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx}(Z_\alpha)=\frac{d}{dx}I_\nu(\alpha x)=\alpha I_\nu'(\alpha x)$ llegamos a la igualdad

$$(\mu_l^{(\nu)})^2-\alpha^2\int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)}x)\,I_\nu(\alpha x)\,x\,dx=-\mu_l^{(\nu)}I_\nu(\alpha)\,I_\nu'(\mu_l^{(\nu)}).$$

De aquí, cuando $\alpha=\mu_m^{(\nu)}\neq\mu_l^{(\nu)}$, obtenemos

$$\int_0^1 I_\nu(\mu_l^{(\nu)}x)\,I_\nu(\mu_m^{(\nu)}x)\,x\,dx=0$$

y pasando al límite cuando $\alpha\to\mu_l^{(\nu)}$, encontramos

$$\int_0^1[I_\nu(\mu_l^{(\nu)}x)]^2\,x\,dx=\lim_{\alpha\to\mu_l^{(\nu)}}\frac{\mu_l^{(\nu)}I_\nu(\alpha)\,I_\nu'(\mu_l^{(\nu)})}{\alpha^2-(\mu_l^{(\nu)})^2}=$$

$$=\frac{1}{2}[I_\nu'(\mu_l^{(\nu)})]^2\neq 0.\ \blacktriangleright$$

2.32. ● Escribir la igualdad (6) para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ y restar de una igualdad la otra. Al igual que durante la resolución del problema 2.31, después de integrar la igualdad obtenida sobre el segmento $[a, b]$, obtenemos la afirmación necesaria.

2.33. $\lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{l}$, $k\in\mathbb{N}$. ◀ De la solución general de la ecuación $y(x)=c_1e^{\sqrt{\lambda}x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$ cuando $\lambda>0$ o bien $y(x)=c_1x+c_2$ cuando $\lambda=0$ y de las condiciones de frontera resulta que una solución, distinta del cero idéntico, de este problema es posible únicamente cuando $\lambda<0$ (del sistema $\begin{cases}C_1+C_2=0\\ C_1e^{\sqrt{\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}l}=0\end{cases}$

y $\begin{cases} C_1=0 \\ C_2 l=0 \end{cases}$ tienen la solución nula $C_1=C_2=0$). Por eso suponemos $\lambda=-\omega^2$ y escribimos la ecuación general en forma de $y(x)=$ $=C_1\cos\omega x+C_2\operatorname{sen}\omega x$. De las condiciones de frontera resulta que $C_1=0$ y $C_2\operatorname{sen}\omega l=0$. Esto quiere decir que una solución, distinta del cero idéntico, del problema es sólo posible en el caso de que $\operatorname{sen}\omega l=0$, o sea, para $\omega=\omega_k=\dfrac{\pi k}{l}$, $k\in\mathbb{N}$. De aquí encontramos precisamente los números propios del problema 2.33. Las funciones $y_k(x)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi k x}{l}$, $k\in\mathbb{N}$, son las funciones propias de este problema. ▶

2.34. $\lambda_0=0$, $y_0(x)=1$, $\lambda_k=-\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2$, $y_k(x)=\cos\dfrac{k\pi x}{l}$, $k\in\mathbb{N}$.

2.35. $\lambda_k=-\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2$, $y_k(x)=\operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}$, $k\in\mathbb{N}$. 2.36. $c_k=$

$=\dfrac{2}{[I'_\nu(\mu_k^{(\nu)})]^2}\displaystyle\int_0^1 f(x)\,I_\nu(\mu_k^{(\nu)}x)\,x\,dx$, $k\in\mathbb{N}$. 2.37. $c_1=c_3=0$, $c_0=$

$=\dfrac{1}{2}$, $c_2=\dfrac{5}{8}$. ● Utilizar la paridad de la función $|x|$ y la paridad o imparidad de los polinomios respectivos. 2.38. $c_0=$

$=\pi\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $c_k=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\frac{\cos(k\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $k\in\mathbb{N}$.

2.39. $c_0=\dfrac{1}{2}$, $c_1=-\dfrac{1}{4}$, $c_2=-\dfrac{1}{8}$, $c_3=0$. 2.40. ● Utilizando la ortonormalidad de las funciones $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, escribir la integral en la forma

$$\int_a^b [f(x)-T_n(x)]^2\,dx=\int_a^b f^2(x)\,dx-2\sum_{k=0}^n \alpha_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=0}^n \alpha_k^2=$$

$$=\int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^n c_k^2+\sum_{k=0}^n (c_k-\alpha_k)^2.$$

2.42. $\dfrac{a_0^2}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$. 2.43. La igualdad de Parseval significa que el cuadrado del módulo del vector es igual a la suma de los cuadrados de todas sus coordenadas (en la base ortonormalizada) y la desigualdad de Bessel significa que el cuadrado del módulo del vector no es menor que la suma de los cuadrados de algunas de sus coordenadas. 2.44. ● Utilícese el hecho de que las funciones de Walsh $W_k(x)$ para $k\neq 2^n$ (véanse la definición delante del problema 2.29 y el problema 2.30) son ortogonales a las funciones de Rademacher $r_m(x)=W_{2m}(x)$.

2.45. $u(x,\ t)=\dfrac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{\pi(2k+1)at}{l}}{(2k+1)^3}\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}$.

2.46. $u(x,\ t)=\dfrac{4v_0l}{\pi^3a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi k}{3}\operatorname{sen}\dfrac{\pi^2k}{2lh}}{k^2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi kat}{l}\operatorname{sen}\dfrac{\pi kx}{l}$.

2.47. $u(x,\ t)=\dfrac{16l}{\pi^3a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi at}{2l}\times$

$\times\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}$.

2.48. $u(x,\ t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{-\dfrac{2}{(2k+1)(2k-3)}\cos\dfrac{(2k-1)\pi at}{2l}+\right.$

$\left.+\dfrac{4l}{\pi^3a}\left[-1+\dfrac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi}\right]\dfrac{1}{(2k-1)^3}\operatorname{sen}\dfrac{(2k-1)\pi at}{2l}\right\}\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}$.

2.49. $u(x,\ t)=\dfrac{8u_0}{\pi^3}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2m+1)^3}e^{-\left(\frac{(2m+1)\pi a}{l}\right)^2 t}\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi x}{l}$.

2.50. $u(x,\ t)=\dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4}}{2k+1}e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\times$

$\times\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}$.

2.51. $u(r,\ \varphi,\ t)=u(r,\ t)=\alpha\cos\dfrac{a\mu_1 t}{l}I_0\left(\dfrac{\mu_1}{l}r\right)+$

$+2cl\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\mu_k^2 I_1(\mu_k)}\operatorname{sen}\dfrac{a\mu_k t}{l}I_0\left(\dfrac{\mu_k}{l}r\right)$.

2.52. $u(x,\ y,\ t)=\left(\cos\dfrac{\pi a\sqrt{2t}}{l}+\dfrac{16}{\pi^3\sqrt{2}}\operatorname{sen}\dfrac{\pi a\sqrt{2t}}{l}\right)\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{l}\times$

$\times\operatorname{sen}\dfrac{\pi y}{l}+\dfrac{16}{\pi^3}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi a\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}{l}t}{(2k+1)(2n+1)\sqrt{(2k+1)^2+(2n+1)^2}}\times$

$\times\operatorname{sen}\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi y}{l}$.

2.53. $u(x,\ y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ka}{b}}\left[a_k\operatorname{sh}\dfrac{\pi k(a-x)}{b}+b_k\operatorname{sh}\dfrac{\pi kx}{b}\right]$,

donde $a_k = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi(v)\,\operatorname{sen}\frac{\pi k v}{b}\,dv = \frac{2}{b}\int_0^b v(b-v)\,\operatorname{sen}\frac{\pi k v}{b}\,dv =$

$$= \begin{cases} \dfrac{8b^2}{\pi^3(2m-1)^3} & \text{para } k = 2m-1, \\ 0 & \text{para } k = 2m,\ m \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$b_k = \frac{2}{b}\int_0^b \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{\pi k y}{b}\,dy = \begin{cases} 1 \text{ para } k = 1, \\ 0 \text{ para } k \geqslant 2. \end{cases}$$

◀ La determinación de la distribución estacionaria de la temperatura se reduce a la resolución de la ecuación de Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ con las condiciones de frontera dadas. La solución se busca en forma de $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$. Entonces tenemos las ecuaciones $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \omega^2$ y las condiciones de frontera $Y(0) = Y(b) = 0$. Ahora bien, el problema $Y'' + \omega^2 Y = 0$, $Y(0) = Y(b) = 0$ conduce a las funciones propias (véase el problema 2.23) $Y_k(y) = \operatorname{sen}\frac{\pi k y}{b}$ y a los números propios $-\left(\frac{\pi k}{b}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$. Escribamos las ecuaciones $X'' - \left(\frac{\pi k}{b}\right)^2 X = 0$ mediante las funciones hiperbólicas:

$$X_k(x) = a_k \operatorname{ch}\frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh}\frac{\pi k x}{b}.$$

Entonces la solución de la ecuación inicial $\Delta u = 0$, que satisface todas las condiciones de frontera, se escribe en la forma

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{ch}\frac{\pi k x}{b} + b_k \operatorname{sh}\frac{\pi k x}{b}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi k y}{b}.$$

Para determinar los números a_k y b_k obtenemos las relaciones

$$u(0, y) = \varphi(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen}\frac{\pi k y}{b}$$

y

$$u(a, y) = \psi(y) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \operatorname{ch}\frac{\pi k a}{b} + b_k \operatorname{sh}\frac{\pi k a}{b}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi k y}{b}$$

ce las cuales encontramos que

$$a_k=\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv=\frac{2}{b}\int_0^b v(b-v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{8b^2}{(2m-1)^3\pi^3} & \text{para } k=2m-1,\\ 0 & \text{para } k=2m,\ m\in\mathbb{N},\end{cases}$$

$$a_k\operatorname{ch}\frac{\pi ka}{b}+b_k\operatorname{sh}\frac{\pi ka}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b \psi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv.$$

De la última igualdad encontramos b_k:

$$b_k=\frac{1}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ka}{b}}\left[\frac{2}{b}\int_0^b \psi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv\operatorname{ch}\frac{\pi ka}{b}\right].$$

Sustituyendo los valores a_k y b_k en la serie para $u(x, y)$, obtenemos

$$u(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv\operatorname{ch}\frac{\pi kx}{b}+\right.$$

$$+\left[\frac{2}{b}\int_0^b \psi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv-\frac{2}{b}\int_0^b \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv\operatorname{ch}\frac{\pi ka}{b}\right]\times$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi kx}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ka}{b}}\right\}\operatorname{sen}\frac{\pi ky}{b}=\frac{2}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^b \varphi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv\times\right.$$

$$\times\left[\operatorname{ch}\frac{\pi kx}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi ka}{b}-\operatorname{ch}\frac{\pi ka}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi kx}{b}\right]+$$

$$\left.+\int_0^b \psi(v)\operatorname{sen}\frac{\pi kv}{b}\,dv\operatorname{sh}\frac{\pi kx}{b}\right\}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ka}{b}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi ky}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi ka}{b}}\left[a_k\operatorname{sh}\frac{\pi k(a-x)}{b}+b_k\operatorname{sh}\frac{\pi kx}{b}\right].\ \blacktriangleright$$

2.54. $u(x, y)=-\dfrac{b^2}{6a}x+\dfrac{b^2}{6}+\dfrac{b^2}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{2m\pi(x-a)}{b}}{m^2\operatorname{sh}\dfrac{2m\pi a}{b}}\cos\dfrac{2m\pi y}{b}$.

● Los números $-\left(\dfrac{\pi k}{b}\right)^2$, $k=0, 1, \ldots$ son los números propios del problema respectivo de Sturm—Lioville y las funciones propias que les corresponden tienen la forma $Y_k(y)=\cos\dfrac{\pi k y}{b}$, $k=0, 1, \ldots$ Por eso la ecuación $X''-\left(\dfrac{\pi k}{6}\right)^2 X=0$ tiene el sistema de ecuaciones

$$X_0(x)=a_0x+b_0 \text{ y } X_k(x)=a_k\operatorname{ch}\frac{\pi kx}{b}+b_k\operatorname{sh}\frac{\pi kx}{b},\ k\in\mathbb{N}.$$

2.55. $u(x, y)=\alpha+\dfrac{\alpha(b-2)}{2a}x-\dfrac{4\alpha b}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2m-1)^2}\times$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\dfrac{(2m-1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{(2m-1)\pi a}{b}}\cos\frac{(2m-1)\pi y}{b}.$$

2.56. $u(r, \varphi)=A_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(A_kr^k\cos k\varphi+B_kr^k\operatorname{sen}k\varphi)=\dfrac{r}{R}\operatorname{sen}\varphi$, donde

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\,d\varphi=0,\quad A_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=0,\quad k\in\mathbb{N},$$

$$B_1=\frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=\frac{1}{R},\quad B_k=\frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\operatorname{sen}k\varphi\,d\varphi=0,$$

$k\geqslant 2$. ◀ La ecuación de Laplace en las coordenadas polares tiene la forma $\dfrac{\partial^2u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=0$ (u no depende de z). La solución $u(r, \varphi)$ debe ser limitada cuando $0\leqslant r\leqslant R$ y periódica respecto a φ, o sea, $u(r, \varphi+2\pi)=u(r, \varphi)$. Suponiendo $u(r, \varphi)=X(r)\Phi(\varphi)$, llegamos a la ecuación

$$\frac{\dfrac{1}{r}X'(r)+X''(r)}{\dfrac{1}{r^2}X(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda. \qquad (*)$$

La solución de la ecuación $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$ debe tener el período 2π y por eso $\lambda=k^2$, $k=0, 1, \ldots$, y tenemos

$$\Phi_k(\varphi)=a_k\cos k\varphi+b_k\operatorname{sen}k\varphi.$$

Cuando $\lambda = k^2$, del primer miembro de (*) obtenemos la ecuación de Euler

$$r^2X''(r) + rX'(r) - k^2X(r) = 0,$$

la cual, mediante la sustitución $r = e^v$ se reduce a la ecuación $X''(v) = 0$ para $k = 0$ y a la ecuación $X''(v) - k^2X(v) = 0$ para $k \geqslant 1$ cuyas soluciones serán las funciones $X_0(v) = a_0v + b_0$, $X_{k,1}(v) = e^{kv} = r^k$ y $X_{k,2}(v) = e^{-kv} = r^{-k}$. Para $a_0 \neq 0$ la solución $X_0(v)$ es ilimitada cuando $v \to -\infty$, también son ilimitadas las soluciones $X_{k,2}(r) = r^{-k}$ cuando $0 < r < R$. Por lo tanto, tendremos $u_0(r, \varphi) = b_0$, $u_k(r, \varphi) = r^k(a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)$. Escojamos a_k y b_k de modo que la función $u(r, \varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)$ satisfaga la condición $u(R, \varphi) = f(\varphi)$, o sea, que $f(\varphi) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R^k(a_k \cos k\varphi + b_k \operatorname{sen} k\varphi)$. Para esto conviene escoger $b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$, $a_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi$, $k \in \mathbb{N}$, $b_k = \frac{1}{\pi R^k}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\operatorname{sen} k\varphi\,d\varphi$, $k \in \mathbb{N}$. En nuestro caso $f(\varphi) = \operatorname{sen}\varphi$ y por eso $b_0 = 0$, $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$, $b_1 = \frac{1}{R}$ y $b_k = 0$ cuando $k \geqslant 2$.

2.57. $u(x, t) = \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2m-1)\pi t}{l} - 1}{(2m-1)^5} \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{l} =$

$$= \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{(2m-1)\pi t}{l}}{(2m-1)^5} \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{l} - \frac{x}{12}(x^3 - 2x^2l + l^3).$$

● La última expresión ha sido obtenida, integrando dos veces término a término

$$\int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} v(v-l)\,dv =$$

$$= -\frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3}\int_0^x dx_1 \int_{l/2}^{x_1} \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi v}{l}\,dv.$$

2.58. $u(x, t) = \frac{2}{\pi^2}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l} - \frac{at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{\pi^3} \times$

$$\times \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \left[-\frac{1}{(2m-1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi at}{l} + \frac{1}{2m-1} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l} \right] \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{(2m-1)\pi x}{l}.$$

● Al resolver el sistema de ecuaciones $C_k''(t) + \left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 C_k(t) = A_k(t)$, $k = 2m-1$ son los números impares, conviene tener en cuenta que la frecuencia de la amplitud de la fuerza exterior coincide con la frecuencia de la amplitud del primer armónico, o sea, tiene lugar la resonancia y la solución particular se debe buscar en la forma

$$\tilde{C}_1(t) = t \left(\alpha_1 \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l} + \beta_1 \cos \frac{\pi at}{l} \right).$$

2.59. $u(x, t) = \frac{2Ql}{C\rho\pi^2 a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 t} \right] \operatorname{sen} \frac{\pi kx_0}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{l}.$

2.60. $u(x, t) = \frac{2^7}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-3)(2k-1)^2(2k+1)} \left[1 - e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)^2 t} \right] \times$

$$\times \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{4}.$$

2.61. $u(x, t) = \frac{l-x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l} - \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l} + \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l} \right) \times$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi kat}{l} - \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{l}.$$

◀ Tenemos la ecuación $u_{tt}'' = a^2 u_{xx}''$ con las condiciones iniciales $u(x, 0) = u_t'(x, 0) = 0$ y con las condiciones de frontera heterogéneas $u(0, t) \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l}$, $u(l, t) = 0$. Realicemos la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + \frac{l-x}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l}$. Entonces obtenemos respecto a la función $v(x, t)$ la ecuación heterogénea

$$v_{tt}'' = a^2 v_{xx}'' + \frac{\pi^2 a^2 (l-x)}{l^3} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{l}$$

con las condiciones iniciales $v(x, 0) = 0$, $v_t'(x, 0) = \frac{\pi a(l-x)}{l^2}$ y con las condiciones de frontera homogéneas $v(0, t) = v(l, t) = 0$. La ecuación homogénea $v_{tt}'' = a^2 v_{xx}''$ con estas condiciones de frontera tiene el sistema de funciones propias $\left\{ \operatorname{sen} \frac{\pi kx}{l} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$, por eso buscamos

la solución de la ecuación heterogénea en la forma

$$v(x,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)\operatorname{sen}\frac{\pi kx}{l}.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación heterogénea, obtenemos un sistema infinito de ecuaciones

$$C_k''(t)+\left(\frac{\pi ka}{l}\right)^2 C_k(t)=A_k(t),\ k\in\mathbb{N} \qquad (**)$$

donde $A_k(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l \frac{\pi^2a^2(l-x)}{l^3}\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi kx}{l}\,dx=\frac{2\pi a^2}{l^2k}\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}$,

con la particularidad de que de las condiciones iniciales resultan las siguientes condiciones para $C_k(0)$ y $C_k'(0)$:

$$v(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k(0)\operatorname{sen}\frac{\pi kx}{l}=0,\ \text{o sea,}\ C_k(0)=0\ \text{para}$$

todos los $k\in\mathbb{N}$ y

$$v_t'(x,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty} C_k'(0)\operatorname{sen}\frac{\pi kx}{l}=-\frac{\pi a(l-x)}{l^2},\ \text{o sea,}$$

$$C_k'(0)=-\frac{2}{l}\int_0^l \frac{\pi a(l-x)}{l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi kx}{l}\,dx=-\frac{2a}{lk}\ \text{para todos los}\ k\in\mathbb{N}.$$

Cuando $k=1$, en la ecuación (**) tiene lugar la resonancia (véase la indicación para el problema 2.58), por eso la solución particular se busca en la forma $\widetilde{C}_1(t)=t\left(A_1\cos\dfrac{\pi at}{l}+B_1\operatorname{sen}\dfrac{\pi at}{l}\right)$ y al sustituirla en la ecuación hallamos que $\widetilde{C}_1(t)=-\dfrac{at}{l}\cos\dfrac{\pi at}{l}$. Utilizando luego las condiciones $C_1(0)=0$ y $C_1'(0)=-\dfrac{2a}{l}$, encontramos que

$$C_1(t)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}-\frac{at}{l}\cos\frac{\pi at}{l}.$$

Acto seguido, sustituyendo las condiciones $C_k(0)=0$ y $C_k'(0)=-\dfrac{2a}{lk}$, para $k\geqslant 2$ obtenemos las siguientes soluciones de las ecuaciones (**)

$$C_k(t)=-\frac{2}{\pi(k^2-1)}\operatorname{sen}\frac{\pi kat}{l}+\frac{2}{\pi k(k^2-1)}\operatorname{sen}\frac{\pi at}{l}.$$

Sustituyendo estos coeficientes en la serie para $v(x, t)$, obtenemos la solución buscada

$$u(x, t)=\frac{l-x}{l}\operatorname{sen}\frac{\pi a t}{l}+v(x, t). \blacktriangleright$$

2.62. $$u(x, t)=\frac{x}{l}e^{-t}+\frac{2l^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left[e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t}-e^{-t}\right]}{k\left[(\pi k a)^2-l^2\right]}\operatorname{sen}\frac{\pi k x}{l}.$$

2.63. $$u(x, t)=e^{-\frac{t}{4l^2}}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi x}{2l}}{(2k+1)\left[\pi(2k+1)^2-1\right]}\left[e^{-\frac{t}{4l^2}}-e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}\right)^2 t}\right].$$

2.64. $$u(x, t)=\frac{2A}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\omega^2 t}\frac{\operatorname{sen}\omega h}{\omega}\cos\omega x\, d\omega.$$

3.1. Utilizando las fórmulas (2), (4*), obtenemos el esquema de diferencias siguiente:

$$\widetilde{L}_1 u\equiv\begin{cases}\dfrac{u_{m,\,n+1}-u_{m,\,n}}{\tau}-a^2\dfrac{u_{m+1,\,n+1}-2u_{m,\,n+1}+u_{m-1,\,n+1}}{h^2}, \\ \qquad m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=0,\ \ldots,\ s-1, \\ u_{m,\,0}, \quad m=0,\ \ldots,\ k, \\ u_{0,\,n}, \\ u_{k,\,n}, \quad n=0,\ \ldots,\ s;\end{cases}$$

$$\widetilde{f}_1\equiv\begin{cases}f_{m,\,n+1}, & m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=0,\ \ldots,\ s-1, \\ \varphi_m, & m=0,\ \ldots,\ k, \\ \psi_{1,n}, & \\ \psi_{2,n}, & n=0,\ \ldots,\ s\end{cases}$$

El esquema de diferencias se escribirá en la forma $\widetilde{L}_1[u]^*=\widetilde{f}_1$.

3.2. Los esquemas de diferencias pueden ser los siguientes:

$$\widetilde{L}_1 u\equiv\begin{cases}\dfrac{u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1}}{\tau^2}-a^2\dfrac{u_{m+1,\,n}-2u_{m,\,n}+u_{m-1,\,n}}{h^2}, \\ \qquad m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=1,\ \ldots,\ s-1, \\ u_{m,\,0}, \quad m=0,\ \ldots,\ k, \\ \dfrac{u_{m,\,1}-u_{m,\,0}}{\tau}, \\ u_{0,\,n} \\ u_{k,\,n} \quad n=0,\ \ldots,\ s;\end{cases}$$

$$\widetilde{L}_1 u \equiv \begin{cases} \dfrac{u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1}}{\tau^2}-a^2\,\dfrac{u_{m+1,\,n}-2u_{m,\,n}+u_{m-1,\,n}}{h^2}, \\ \qquad\qquad m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=1,\ \ldots,\ s-1, \\ u_{m,\,0}, \qquad m=0,\ \ldots,\ k, \\ \dfrac{u_{m,\,1}-u_{m,\,-1}}{2\tau}, \\ u_{0,\,n}, \qquad n=0,\ \ldots,\ s; \\ u_{k,\,n}, \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_1 \equiv \begin{cases} f_{m,\,n+1}, & m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=0,\ \ldots,\ s-1, \\ \varphi_m, & m=0,\ \ldots,\ k, \\ \psi_m, & \\ \psi_{1,\,n}, & n=0,\ \ldots,\ s. \\ \psi_{2,\,n}, & \end{cases}$$

3.3. Si en calidad de la red se toma la colección de los nodos (x_m, y_n) que son los puntos de intersección de las rectas $x = mh$, $y = nh$, $m = 0, \ldots, k$, $n = 0, \ldots, s$, donde $k = [b/h]$, $s = [Y/h]$, entonces, utilizando las fórmulas (4), (5), obtenemos el esquema de diferencias

$$\widetilde{L}_1 u \equiv \begin{cases} c_{m,\,n}\,\dfrac{u_{m+1,\,n}-2u_{m,\,n}+u_{m-1,\,n}}{h^2}+ \\ \qquad +d_{m,\,n}\,\dfrac{u_{m,\,n+1}-2u_{m,\,n}+u_{m,\,n-1}}{h^2}, \\ \qquad m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=1,\ \ldots,\ s-1, \\ u_{m,\,n}, \qquad (x_m, y_n)\in \Gamma D^*; \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_1 \equiv \begin{cases} f_{m,\,n}, & m=1,\ \ldots,\ k-1,\ n=1,\ \ldots,\ s-1, \\ \psi_{m,\,n}, & (x_m, y_n)\in \Gamma D^*. \end{cases}$$

OBSERVACION. En el caso del dominio dado las ecuaciones en diferencias se plantean también para los puntos ΓD^*. 3.4. El orden de aproximación es igual a dos.

◀ $$u(x+h,\ t)=u(x,\ t)+\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\,h+\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\,\frac{h^2}{2!}+$$

$$+\frac{\partial^3 u(x_1,\ t)}{\partial x^3}\,\frac{h^3}{3!},\quad x_1\in(x,\ x+h),$$

$$u(x-h,\ t)=u(x,\ t)-\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\,h+\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}\,\frac{h^2}{2!}-$$

$$-\frac{\partial^3 u(x_2,\ t)}{\partial x^3}\,\frac{h^3}{3!},\quad x_2\in(x-h,\ x).$$

Por lo tanto,

$$\frac{u(x+h,\ t)-u(x-h,\ t)}{2h}=\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+$$

$$+\frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^3 u(x_1,\ t)}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 u(x_2,\ t)}{\partial x^3}\right].$$

Suponiendo $M=\max\limits_{(x,\ t)\in D}\left|\frac{\partial^3 u(x,\ t)}{\partial x^3}\right|$, finalmente obtenemos

$$|R|\leqslant\frac{2Mh^2}{12}=\frac{Mh^2}{6}.$$

Admitiendo la existencia y el carácter limitado de las derivadas hasta el cuarto orden, inclusivamente, tenemos

$$u(x+h,\ t)=u(x,\ t)+u'_x(x,\ t)\,h+u''_{xx}\frac{h^2}{2!}+$$

$$+u'''_{xxx}\frac{h^3}{3!}+u^{IV}_{x^4}(x_1,\ t)\frac{h^4}{4!},\quad x_1\in(x,\ x+h),$$

$$u(x-h,\ t)=u(x,\ t)-u'_x(x,\ t)\,h+u''_{xx}\frac{h^2}{2!}-$$

$$-u'''_{xxx}\frac{h^3}{3!}+u^{IV}_{x^4}(x_2,\ t)\frac{h^4}{4!},\quad x_2\in(x-h,\ x).$$

Por consiguiente,

$$\frac{u(x+h,\ t)-2u(x,\ t)+u(x-h,\ t)}{h^2}=\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}+$$

$$+\left[\frac{\partial^4 u(x_1,\ t)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(x_2,\ t)}{\partial x^4}\right]\frac{h^2}{4!}.$$

Al suponer $M=\max\limits_{(x,\ t)\in D}\left|\frac{\partial^4 u(x,\ t)}{\partial x^4}\right|$, tenemos $|R|\leqslant\frac{Mh^2}{12}$. ▶

3.5. $\widetilde{L}_1 u\equiv\begin{cases}A_{m,\,n}u_{m,\,n+1}+B_{m,\,n}u_{m,\,n-1}+C_{m,\,n}u_{m+1,\,n}+\\ \qquad+D_{m,\,n}u_{m-1,\,n}+E_{m,\,n}u_{m,\,n},\\ \qquad n=1,\ \ldots,\ s-1,\ m=1,\ \ldots,\ k-1,\\ u_{m,\,0},\\ u_{m,\,1},\end{cases}\quad m=0,\ \ldots,\ k,$

$\begin{cases}u_{0,\,n},\\ u_{k,\,n},\end{cases}\quad n=0,\ \ldots,\ s;$

$$\widetilde{f}_1\equiv\begin{cases}f_{m,\,n}, & n=1,\ \ldots,\ s-1,\ m=1,\ \ldots,\ k-1,\\ \varphi_m, & \\ \varphi_m+\tau\psi_m, & m=0,\ \ldots,\ k,\\ \Phi_n, & \\ F_n, & n=0,\ \ldots,\ s.\end{cases}$$

El esquema de diferencias representado tiene el primer orden de aproximación respecto a h. ◀ En calidad de red D^* utilicemos la colección de las rectas $x = mh$ $(m = 0, \ldots, k)$, $y = n\tau$ $(n = 0, \ldots, s)$. Designemos con $u_{m,n} = u(mh, n\tau)$ el valor de la función buscada u en el nodo (m, n). El esquema que aproxima el problema 3.5 se obtiene, sustituyendo las derivadas por las relaciones de diferencias mediante las fórmulas (2), (4), (5). La ecuación en diferencias tiene la forma

$$\widetilde{L}u = A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n} = f_{m,n}, \qquad (*)$$

donde $A_{m,n} = -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + \frac{d_{m,n}}{2\tau}$, $B_{m,n} = -\frac{b_{m,n}}{\tau^2} - \frac{d_{m,n}}{2\tau}$, $C_{m,n} = \frac{a_{m,n}}{h^2} + \frac{c_{m,n}}{2h}$, $D_{m,n} = \frac{a_{m,n}}{h^2} - \frac{c_{m,n}}{2h}$, $E_{m,n} = -\frac{2a_{m,n}}{h^2} + 2\frac{b_{m,n}}{\tau^2} + g_{m,n}$. De la ecuación $(*)$ se ve que, conociendo la solución en los nodos de las líneas horizontales (capas) $n - 1$ y n se puede hallar la solución en todos los nodos de la capa horizontal $n + 1$. Antes de proceder a los cálculos es necesario conocer las soluciones en las primeras dos capas $n = 0$ y $n = 1$. Para hallar estos valores, en las condiciones iniciales del problema 3.5 sustituyamos la derivada por la relación de diferencias $\frac{u_{m,1} - u_{m,0}}{\tau}$, entonces para determinar los valores en los nodos de las primeras dos líneas horizontales, tendremos

$$u_{m,0} = \varphi_m, \quad u_{m,1} = \varphi_m + \tau\psi_m, \qquad m = 0, \ldots, k,$$

Finalmente, para la resolución del primer problema de contorno el esquema de diferencias tiene la forma $(*)$. Para determinar el orden de aproximación supongamos que la solución $u(x, y)$ tiene las derivadas limitadas hasta el cuarto orden, inclusivamente. Utilizando la fórmula de Taylor, tenemos

$$\frac{u(x_m + h, y_n) - u(x_m - h, y_n)}{2h} = \frac{\partial u(x_m, y_n)}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 u(x_1, y_n)}{\partial x^3},$$

$$x_1 \in (x_m - h, x_m + h),$$

$$\frac{u(x_m, y_n + \tau) - u(x_m, y_n - \tau)}{2\tau} = \frac{\partial u}{\partial y}(x_m, y_n) + \frac{\tau^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_m, y_1),$$

$$y_1 \in (y_n - \tau, y_n + \tau),$$

$$\frac{u(x_m + h, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m - h, y_n)}{h^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_m, y_n) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_2, y_n).$$

$$x_2 \in (x_m - h, x_m + h),$$

$$\frac{u(x_m, y_n + \tau) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_n - \tau)}{\tau^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m, y_n) + \frac{\tau^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_m, y_2),$$

$$y_2 \in (y_n - \tau, y_n + \tau).$$

Con ayuda de estas fórmulas la expresión $\widetilde{L}u$ se representa en la forma

$$\widetilde{L}u = (au''_{xx} - bu''_{yy} + cu'_x + du'_y + gu)_{(x_m, y_n)} + h^2\Phi_{m,n} = f_{m,n} + h^2\Phi_{m,n},$$

$$\Phi_{m,n} = \frac{1}{12}\left[a_{m,n}u^{IV}_{x^4}(x_2, y_n) - b_{m,n}\alpha^2 u^{IV}_{y^4}(x_m, y_2) + \right.$$

$$\left. + 2c_{m,n}u'''_{x^3}(x_1, y_n) + 2d_{m,n}\alpha^2 u'''_{y^3}(x_m, y_1),\right] \alpha = \frac{\tau}{h}.$$

Hallemos el error de aproximación de las condiciones iniciales. La aproximación de la primera condición inicial no introduce un error, mientras la segunda condición inicial lo introduce

$$\frac{u_{m,1} - u_{m,0}}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{m,0} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m, \widetilde{y}_n) =$$

$$= \psi_m + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m, \widetilde{y}_n),$$

$$\widetilde{y}_n \in (0, \tau).$$

Ahora bien, $u_{m,0} = \varphi_m$, $u_{m,1} = \varphi_m + \tau\left[\psi_m + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m, \widetilde{y}_n)\right]$.

Definitivamente, la discrepancia para el esquema de diferencias del problema 3.5 tiene la forma

$$\delta\widetilde{f}_1 = \begin{cases} h^2\Phi_{m,n}, \\ 0, \\ h\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_m, \widetilde{y}_n). \end{cases}$$

Tenemos la estimación siguiente para la discrepancia:

$$\rho_S(0, \delta f_1) = \max_{m,n}\left[h^2 |\Phi_{m,n}| + \frac{h\alpha}{2}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{m,n}\right] = O(h). \blacktriangleright$$

3.6. $\widetilde{L}_1 u \equiv$

$$\begin{cases} A_{m,n}u_{m,n+1} + B_{m,n}u_{m,n-1} + C_{m,n}u_{m+1,n} + \\ \qquad + D_{m,n}u_{m-1,n} + E_{m,n}u_{m,n}, \\ u_{m,0}, \\ u_{m,1}, \\ u_{0,n}, \\ u_{k,n}. \end{cases}$$

$$\widetilde{f}_1 = \begin{cases} f_{m,\,n}, \\ \varphi_m, \\ \dfrac{1}{A_{m,\,0}+B_{m,\,0}}\,[f_{m,\,0}+2\tau B_{m,\,0}\psi_m - C_{m,\,0}\varphi_{m+1} - \\ \qquad\qquad -D_{m,\,0}\varphi_{m-1} - E_{m,\,0}\varphi_m], \\ \Phi_n, \\ F_n. \end{cases}$$

El orden de aproximación del primer problema de contorno es igual a dos. ● Atrayendo una línea horizontal más, correspondiente a $n=-1$, sustitúyese la derivada $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$ por la relación de diferencias $\dfrac{u_{m,\,1}-u_{m,\,-1}}{2\tau}$. Elimínense los valores intermedios $u_{m,\,-1}$, al utilizar la ecuación en diferencias (*) (suponiendo que la ecuación del problema 3.5 se satisface en la recta $y=0$). Al investigar el orden de aproximación téngase en cuenta que el orden de aproximación es igual a dos. Para investigar el orden de aproximación del esquema de diferencias es necesario determinar el orden de aproximación de las condiciones iniciales y las de frontera.

3.7. $A_{m,\,n}u_{m,\,n+1}+B_{m,\,n}u_{m,\,n-1}+C_{m,\,n}u_{m+1,\,n}+D_{m,\,n}u_{m-1,\,n}+$
$+E_{m,\,n}u_{m,\,n}=f_{m,\,n}$, $m=1,\ \ldots,\ k-1$, $n=1,\ \ldots,\ s-1$,

$$\left.\begin{aligned} u_{m,\,0}&=\varphi_m, \\ u_{m,\,1}&=\varphi_m+\tau\psi_m, \end{aligned}\right\} \quad m=0,\ \ldots,\ k,$$

$$u_{1,\,n}=(1-\delta_{1n}h)\,u_{0,\,n}+h\Phi_n,\quad u_{k,\,n}=\frac{h}{(1+\delta_{2n}h)}F_n+\frac{u_{k-1,\,n}}{(1+\delta_{2n}h)}.$$

El orden de aproximación es igual a h. ● Utilicemos la misma red D^* que en el caso del primer problema de contorno. Aproximemos la ecuación y las condiciones de contorno de un modo análogo al problema 3.5. Escribamos las relaciones de diferencias para las condiciones de frontera en la forma

$$\frac{u_{1,\,n}-u_{0,\,n}}{h}+\delta_{1n}u_{0,\,n}=\Phi_n,\quad \frac{u_{k,\,n}-u_{k-1,\,n}}{h}+\delta_{2n}u_{k,\,n}=F_n.$$

El error de aproximación de las condiciones de frontera mediante este procedimiento será el de primer orden.

3.8. $A_{m,\,n}u_{m,\,n+1}+B_{m,\,n}u_{m,\,n-1}+C_{m,\,n}u_{m+1,\,n}+D_{m,\,n}u_{m-1,\,n}+$
$+E_{m,\,n}u_{m,\,n}=f_{m,\,n}$, $m=1,\ \ldots,\ k-1$, $n=1,\ \ldots,\ s-1$,

$$u_{m,\,0}=\varphi_m,\qquad m=0,\ \ldots,\ k,$$

$$u_{m,\,1}=\frac{1}{A_{m,\,0}+B_{m,\,0}}\,[f_{m,\,0}+2\tau B_{m,\,0}\psi_m - C_{m,\,0}\varphi_{m+1}-D_{m,\,0}\varphi_{m-1}-E_{m,\,0}\varphi_m],$$

$$A_{0,\,n}u_{0,\,n+1}+B_{0,\,n}u_{0,\,n-1}+(C_{0,\,n}+D_{0,\,n})\,u_{1,\,n}+$$
$$+(E_{0,\,n}+2h\delta_{1n}D_{0,\,n})\,u_{0,\,n}=f_{0,\,n}+2hD_{0,\,n}\Phi_n, \qquad (*)$$

$$(A_{0,0}+B_{0,0})\,u_{0,1}=f_{0,0}+2\tau B_{0,0}\psi_0+2hD_{0,0}\Phi_0-$$

$$-(C_{0,0}+D_{0,0})\,\varphi_1-(E_{0,0}+2h\delta_{10}D_{0,0})\,\varphi_0,$$

$$(A_{k,0}+B_{k,0})\,u_{k,1}=f_{k,0}+2\tau B_{k,0}\psi_k-$$

$$-2hC_{k,0}F_0-(C_{k,0}+D_{k,0})\,\varphi_{k-1}-(E_{k,0}-2h\delta_{20}C_{k,0})\,\varphi_k,$$

$$A_{k,n}u_{k,n+1}+B_{k,n}u_{k,n-1}+(C_{k,n}+D_{k,n})\,u_{k-1,n}+$$

$$+(E_{k,n}+2h\delta_{2n}C_{k,n})\,u_{k,n}=f_{k,n}-2hC_{k,n}F_n.$$

El esquema (*) tiene el segundo orden de aproximación para la solución que posee las cuartas derivadas limitadas. ◀ Sustituyamos las derivadas que entran en las condiciones iniciales y de frontera por las

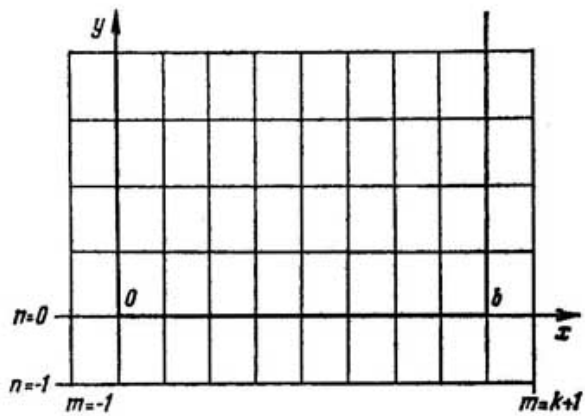


Fig. 216

diferencias centrales. Para aproximar las condiciones de frontera en los nodos $(0, n)$ y (k, n) utilicemos también los nodos de las líneas verticales que corresponden a $m=-1$ y $m=k+1$ (véase la fig. 216) y escribamos las relaciones siguientes:

$$\frac{u_{1,n}-u_{-1,n}}{2h}+\delta_{1n}u_{0,n}=\Phi_n,$$

$$\frac{u_{k+1\,n}-u_{k-1,n}}{2h}+\delta_{2n}u_{k,n}=F_n. \qquad (**)$$

Las ecuaciones en diferencias que aproximan la ecuación diferencial del problema 3.5 en los nudos $(0, n)$ y (k, n) tienen la forma

$$A_{0,n}u_{0,n+1}+B_{0,n}u_{0,n-1}+C_{0,n}u_{1,n}+D_{0\,n}u_{-1,n}+E_{0,n}u_{0,n}=f_{0,n},$$

$$A_{k,n}u_{k,n+1}+B_{k,n}u_{k,n-1}+C_{k,n}u_{k+1,n}+D_{k,n}u_{k-1,n}+E_{k,n}u_{k,n}=$$

$$=f_{k,n}.$$

Eliminando de estas ecuaciones $u_{-1,n}$, $u_{k+1,n}$ con ayuda de las expresiones (**), obtenemos

$$A_{0,n}u_{0,n+1}+B_{0,n}u_{0,n-1}+(C_{0,n}+D_{0,n})u_{1,n}+$$
$$+(E_{0,n}+2h\delta_{1n}D_{0,n})u_{0,n}=f_{0,n}+2hD_{0,n}F_{1,n}, \qquad (***)$$
$$A_{k,n}u_{k,n+1}+B_{k,n}u_{k,n-1}+(C_{k,n}+D_{k,n})u_{k-1,n}+$$
$$+(E_{k,n}-2h\delta_{2n}C_{k,n})u_{k,n}=f_{k,n}-2hC_{k,n}F_{2,n}.$$

Los valores de la solución en los nodos $(0, 1)$ y $(k, 1)$ se determinan de (***) cuando $n=0$. Eliminando las magnitudes $u_{0,-1}$, $u_{k,-1}$ con ayuda de las condiciones iniciales $\frac{u_{0,1}-u_{0,-1}}{2\tau}=\psi_0$, $\frac{u_{k,1}-u_{k,-1}}{2\tau}=\psi_n$, obtenemos las expresiones para determinar $u_{0,1}$, $u_{k,1}$:

$$(A_{0,0}+B_{0,0})u_{0,1}=f_{0,0}+2\tau B_{0,0}\psi_0+$$
$$+2hD_{0,0}\Phi_0-(C_{0,0}+D_{0,0})\varphi_1-(E_{0,0}+2h\delta_{10}D_{0,0})\varphi_0,$$
$$(A_{k,0}+B_{k,0})u_{k,1}=f_{k,0}+2\tau B_{k,0}\psi_k-2hC_{k,0}F_0-$$
$$-(C_{k,0}+D_{k,0})\varphi_{k-1}-(E_{k,0}-2h\delta_{20}C_{k,0})\varphi_k. \blacktriangleright$$

3.9. El orden de aproximación es igual a dos. ● Para sustituir las derivadas parciales u''_{xx}, u''_{yy} utilícense las fórmulas (4), (5). Póngase $\tau=h$. **3.10.** $u_{m+1,n+1}+u_{m-1,n+1}+u_{m-1,n-1}+u_{m+1,n-1}-4u_{m,n}=2h^2f_{m,n}$. El orden de aproximación es igual a dos.

● $(Lu)_0=c_0u_0+c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4$. En virtud de la simetría de la ecuación y de la simetría del molde, poner $c_1=c_2=c_3=c_4=b$. **3.11.** El esquema es estable. ● Los números propios del problema dado tienen la forma

$$\lambda(\nu, h, \tau)=\frac{1}{\left(1+\frac{4a^2\tau}{h^2}\operatorname{sen}^2\frac{\nu h}{2}\right)}.$$

De aquí se ve que $|\lambda(\nu)|\leqslant 1$ para todos los valores de ν. **3.12.** La condición de estabilidad $\tau a/h\leqslant 1$. ◀ Buscamos la solución de la ecuación homogénea respectiva en la forma $u^*_{m,n+1}=\tilde{u}_n e^{i\nu x_m}$. Tenemos

$$\tilde{u}_{n+1}e^{i\nu x_m}-2\tilde{u}_n e^{i\nu x_m}+\tilde{u}_{n-1}e^{i\nu x_m}-$$
$$-\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2[e^{i\nu x_{m+1}}-2e^{i\nu x_m}+e^{i\nu x_{m-1}}]\tilde{u}_n=0. \qquad (*)$$

Después de las transformaciones (*) se escribe en la forma

$$\tilde{u}_{n+1}=-\tilde{u}_{n-1}+2\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2\operatorname{sen}^2\frac{\nu h}{2}\right]\tilde{u}_n. \qquad (**)$$

Introduzcamos el vector columna $\begin{pmatrix}\tilde{u}_{n+1}\\ \tilde{u}_n\end{pmatrix}$ y el vector columna $\begin{pmatrix}\tilde{u}_n\\ \tilde{u}_{n-1}\end{pmatrix}$.

Entonces (**) puede escribirse en la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{n+1} \\ \tilde{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\right]-1 & 0 \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_n \\ \tilde{u}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

La matriz del operador de paso tiene la forma

$$R(\tau, h, \nu) = \begin{pmatrix} 2\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\right]-1 & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Los números propios λ de esta matriz se obtienen a partir de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\right]-\lambda-1 & -\lambda \\ 1 & \end{vmatrix} = 0.$$

Después de las transformaciones obtenemos la ecuación para λ:

$$\lambda^2 - 2\lambda\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\right]+1=0.$$

El producto de los módulos de las raíces de esta ecuación $|\lambda_1||\lambda_2| = 1$. Para que cada una de ellas sea igual, en módulo, a 1 es necesario que las raíces λ_1, λ_2 sean complejamente conjugadas, o sea

$$\left[1-2\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\right]^2 - 1 < 0. \qquad (***)$$

Escribamos la desigualdad (***) en la forma

$$4\left(\frac{\tau a}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2}\left[\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\nu h}{2} - 1\right] < 0.$$

Esta desigualdad se cumple si $\frac{a\tau}{h} \leqslant 1$. ▶ 3.13. Los coeficientes de recorrido $Q_{1,n} = -\frac{\alpha_{1,n}}{h\beta_{1,n}-\alpha_{1,n}}$, $H_{1,n} = \frac{h\Phi_{1,n}}{h\beta_{1,n}-\alpha_{1,n}}$, $n = 1, \ldots, s$. El valor de la solución en la frontera derecha, el cual es necesario para el recorrido inverso

$$u_{k,n} = \frac{\alpha_{2,n} H_{k,n} + h\Phi_{2,n}}{\alpha_{2,n}(1-Q_{k,n}) + h\beta_{2,n}} \quad n = 1, \ldots, s.$$

◀ Aproximemos las condiciones de frontera del problema 3.13 por las relaciones de diferencias

$$\alpha_{1,n} \frac{u_{1,n}-u_{0,n}}{h} + \beta_{1,n} u_{0,n} = \Phi_{1,n}, \qquad (*)$$

$$\alpha_{2,n} \frac{u_{k,n}-u_{k-1,n}}{h} + \beta_{2,n} u_{k,n} = \Phi_{2,n}, \quad n = 0, \ldots, s. \qquad (**)$$

Suponiendo en la fórmula (25) $m=0$, escribamos la igualdad siguiente:

$$u_{0,\,n}=Q_{1,\,n}u_{1,\,n}+H_{1,\,n},\quad n=1,\ \ldots,\ s. \qquad (***)$$

Comparando las igualdades (*) y (***), obtenemos los valores iniciales de los coeficientes de recorrido

$$Q_{1,\,n}=-\frac{\alpha_{1,\,n}}{h\beta_{1,\,n}-\alpha_{1,\,n}},\quad H_{1,\,n}=\frac{h\Phi_{1,\,n}}{h\beta_{1,\,n}-\alpha_{1,\,n}},\quad n=1,\ \ldots,\ s.$$

Para el recorrido inverso es necesario conocer el valor de la solución en la frontera derecha $u_{k,n}$. Para determinar este valor escribamos la igualdad (23) en el nodo $(k,\ n)$:

$$u_{k-1,\,n}=Q_{k,\,n}u_{k,\,n}+H_{k,\,n}\quad n=1,\ \ldots,\ s. \qquad (****)$$

Obsérvese que todos los coeficientes de recorrido están definidos por las fórmulas (26). Comparando las igualdades (****) y (**), obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$Q_{k,\,n}u_{k,\,n}-u_{k-1,\,n}=-H_{k,\,n},$$
$$(\alpha_{2,\,k}+h\beta_{2,\,k})\,u_{k,\,n}-\alpha_{2,\,k}u_{k-1,\,n}=h\Phi_{2,\,n}.$$

Obtenemos $u_{k,\,n}$ como solución de este sistema. ▶

3.14. $h=0{,}02$; $\tau=0{,}01$;

t \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,22	0,28	0,82	1,67	2,80	3,98
0,4	0,49	0,48	1,08	1,96	3,10	3,68
0,6	0,82	0,92	1,41	2,33	3,19	3,30
0,8	1,23	1,42	1,82	2,76	3,11	2,79
1,00	1,72	1,97	2,46	2,97	2,88	2,16

3.15. $h=0{,}01$; $\tau=0{,}01$;

y \ x	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,2	0,20	0,20	0,40	0,60	0,80	0,80
0,4	0,40	0,20	0,39	0,59	0,78	0,60
0,6	0,60	0,39	0,37	0,56	0,54	0,40
0,8	0,80	0,57	0,34	0,49	0,28	0,20
1,00	1,00	0,73	0,47	0,20	0,00	0,00

3.16. $h = 0{,}02;\ \tau = 0{,}01;$

t \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	1,00	1,16	1,64	2,44	3,56	5,00
0,2	1,20	2,42	2,94	3,82	5,06	4,90
0,4	1,39	3,73	4,33	5,29	6,57	4,61
0,6	1,56	4,15	5,80	6,82	6,53	4,13
0,8	1,72	4,53	7,31	8,37	6,23	3,48
1,00	1,84	4,91	7,94	8,38	5,74	2,70

3.17. $h = 0{,}01;\ \tau = 0{,}01;$

t \ x	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,2	—0,42	—0,03	0,41	0,93	1,53	3,01
0,4	—1,14	—0,08	0,68	1,52	2,44	7,28
0,6	—3,28	—0,14	0,97	2,12	4,18	14,60
0,8	—10,87	—0,51	1,27	2,75	8,14	26,44
1,0	—40,84	—2,30	1,56	4,20	15,18	44,60

3.18. $h = 0{,}02;\ \tau = 0{,}01;$

t \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,0
0,0	5,00	6,60	8,20	9,80	11,40	13,00
0,2	5,30	6,79	8,39	9,99	11,59	13,12
0,4	5,65	6,98	8,58	10,17	11,77	13,18
0,6	6,19	7,15	8,74	10,33	11,92	13,18
0,8	7,26	7,32	8,89	10,46	12,04	13,09
1,0	9,61	7,57	9,01	10,57	12,03	12,87

3.19. $h = 0{,}02$; $\tau = 0{,}01$;

y \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	1,00	0,80	0,60	0,40	0,20	0,0
0,20	0,98	0,84	0,72	0,58	0,42	0,20
0,40	0,92	0,87	0,81	0,72	0,59	0,39
0,60	0,83	0,88	0,88	0,83	0,73	0,56
0,80	0,70	0,86	0,91	0,92	0,86	0,72
1,00	0,54	0,80	0,92	0,98	0,96	0,84

3.20. $h = 0{,}02$; $\tau = 0{,}01$;

x	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00
0,20	—0,17	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
0,40	—0,72	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00
0,60	—1,63	0,10	0,04	0,00	0,00	0,00
0,80	0,97	0,17	0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

3.21. $h = 0{,}02$; $\tau = 0{,}01$;

t \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,16	0,64	1,44	2,56	4,00
0,2	0,28	0,46	0,83	1,28	1,52	1,27
0,4	0,30	0,42	0,53	0,60	0,54	0,38
0,6	—0,03	0,05	—0,05	—0,24	—0,43	—0,44
0,8	—0,67	—0,61	—0,87	—1,23	—1,47	—1,29
1,0	—1,57	—1,52	—1,90	—2,38	—2,62	—2,21

3.22. $h = 0{,}01$; $\tau = 0{,}01$;

t \ x	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	0,59	0,95	0,95	0,59	0,00
0,2	0,50	0,54	0,57	0,58	0,57	0,53
0,4	0,60	0,70	0,88	1,10	1,29	1,31
0,6	2,01	2,51	3,54	4,88	6,08	6,31
0,8	8,05	9,90	13,58	18,31	22,41	23,03
1,0	25,35	30,58	40,44	52,78	63,21	64,34

3.23. $h = 0{,}02$;

y \ x	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,0	1,00	1,40	1,80	2,20	2,60	3,00
0,2	2,00	1,05	0,93	1,06	1,44	2,96
0,4	3,00	1,02	0,60	0,59	0,93	2,84
0,6	4,00	1,36	0,76	0,67	0,93	2,64
0,8	5,00	2,76	2,12	1,81	1,64	2,36
1,0	6,00	5,84	5,36	4,56	3,44	2,00

3.24. $h = 0{,}02$;

y \ x	0,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,20	0,08	0,32	0,51	0,72	0,99	0,84
0,40	0,32	0,72	1,07	1,41	1,78	1,76
0,60	0,72	1,23	1,68	2,12	2,56	2,76
0,80	1,28	1,82	2,65	3,22	3,82	3,84
1,00	2,00	2,44	2,96	3,56	4,24	5,00

3.25. $h = 0{,}02$;

y \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,20	1,00	0,24	0,35	1,24	0,0	0,0
0,40	2,00	0,34	0,10	0,82	0,0	0,0
0,60	3,00	0,66	0,19	0,47	1,96	0,0
0,80	4,00	1,92	1,34	1,25	2,04	0,0
1,00	5,00	4,60	4,20	3,80	3,40	3,00

3.26. $h = 0{,}02$;

y \ x	0,0	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
0,0	0,0	0,63	0,89	1,10	1,26	1,41
0,20	1,00	0,36	0,44	0,54	0,64	1,29
0,40	2,00	0,32	0,26	0,28	0,32	1,20
0,60	3,00	0,83	0,66	0,56	0,45	1,12
0,80	4,00	2,86	2,06	1,69	1,19	1,05
1,00	5,00	4,84	4,36	3,56	2,44	1,00

3.27.

```
      SUBROUTINE PARAB (A, F, FI, PSI1, PSI2,
     *K1, NS1, X, T, U)
      COMMON Y1, B
      DIMENSION X(K1), T(NS1), U(K1, NS1)
      HT = Y1/(NS1 - 1)
      HX = B/(K1 - 1)
      DO 2 I = 1, K1
      X(I) = HX * (I - 1)
    2 U(I, 1) = FI(X(I))
      DO 3 J = 1,NS1
      T(J) = HT * (J - 1)
      U (I, J) = PSI1 (T(J))
    3 U(NS1, J) = PSI2(T(J))
      A1 = HT * A/HX ** 2
      A2 = 1, -2 * A1
      K = K1 - 1
      NS = NS1 - 1
      DO 5 J = 2,NS
      DO 5 I = 2, K
    5 (U(I, J + 1) = A1 * U(I + 1, J) + 2A * U(I, J) +
     *AI * U(I - 1, J) + HT * F(X(I), T(J))
      RETURN
      END
```

```
      3.28
      SUBROUTINE GIPER1 (A, F, FI, PSI, EFL, EFR,
      K1, NS1, X, Y, U)
      DIMENSION X(K1), Y(NS1), U(K1, NS1)
      COMMON /C/ Y1, B
      HY = Y1/(NS1 - 1)
      HX = B/(K1 - 1)
    7 FORMAT (/// 10X, 'HX = ', F7.4, 10X, 'HY = ', F7.4)
      PRINT 7, HX, HY
      HY2 = HY ** 2
      A1 = HY2/(A * HX ** 2)
      DO 3 J = 1, NS1
      Y(J) = HY * (J - 1)
      U(1, J) = EFL(Y(J))
      U(K1, J) = EFR (Y(J))
    3 CONTINUE
      DO 10 I = 1, K1
   10 X(I) = HX * (I - 1)
      DO 2 I = 1, K1
      U(I,1) = F1 (X(I))
      IF(I. EQ.1) GO TO 2
      IF (I.EQ.K1) GO TO 2
      U(I, 2) = -.5 * (HY2/A) * (F(X(I),
     *Y(1)) + HY * PSI(X(I)) + .5 * A1
     *(FI(X(I + 1)) + FI X(I - 1))) + (1. - A1) * FI(X(I))
    2 CONTINUE
      K = K1 - 1
      NS = NS1 - 1
      DO 5 J = 2, NS
      DO 5 I = 2, K
    5 U(I, J + 1) = - (HY2/A) * F(X(I),-Y(J)) -
     *U(I, J - 1) + A1 * (U(I + 1, J) + U(I - 1; J)) *
     *+ 2 * (1. - A1) * U (I, J)
      RETURN
      END

      3.29.
      SUBROUTINE GIPER3 (A, F, FI, PSI, ELF, EFR, DLT1,
     *DLT2, K1, NS1, X, Y, U)
      DIMENSION X(K1), Y(NS1), U(K1, NS1)
      COMMON/C/Y1, B
      HY = Y1/(NS1 - 1)
      HX = B/(K1 - 1)
    7 FORMAT (///10X, 'HX = ', F7.4, 10X, 'HY = ', F7.4)
      PRINT 7, HX, HY
      HY2 = HY ** 2
      Al = HY2/(A * HX ** 2)
      NS = NS1 - 1
      K = KI - 1
      DO 10 I = 1, KI
   10 X(I) = HX * (I - 1)
      DO 2 J = 1, NS1
    2 Y(J) = HY * (J - 1)
```

```
      DO 3 I = 1, KI
      U(I, 1) = FI(X(I))
      IF(I.EQ.1.OR.I. EQ.K1) GO TO 3
      U(I, 2) = -5. * (HY2/A) * F(X(I), Y(I)) + HY * PSI(X(I))
     *+ 5 * A1 * (F1(X(I + 1)) + FI(X(I - 1))
     *+ (1. - A1) * F1(X(I))
    3 CONTINUE
      T1 = 1. - A1 + HX * A1 * DLTI (Y(1))
      T2 = 1. - A1 - HX * Al * DLT2 (Y(1))
      U(1, 2) = -.5 * (HY2/A) * F(X(1), Y(1)) +
     *HY * PSI (X(1)) - HX * A1 * ELF(Y 1)) + A1 * FI(X(2)) +
     *T1 * FI(X(1))
      U(K1, 2) = -.5 * (HY2/A) * F(X(K1),
     *Y(1)) + HY * PSI (X(K1))
     *+ HX * A1 * EFR (Y(1)) + A1 * FI(X(K)) + T2 * FI(X(K1))
      DO 6 J = 2, NS
      DO 5 I = 2, K
    5 U(I, J + 1) = - (HY2/A) * F(X(I), Y(J)) -
     *U(I, J - 1) + A1 * (U(I + 1, J) + U(I - 1, J)) +
     *2. * (1, - A1) * U(I, J)
      U(1, J + 1) = -U(1, J - 1) + 2. * A1* U(1, J) +
     *2 * (1. - A1 + A1 * HX * DLT1 (Y(J)) * U(1, J) - (HY2/A) *
     *F(X(1), Y(J) - 2. * A1 * HX * ELF(Y(J))
      U(K1, J + 1) = - U(K1, J - 1) + 2. * A1 *
     *U(K, J) + 2. * (1. - A1 - HX * A1 * DLT2(Y(J)) * U(K,J) -
     *(HY2/A) * F(X(K), Y(J)) + 2. * A1 * EFR(Y(J))
    6 CONTINUE
      RETURN
      END

      3.30
      SUBROUTINE ELIPT (F, FI, EFL, EFV, EFP, K1,
     *NS1, X, Y, U)
      DIMENSION X(K1), Y(NS1), U(K1, NS1)
      COMMON/W/A, KT, AMØ, EPS
      COMMON/C/B
      NX = B/(K1 - 1)
   17 FORMAT (///1ØX, 'HX = ', F7.4)
      PRINT 17, HX
      HX2 = HX ** 2
      K = K1 - 1
      NS = NS1 - 1
      DO 6 J = 1, NS1
      Y(J) = HX * (J - 1)
      K2 = KT * (J - 1) + K1
      DO 6 I = 1, K2
      X(I) = HX * (I - 1)
      IF(I. GT 1.AND.1. LT.K2) U(I, J) = AMØ
      IF(I EQ.1) U(I, J) = EFL (Y(J))
      IF (I.EQ.K2) U(I, J) = EFP(X(I), Y(J))
      IF (J.EQ.1) U(I, J) = FI(X(I))
      IF (J.EQ.NS1) U(I, J) = EFV (X(I))
    6 CONTINUE
    4 D = Ø
```

```
      DO 3 J = 2, NS
      M = KT * (J - 1) + K
      DO 3 I = 2, M
      R = (U(I + 1, J) + U(I - 1, J) + A * (U(I, J + 1) +
     *U(I, J - 1)) - HX2 * F(X(I) Y(J)))/(2. * (1. + A))
      D1 = ABS (R - U(I, J))
      IF (D1. GT.D) D = D1
    3 U(I, J) = R
      IF(D.GT.EPS) GO TO 4
      RETURN
      END
```

● Al realizar numéricamente el esquema de diferencias para el problema de contorno 3.3 es necesario reducir la ecuación a la forma $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_1(x, y)$. Para resolver el sistema de ecuaciones lineales en diferencias aplíquese el método de iteración simple, valiéndose de las fórmulas:

$$u_{m,n}^{(i+1)} = \frac{1}{2(1+a)}(u_{m+1,n}^{(i)} + u_{m-1,n}^{(i)} +$$

$$+ a(u_{m,n+1}^{(i)} + u_{m,n-1}^{(i)}) - h^2 f_1(x_m, y_n)),$$

donde i es el número de iteración. Sea ε el error absoluto de cálculos. Supondremos que la solución se obtiene con la exactitud prefijada si se cumple la relación $\max_{m,n} |(u_{m,n}^{(i)} - u_{m,n}^{(i+1)}| \leqslant \varepsilon$. Al redactar el programa utilícese la regla indicada anteriormente. Utilícense los identificadores: F, o sea, los segundos miembros, FI, EFL, EFP, EFV, o sea, los identificadores de las funciones que calculan las condiciones de contorno en las fronteras interior, izquierda, derecha y superior, respectivamente. AM$\varnothing$, o sea, la variación posible para el valor $u_{m,n}^{(0)}$; KT = 0 para un dominio rectangular, KT = 1 para el dominio trapezoidal.

3.31.

a)
```
      SUBROUTINE PROGNI (A, F, FI, PSI1, PSI2,
     *K1, NS1, X, T, U, Q, H)
      COMMON YI, B
      DIMENSION X(K1), T(NS1), U(K1, NS1), Q(K1, NS1),
      H(K1, NS1)
      HT = Y1/(NS1 - 1)
      HX = B/(K1 - 1)
      A2 = (HX ** 2)/(A * HT)
      K = K1 - 1
      DO 2 I = 1, K1
      X(I) = HX * (I - 1)
    2 U(I, 1) = FI(X(I))
      DO 3 J = 1, NS1
      T(J) = HT * (J - 1)
      Q(1, J) = Ø
      H(1, J) = PSI1 (T(J))
      U(K1, J) = PSI2 (T(J))
    3 U(1, J) = H(1, J)
```

```
      DO 2Ø J = 2, NS1
      DO 7 I = 1, K
      Q(I + 1, J) = 1./(2. + A2 - Q(I, J))
 7    H(I + 1, J) = Q(I + 1, J) * (A2 * U(I, J - 1) +
     *HT * F(X(I), T(J)) + H(I, J))
      I = K1
 8    U(I - 1, J) = Q(I, J) * U(I, J) + H(I, J)
      IF(3 - I) 15, 2Ø, 2Ø
15    I = I - 1
      GO TO 8
2Ø    CONTINUE
      RETURN
      END
```

b)
```
      SUBROUTINE PROGN2 (A, F, FI, ALF1, BET1,
     *ALF2, BET2, EF1,
     *EF2, K1, NS1, X, T, U, Q, H)
      COMMON/C/Y1, B
      DIMENSION Q (K1, NS1), H(K1, NS1)
      DIMENSION X (K1), T(NS1), U(K1, NS1)
      HT = Y1(NS1 - 1)
      HX = B/(K1 - 1)
17    FORMAT (///1ØX, 'HX = ', F7.4, 1ØX, 'HT = ', F7,4)
      PRINT 17, HX, HT
      A2 = (HX ** 2)/(A * HT)
      K = K1 - 1
      DO 2 I = 1, K1
      X(I) = HX * (I - 1)
 2    U(I, 1) = FI (X(I))
      DO 3 J = 1, NS1
      T(J) = HT * (J - 1)
      Q(1, J) = - ALF1 (T(J))/(HX * BET1(T(J)) - ALF1(T(J)))
      H(1, J) = HX * EF1
     *(T(J))/(HX * BET1(T(J)) - ALF1(T(J)))
 3    CONTINUE
      DO 2Ø J = 2, NS1
      DO 7 I = 1, K
      Q(I + 1, J) = 1./(2. + A2 - Q(I, J))
 7    H(I + 1, J) = Q(I + 1, J) * (A2 * U(I, J - 1) +
     *HT * F(X(I), T(J)) + H(I, J))
      I = K1
      U(I, J) = (ALF2(T(J)) * H(K1, J) + HX *
     *EF2(T(J)))/(ALF2 (T(J)) * (1. - Q(K1, J)) +
     *HX * BET2(T(J)))
 8    U(I - 1, J) = Q(I, J) * U(I, J) + H(I, J)
      IF(2 - I) 15, 2Ø, 2Ø
15    I = I - 1
      GO TO 8
2Ø    CONTINUE
      RETURN
      END
```

3.32. Para el problema 3.14 la respuesta se anota del modo siguiente:

```
      FUNCTION F(T, X)
```

```
      F = -5 * T * X ** 2
      RETURN
      END
```

Las respuestas para los demás problemas se distinguen únicamente por el segundo operador que determina el valor de F.

3.33. Respuesta al problema 3.14:

```
      FUNCTION FI(X)
      FI = X ** 2
      RETURN
      END
      FUNCTION PSI (X)
      PSI = SIN (X)
      RETURN
      END
      FUNCTION EFL (T)
      EFL = EXP (T) - 1.
      RETURN
      END
      FUNCTION EFP (T)
      EFP = 4. * COS (T)
      RETURN
      END.
```

Las respuestas a otros problemas se distinguen por el segundo operador.

3.34. Respuesta al problema 3.14:

```
      EXTERNAL F, FI, PSI, EFL, EFP
      DIMENSION X (10Ø1), T(10Ø1), U(10Ø1, 10Ø1)
      COMMON /C/ Y1, B
      Y1 = 1
      B = 2
      DATA A/1./, K1/10Ø1/, NS1 /10Ø1/
      CALL GIPER1 (A, F, FI, PSI, EFL, EFP,
     * K1, NS1, X, T, U)
25    FORMAT (50X, 'TABLA DE SOLUCION' //10X,
     * 110 ('-')/15X, 'T/X', 2X, 11F8.2/(11X, F8.2,
     *1X, 11F8.2)))
      PRINT 25, (X(I), I = 1, K1, 10), (T(J), U(I,J),
     *I = 1, K1, 10), J = 1, NS1, 10)
      STOP
      END
```

● La tarea para el ordenador debe contener 7 unidades de programa: el programa principal indicado aquí, así como los programas obtenidos al resolver los problemas 3.28, 3.23, 3.33. El programa de solución de todo otro problema se distingue del representado por los operadores que contienen la referencia a los subprogramas respectivos.

CAPÍTULO 17

ECUACIONES INTEGRALES

§ 1. Ecuaciones integrales de Volterra

1. Ecuaciones de Volterra de segundo género: conceptos fundamentales, relación con ecuaciones diferenciales. Se llama *ecuación integral lineal de Volterra de segundo género* la ecuación

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt, \tag{1}$$

donde $y(x)$ es la función buscada; y $K(x,\ t)$ y $f(x)$, las funciones conocidas determinadas, respectivamente, en el triángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant x$ y en el segmento $[a,\ b]$. La función $K(x,\ t)$ se denomina *núcleo* de la ecuación integral (1) y la función $f(x)$, *término independiente* de esta ecuación.

Se llama *solución* de la ecuación (1) toda función $y(x)$, $x \in [a,\ b]$ cuya sustitución en esta ecuación la convierte en identidad. La cuestión sobre la existencia de la solución y su unicidad se resuelve de manera diferente según las propiedades del núcleo $K(x,\ t)$ y del término independiente $f(x)$, así como en dependencia del hecho que aclara en qué clase de funciones se busca la solución. A continuación, siempre que no se estipule lo contrario, supondremos que las funciones $K(x,\ t)$ y $f(x)$ son continuas en su dominio de definición. Con esta condición la ecuación (1) tiene una sola solución única en la clase de funciones que son continuas en $[a,\ b]$.

Las ecuaciones integrales de Volterra de segundo género suelen utilizarse al describir el carácter dinámico de diferentes procesos en los sistemas. En particular, todo problema de Cauchy para la ecuación diferencial lineal

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_n(x)\,y=f(x),$$

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

puede ser reducido a la resolución de cierta ecuación integral lineal de Volterra de segundo género.

EJEMPLO 1. Plantear una ecuación integral que corresponda al problema de Cauchy

$$u''+2u'+u=x^2,\quad u(0)=1,\quad u'(0)=0.$$

◀ Supongamos

$$u''(x) = y(x). \tag{2}$$

Integrando (2), al tener en cuenta las condiciones iniciales, encontramos sucesivamente

$$u'(x) = u'(0) + \int_0^x y(t)\,dt = \int_0^x y(t)\,dt, \tag{3}$$

$$u(x) = u(0) + \int_0^x ds \int_0^s y(t)\,dt = 1 + \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt. \tag{4}$$

Sustituyendo (2) — (4) en la ecuación diferencial inicial, obtenemos

$$y(x) + 2\int_0^x y(t)\,dt + \left(1 + \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt\right) = x^2,$$

o bien

$$y(x) = x^2 - 1 - \int_0^x (2+x-t)\,y(t)\,dt. \tag{5}$$

Así pues, hemos mostrado que si $u(x)$ es la solución del problema inicial de Cauchy, entonces la función $y(x) = u''(x)$ satisface la ecuación integral (5). Inversamente, si $y(x)$ es la solución de esta ecuación, entonces la función $u(x)$, que es definida por la relación (4), satisface tanto la ecuación diferencial inicial como las condiciones iniciales. Por consiguiente, el problema de Cauchy en cuestión es equivalente a la ecuación integral (5). ▶

Verificar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones integrales correspondientes:

1.1. $y(x) = e^{2x}$, $y(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} y(t)\,dt$.

1.2. $y(x) = xe^{x^3/3}$, $y(x) = x + \int_0^x xty(t)\,dt$.

1.3. $y(x) = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$,

$$y(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-t)} \operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt.$$

Plantear las ecuaciones integrales que correspondan a los siguientes problemas de Cauchy:

1.4. $u' + 2xu = e^x$, $y(0) = 1$.

1.5. $u'' - 2u' + u = 0$, $u(2) = 1$, $u'(2) = -2$.

1.6. $u'' - \operatorname{sen} x \cdot u' + e^x u = x$, $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$.

1.7. $u''' + xu = e^x$, $u(0) = 1$, $u'(0) = u''(0) = 0$.

1.8. $u^{IV} + u'' - u = 0$, $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$. $u'''(0) = 1$.

1.9*. Mostrar que el problema de Cauchy para una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n (y) = f(x),$$

$$y_0(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

se reduce a la ecuación integral de forma (1) con el núcleo

$$K(x, t) = -\sum_{l=1}^{n} a_k \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

que depende únicamente de la diferencia $x - t$ de sus argumentos (*ecuación integral del tipo de convolución*, véase el p. 3).

El problema de Cauchy para una ecuación diferencial arbitraria de primer orden que tiene la forma

$$y' = f(x, y),\quad y(x_0) = y_0$$

es equivalente, en el caso general, a la ecuación integral no lineal de Volterra

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(t))\, dt.$$

Análogamente, el problema de Cauchy para una ecuación diferencial, arbitraria de n-ésimo orden, resuelta con respecto a la derivada mayor,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),\ y(x_0) = y_0,$$

$$y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

puede ser reducido al sistema de ecuaciones integrales no lineales de Volterra.

EJEMPLO 2. Plantear un sistema de ecuaciones integrales que corresponda al problema de Cauchy

$$y'' = 2y - y'^2,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$$

◀ Suponiendo $y_1(x) = y(x)$, $y_2(x) = y'(x)$, reduzcamos el problema inicial al de Cauchy para el sistema normal de segundo orden

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1 - y_2^2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

A su vez, el sistema obtenido de ecuaciones diferenciales, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es equivalente al sistema de ecuaciones integrales

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)\,dt,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (2y_1(t) - y_2^2(t))\,dt. \blacktriangleright$$

Plantear ecuaciones integrales o sistemas de ecuaciones que correspondan a los siguientes problemas de Cauchy:

1.10. $y' = 1 + x \operatorname{sen} y$, $y(\pi) = 2\pi$.

1.11. $y' = -1 + 3x^2 + y^2$, $y(1) = 1$,

1.12. $y'' = x + y^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

1.13. $y''' = \frac{3}{2} xy'^2$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

1.14. $y''' = x + xy^2 - y'^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

En muchos casos la resolución de la ecuación integral de Volterra de segundo género (o de un sistema de tales ecuaciones) puede ser reducida, a su vez, a la resolución de cierto problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias. Aquí indicaremos dos procedimientos por cuyo medio se puede hacer esto.

a) Si en la ecuación integral inicial (1) el núcleo $K(x, t)$ y el término independiente $f(x)$ tienen derivadas continuas $K'(x, t)$ y $f'(x)$, esta ecuación puede ser derivada (una vez o más veces) lo que precisamente permite, en varios casos, reducirla al problema de Cauchy para cierta ecuación diferencial ordinaria.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación integral

$$y(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\,dt. \tag{6}$$

◀ Derivando sucesivamente la ecuación integral, obtenemos

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\,dt, \tag{7}$$

$$y''(x) = -\operatorname{sen} x + y(x) - \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\,dt. \tag{8}$$

Eliminando de las ecuaciones (6) y (8) la integral $\int_0^x \operatorname{sen}(x-y)\, y(t)\, dt$, obtenemos para la función incógnita $y(x)$ la ecuación diferencial $y''(x) = 0$. De (6) y (7) encontramos las condiciones iniciales: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Por consiguiente, $y(x) = x$. ▶

El procedimiento examinado siempre conduce a la meta, cuando el núcleo $K(x, t)$ tiene la forma de un polinomio según los grados del binomio $x - t$ (véase el problema 1.9).

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación integral

$$y(x) = x + 2\operatorname{sen} x - 1 - \int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt. \tag{9}$$

◀ Derivando la ecuación (9) dos veces, obtenemos

$$y'(x) = 1 + 2\cos x - \int_0^x y(t)\, dt, \tag{10}$$

$$y''(x) = -2\operatorname{sen} x - y(x). \tag{11}$$

La ecuación (11), o bien en la forma estándar

$$y'' + y = -2\operatorname{sen} x, \tag{12}$$

es precisamente la ecuación diferencial buscada para la función $y(x)$. Determinemos, a partir de (9) y (10), las condiciones iniciales cuando $x = 0$:

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 3. \tag{13}$$

Resolviendo el problema de Cauchy (12), (13), encontramos

$$y(x) = 2\operatorname{sen} x + (x-1)\cos x$$

que es precisamente la solución de la ecuación integral inicial. ▶

b) Supongamos que la ecuación integral inicial (1) tiene la forma

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \left(\sum_{i=1}^n p_i(x)\, q_i(t) \right) y(t)\, dt \tag{14}$$

(ecuación de núcleo degenerado).

Escribámosla del modo siguiente:

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n p_i(x) \int_0^x q_i(t)\, y(t)\, dt. \tag{15}$$

Introduciendo las funciones

$$u_1(x)=\int_0^x q_1(t)\,y(t)\,dt,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (16)$$
$$u_n(x)=\int_0^x q_n(t)\,y(t)\,dt$$

y sustituyéndolas en (15), sacamos la conclusión de que la solución de la ecuación integral (14) tiene la forma

$$y(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n} p_i(x)\,u_i(x). \qquad (17)$$

Luego, derivando las relaciones (16) y sustituyendo en vez de $y(x)$ la expresión (17), obtenemos para las funciones incógnitas $u_i(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales

$$u_1'(x)=q_1(x)\,f(x)+\sum_{i=1}^{n} q_1(x)\,p_i(x)\,u_i(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n'(x)=q_n(x)\,f(x)+\sum_{i=1}^{n} q_n(x)\,p_i(x)\,u_i(x).$$

De (16), cuando $x=0$, encontramos las condiciones iniciales: $u_1(0)=\ldots=u_n(0)=0$. Determinadas las funciones $u_i(x)$ y sustituidas éstas en (17), obtenemos la solución $y(x)$ de la ecuación integral (14).

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación integral

$$y(x)=1+\int_0^x \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} x}\,y(t)\,dt.$$

◀ Suponiendo $u(x)=\int_0^x \operatorname{ch} t\,y(t)\,dt$, obtenemos

$$y(x)=1+\frac{1}{\operatorname{ch} x}\,u(x).$$

Seguidamente, la ecuación diferencial para $u(x)$ tiene la forma

$$u'(x)=\operatorname{ch} x\;y(x)=\operatorname{ch} x\left(1+\frac{1}{\operatorname{ch} x}\,u(x)\right)$$

o bien

$$u'-u=\operatorname{ch} x.$$

Resolviendo esta ecuación, al tener en cuenta la condición inicial $u(0) = 0$, encontramos $u(x) = \frac{1}{2}(xe^x + \operatorname{sh} x)$, de donde

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{xe^x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \blacktriangleright$$

Resolver las ecuaciones integrales, reduciéndolas previamente a las ecuaciones diferenciales ordinarias:

1.15. $y(x) = e^x + \int_0^x y(t)\,dt.$

1.16. $y(x) = 1 + \int_0^x ty(t)\,dt.$

1.17. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt.$

1.18. $y(x) = e^{-x}\cos x - \int_0^x \cos x e^{-(x-t)} y(t)\,dt.$

1.19. $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$

1.20. $y(x) = x - 1 + \int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$

1.21. $y(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2\,y(t)\,dt.$

1.22. $y(x) = \operatorname{ch} x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\,y(t)\,dt.$

1.23. $y(x) = x + \int_0^x (4\operatorname{sen}(x-t) - x + t)\,y(t)\,dt.$

1.24. $y(x) = 1 + \int_0^x ((x-t)^2 - (x-t))\,y(t)\,dt.$

2. Método de aproximaciones sucesivas. Resolución con ayuda de la resolvente. El método de aproximaciones sucesivas con referencia

particular a la ecuación integral lineal de Volterra de segundo género

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt$$

consiste en lo siguiente. Se conforma una sucesión de funciones $y_0(x)$, $y_1(x)$, . . ., $y_n(x)$, . . ., donde la aproximación nula $y_0(x)$ es una función arbitraria y las aproximaciones sucesivas se determinan con ayuda de la relación recurrente

$$y_n(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\ t)\,y_{n-1}(t)\,dt,\quad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Si el núcleo $K(x,\ t)$ y el término independiente $f(x)$ son continuos respectivamente para $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant t\leqslant x$ y en el segmento $[a,\ b]$, entonces la sucesión de aproximaciones $y_n(x)$, $n=0,\ 1,\ \ldots$, construida de este modo converge, cuando $n\to 0$, hacia la única resolución continua de la ecuación integral.

Generalmente se supone $y_0(x)=f(x)$, pero esto de ninguna manera es obligatorio: la elección acertada de la aproximación nula permite a menudo acelerar la convergencia de la sucesión $y_n(x)$ hacia la solución exacta.

EJEMPLO 6. Valiéndose del método de aproximaciones sucesivas, resolver la ecuación

$$y(x)=1-\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$$

◀ Supongamos

$$y_0(x)=1.$$

Entonces

$$y_1(x)=1-\int_0^x (x-t)\,dt=1-\frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x)=1-\int_0^x (x-t)\left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}.$$

Para la n-ésima aproximación obtenemos

$$y_n(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

de donde

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\cos x. \blacktriangleright$$

Resolver las ecuaciones integrales, sirviéndose del método de aproximaciones sucesivas:

1.25. $y(x)=1+\int_0^x y(t)\,dt,\ y_0(x)=0.$

1.26. $y(x)=\frac{x^2}{2}+x-\int_0^x y(t)\,dt,$

a) $y_0(x)=1$, b) $y_0(x)=\frac{x^2}{2}+x.$

1.27. $y(x)=1-x^2+\int_0^x xy(t)\,dt,$

a) $y_0(x)=1-x^2$, b) $y_0(x)=1.$

1.28. $y(x)=1+\int_0^x xy(t)\,dt,\ y_0(x)=1.$

1.29. $y(x)=1+\int_0^x ty(t)\,dt,\ y_0(x)=1.$

1.30. $y(x)=1+\int_0^x t^p y(t)\,dt,\ y_0(x)=1,\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

1.31. $y(x)=x-\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt,\ y_0(x)=0.$

1.32. $y(x)=1+\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt,\ y_0(x)=0.$

1.33. $y(x)=2^x+\int_0^x 2^{x-t}y(t)\,dt,\ y_0(x)=0.$

1.34. $y(x)=1+x^2-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\,y(t)\,dt,\ y_0(x)=0.$

En los problemas 1.35—1.37, valiéndose del método de aproximaciones sucesivas, hállese para las ecuaciones no lineales dadas de Volterra la segunda aproximación $y_2(x)$; en calidad de aproximación nula tómese $y_0(x) = 0$.

1.35. $y(x) = \int_0^x (t^2 - y^2(t))\, dt.$

1.36. $y(x) = x - \pi + \int_0^x t \operatorname{sen} y(t)\, dt.$

1.37. $y(x) = \int_0^x te^{-y(t)}\, dt.$

Frecuentemente en vez de una sola ecuación se examina una familia de ecuaciones

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, y(t)\, dt \qquad (18)$$

que corresponden a diferentes valores del parámetro numérico λ. Suponiendo que λ es fijo, vamos a resolver la ecuación (18) por medio del método de aproximaciones sucesivas, tomando en calidad de aproximación nula $y_0(x) = f(x)$. Entonces obtendremos

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, f(t)\, dt = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t)\, f(t)\, dt,$$

donde

$$K_1(x, t) = K(x, t);$$

$$y_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^x K(x, s) \left(\int_a^s K_1(s, t)\, f(t)\, dt \right) ds = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t)\, f(t)\, dt +$$

$$+ \lambda^2 \int_a^x \left(\int_t^x K(x, s)\, K_1(s, t)\, ds \right) \cdot f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x, t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^x K_2(x, t)\, f(t)\, dt,$$

donde

$$K_2(x, t)=\int_t^x K(x, s)\, K_1(s, t)\, ds.$$

En general,

$$y_n(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}\lambda^j\int_a^x K_j(x, t)\, f(t)\, dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda^{j-1}K_j(x, t)\right)f(t)\, dt, \tag{19}$$

donde

$$K_j(x, t)=\int_t^x K(x, s)\, K_{j-1}(s, t)\, ds, \quad j=2, 3, \ldots, \tag{20}$$

$$K_1(x, t)=K(x, t).$$

Los núcleos $K_j(x, t)$ se llaman *reiterados* o *iterados*.

Si el núcleo $K(x, t)$ es continuo, la serie

$$R(x, t, \lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}K_j(x, t), \tag{21}$$

cualesquiera que sean los valores fijos de λ, convergen (uniformemente respecto a $x\in[a, b]$ y $t\in[0, x]$) hacia la función $R(x, t, \lambda)$ llamada *resolvente del núcleo* $K(x, t)$. Por lo tanto, la relación (19) en el límite, cuando $n\to\infty$, se convierte en fórmula

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x, t, \lambda)\, f(t)\, dt \tag{22}$$

que expresa la solución de la ecuación integral mediante la resolvente.

EJEMPLO 7. Hallar la resolvente $R(x, t, \lambda)$ del núcleo $K(x, t)=x$ y, utilizándola, resolver la ecuación integral

$$y(x)=x-\frac{1}{2}\int_0^x xy(t)\, dt.$$

◀ De las relaciones recurrentes (20) obtenemos

$$K_1(x, t)=x,$$

$$K_2(x, t)=\int_t^x K(x, s)\, K_1(s, t)\, ds=\int_t^x xs\, ds=x\,\frac{x^2-t^2}{2},$$

$$K_3(x,\ t)=\int_t^x K(x,\ s)\,K_2(s,\ t)\,ds=$$

$$=\int_t^x s\,\frac{s^2-t^2}{2}\,ds=x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^2.$$

En general, se puede comprobar (por ejemplo, con ayuda del método de inducción matemática) que

$$K_j(x,\ t)=x\cdot\frac{1}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{j-1},\quad j=1,\ 2,\ \ldots$$

Sustituyendo esta expresión para los núcleos iterados en la fórmula (21), obtenemos la resolvente

$$R(x,\ t,\ \lambda)=x\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}\left(\frac{x^2-t^2}{2}\right)^{j-1}=xe^{\lambda\frac{x^2-t^2}{2}}.$$

Hallemos ahora la solución de la ecuación integral dada. En el caso en cuestión $\lambda=-\frac{1}{2}$ y $f(x)=x$, por eso, sobre la base de (22), obtenemos

$$y(x)=x-\frac{1}{2}\int_0^x xe^{-\frac{x^2-t^2}{4}}\cdot t\,dt=x-xe^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x d\left(\frac{t^2}{e^4}\right)=xe^{-\frac{x^2}{4}}.\ \blacktriangleright$$

Hallar las resolventes para los núcleos siguientes:

1.38. $K(x,\ t)=1$. 1.39. $(K(x,\ t)=t$.

1.40. $K(x,\ t)=x^2$. 1.41. $K(x,\ t)=xt$.

1.42. $K(x,\ t)=xt^2$. 1.43. $K(x,\ t)=e^{x-t}$.

1.44. $K(x,\ t)=2^{\mathrm{sh}\,x-\mathrm{sh}\,t}$. 1.45. $K(x,\ t)=\frac{1+x^2}{1+t^2}$.

1.46. $K(x,t)=\frac{t^2-t+1}{x^2-x+1}$. 1.47. $K(x,\ t)=\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,t}$.

1.48. Mostrar que para un núcleo arbitrario $K(x,\ t)=x^pt^q$, donde p y q son ciertos números enteros positivos, la resolvente tiene la forma

$$R(x,\ t,\ \lambda)=x^pt^qe^{\lambda\frac{x^{p+q+1}-t^{p+q+1}}{p+q+1}}.$$

1.49. Mostrar que para un núcleo arbitrario $K(x,\ t)=\frac{K(x)}{K(t)}$, $K(t)\neq 0$, la resolvente tiene la forma

$$R(x,\ t,\ \lambda)=\frac{K(x)}{K(t)}\,e^{\lambda(x-t)}.$$

Hallar, con ayuda de la resolvente, las soluciones de las siguientes ecuaciones integrales:

1.50. $y(x) = 1 - \int_0^x ty(t)\,dt.$

1.51. $y(x) = x + \int_0^x xty(t)\,dt.$

1.52. $y(x) = \operatorname{sen} x + 2\int_0^x e^{x-t}y(t)\,dt.$

1.53. $y(x) = \operatorname{ch} x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}\,y(t)\,dt.$

1.54. $y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+t^2}{1+x^2}\,y(t)\,dt.$

3. Ecuaciones de Volterra de segundo género, del tipo de convolución. La ecuación integral de Volterra de segundo género

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x-t)\,y(t)\,dt \qquad (23)$$

en la cual el núcleo $K(x, t) = K(x - t)$ depende sólo de la diferencia de los argumentos se llama *ecuación del tipo de convolución*. Si en (23) a es un número finito, entonces, sin limitar la generalidad (véase el problema 1.65), se puede considerar $a = 0$ lo que supondremos a continuación.

Para resolver las ecuaciones del tipo de convolución se utiliza la transformación de Laplace.

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $K(u)$ son originales (véase la parte 2, cap. 13, § 1, p. 1). Se puede mostrar que en este caso la solución $y(x)$ también será un original y, por consiguiente, a ambos miembros de la ecuación (23) puede aplicarse la transformación de Laplace. Suponiendo

$$y(x) \doteq Y(p), \quad f(x) \doteq F(p), \quad K(u) \doteq \widetilde{K}(p)$$

y utilizando el teorema de convolución según el cual $\int_0^x K(x-t) \times y(t)\,dt \doteq \widetilde{K}(p)\,Y(p)$, obtenemos

$$Y(p) = F(p) + \widetilde{K}(p)\,Y(p),$$

de donde

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1-\widetilde{K}(p)}.$$

El original $y(x)$ para $Y(p)$ será la solución de la ecuación integral.

EJEMPLO 8. Utilizando la transformación de Laplace, resolver la ecuación integral

$$y(x)=1+\int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\,y(t)\,dt.$$

◀ Puesto que $1 \doteq \frac{1}{p}$ y $\operatorname{ch} u \doteq \frac{p}{p^2-1}$, entonces, aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación dada y utilizando el teorema de convolución, obtenemos

$$Y(p)=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2-1}\,Y(p),$$

de donde

$$Y(p)\left(1-\frac{p^2}{p^2-1}\right)=\frac{1}{p},$$

$$Y(p)=\frac{p^2-1}{p(p^2-p-1)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$$

y, por lo tanto, $y(x)=1+\frac{2}{\sqrt{5}}e^{x/2}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{5}}{2}x$. ▶

Con ayuda de la transformación de Laplace hállense las soluciones de las ecuaciones dadas del tipo de convolución:

1.55. $y(x)=e^x-x-1+\int_0^x y(t)\,dt.$

1.56. $y(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^x (x-t)\,y(t)\,dt.$

1.57. $y(x)=xe^{2x}-\int_0^x e^{2(x-t)}y(t)\,dt.$

1.58. $y(x)=\operatorname{sen} x+\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt.$

1.59. $y(x)=e^x+\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt.$

1.60. $y(x) = \operatorname{sen} x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt.$

1.61. $y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 y(t)\, dt.$

1.62. $y(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-t)\, e^{x-t} y(t)\, dt.$

1.63. $y(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-t) \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\, dt.$

1.64. $y(x) = 1 + x\cos x - \operatorname{sen} x + \int_0^x (x-t) \operatorname{sen}(x-t) \times$
$\times\, y(t)\, dt.$

1.65. Mostrar que si $y(x)$ es la solución de la ecuación (23) con $a \neq 0$, la función $y^*(x) = y(x+a)$ satisface la ecuación

$$y^*(x) = f^*(x) + \int_0^x K(x-t)\, y^*(t)\, dt,$$

donde $f^*(x) = f(x+a)$.

1.66. Mostrar que para el núcleo $K(x, t) = K(x-t)$ todos los núcleos iterados y, por consiguiente también la resolvente, dependen exclusivamente de la diferencia de los argumentos $x - t$.

Las ecuaciones del tipo de convolución pueden resolverse también por otro procedimiento, un poco distinto, a saber, utilizando la transformación de Laplace para la determinación de la resolvente. En efecto, la resolvente del núcleo $K(x, t = K(x-t)$ depende sólo de la diferencia de los argumentos (véase el problema 1.66) y, por lo tanto, la solución de la ecuación

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\, y(t)\, dt \qquad (24)$$

puede ser escrita en la forma

$$y(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)\, f(t)\, dt, \qquad (25)$$

donde $R(x-t)=R(x, t, 1)$ y $R(x, t, \lambda)$ es la resolvente del núcleo $K(x, t)=K(x-t)$. Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de las ecuaciones (24) y (25), obtenemos

$$Y(p)=F(p)+\widetilde{K}(p)\,y(p),\ Y(p)\quad Y(p)=F(\widetilde{p})+R(p)\,F(p),$$

de donde

$$\widetilde{R}(p)=\frac{\widetilde{K}(p)}{1-\widetilde{K}(p)}. \tag{26}$$

El original $R(u)\doteq R(p)$ determina la resolvente $R(x-t)$, conociendo la cual hallamos de (25) la solución de la ecuación.

EJEMPLO 9. Valiéndose de la resolvente, hallar la solución de la ecuación

$$y(t)=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^x e^{-\frac{x-t}{2}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\,y(t)\,dt.$$

◀ En el caso dado $K(u)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-u/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}u$ y

$$\widetilde{K}(p)=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{p^2+p+1}.$$

A partir de (26) obtenemos $R(p)=\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\doteq 1-e^{-u}$, o sea, $R(x-t)=1-e^{-(x-t)}$. Teniendo en cuenta que $f(x)=1$, con ayuda de (25) encontramos la solución

$$y(x)=1+\int_0^x(1-e^{-(x-t)})\,dt=x+e^{-x}. \blacktriangleright$$

Hallada la resolvente con ayuda de la transformación de Laplace, resolver las ecuaciones integrales siguientes:

1.67. $y(x)=1+\int_0^x e^{-2(x-t)}\cdot y(t)\,dt.$

1.68. $y(x)=2+\frac{1}{6}\int_0^x(x-t)^3\,y(t)\,dt.$

1.69. $y(x)=e^{-x}+\int_0^x e^{-(x-t)}\operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt.$

1.70. $y(x)=e^{-\frac{x}{2}}+\int\limits_0^x (1-e^{-(x-t)})\,y(t)\,dt.$

1.71. $y(x)=1+\int\limits_0^x e^{-\frac{x-1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(x-t)\,y(t)\,dt.$

Utilizando la transformación de Laplace, resolver los sistemas de ecuaciones del tipo de convolución:

1.72. $y_1(x)=-1+\int\limits_0^x y_2(t)\,dt,\ y_2(x)=x-\int\limits_0^x y_1(t)\,dt.$

1.73. $y_1(x)=-x+\int\limits_0^x y_2(t)\,dt,$

$$y_2(x)=-3x^2+x-5\int\limits_0^x y_1(t)\,dt+2\int\limits_0^x y_2(t)\,dt.$$

1.74. $y_1(x)=x+\int\limits_0^x y_2(t)\,dt,$

$$y_2(x)=\frac{x^3}{6}+2x-1-\int\limits_0^x (x-t)\,y_1(t)\,dt,$$

1.75. $y_1(x)=e^x-\int\limits_0^x y_1(t)\,dt+4\int\limits_0^x e^{x-t}y_2(t)\,dt,$

$$y_2(x)=1-\int\limits_0^x e^{-(x-t)}y_1(t)\,dt+\int\limits_0^x y_2(t)\,dt.$$

1.76. $y_1(x)=x+\int\limits_0^x y_2(t)\,dt,\ y_2(x)=1-\int\limits_0^x y_1(t)\,dt,$

$$y_3(x)=\operatorname{sen} x+\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\,y_1(t)\,dt.$$

4. Ecuaciones de Volterra de primer género. Se llama *ecuación integral lineal de Volterra de primer género* la ecuación que tiene la forma

$$\int\limits_0^x K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x), \tag{27}$$

donde $y(x)$ es la función buscada y $K(x, t)$ y $f(x)$ son las funciones dadas que están determinadas, respectivamente, en el triángulo $a \leqslant x$, $t \leqslant b$, $t \leqslant x$ y en el segmento $[a, b]$. Un ejemplo clásico de ecuaciones de este tipo es la *ecuación de Abel*

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt = f(x),$$

así como su generalización con el núcleo $K(x, t) = \dfrac{1}{(x-t)^{\alpha}}$, $0 < \alpha < 1$, que tiene la singularidad integrable cuando $x = t$. En este punto nos limitaremos a examinar las ecuaciones para las cuales el núcleo $K(x, t)$ y el término independiente $f(x)$ son continuos siempre en el propio dominio de definición.

Por ejemplo, conduce a las ecuaciones de Volterra de primer género el siguiente problema importante que tiene gran aplicación práctica. Sea dado cierto sistema dinámico lineal y sean $x(t)$ su señal de entrada e $y(t)$, su señal de salida. Entonces, como es sabido, $y(t)$ en función de $x(t)$ se puede escribir en la forma

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{28}$$

donde $g(t, \tau)$ es la función ponderante que se determina por las propiedades del sistema. Si, en particular, está cumplida la condición de realizabilidad física (o sea, $g(t, \tau) = 0$ para $\tau > t$) y el sistema se encontraba en reposo hasta el instante t_0 (o sea, $x(t) = 0$ para $t < t_0$), entonces (28) toma la forma

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Si ahora se necesita restablecer según la señal de salida la acción externa, llegamos a la ecuación de Volterra de primer género (29) respecto a $x(t)$ para la función dada $y(t)$.

A distinción de las ecuaciones de Volterra de segundo género, la solución de la ecuación de Volterra de primer género (27) existe sólo en el caso cuando el término independiente $f(x)$ satisface varias condiciones adicionales que dependen, en cada ocasión concreta, de las propiedades del núcleo $K(x, t)$. En particular, cualquiera que sea el núcleo, la condición necesaria de existencia de una solución, como se ve de (27) para $x = 0$, es la igualdad $f(a) = 0$.

EJEMPLO 10. Hallar las condiciones de solubilidad en la clase de funciones continuas y la solución de la ecuación

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, y(t)\, dt = f(x), \quad n = 1, 2, \ldots, x \in [0, c]. \tag{30}$$

◀ Supongamos que la solución continua $y(x)$ existe. Entonces de (30) resulta que $f(0) = 0$ y existe la derivada continua $f'(x)$, $x \in$

$\in [0, c]$. Derivando (30) n veces sucesivamente, obtenemos

$$\int_0^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} y(t)\,dt = f'(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_0^x y(t)\,dt = f^{(n-1)}(x),$$

$$y(x) = f^{(n)}(x).$$

Ahora bien, si la solución continua $y(x)$ existe, la función $f(x)$ tiene las derivadas continuas hasta el n-ésimo orden inclusivamente, con la particularidad de que

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0; \tag{31}$$

en este caso la solución es única y debe tener la forma $y(x) = f^{(n)}(x)$. Sustituyendo en (30) $y(x) = f^{(n)}(x)$ e integrando n veces por partes, teniendo en cuenta las relaciones (31), hallamos que la función $y(x) = f^{(n)}(x)$ es efectivamente la solución de la ecuación inicial (¡compruébese esto!). ▶

Si el núcleo $K(x, t)$ y el término independiente $f(x)$ $(f(a) = 0)$ de la ecuación (27) son tales que existen las derivadas continuas $\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ y $f'(x)$ y, además, la función $K(x, x) \neq 0$ en todas las partes de $[a, b]$, la ecuación (27) es equivalente a la de Volterra de segundo género y, por consiguiente (véase el p. 1), tiene una sola ecuación continua. En efecto, suponiendo la existencia de la solución continua y derivando (27), al tener en cuenta las condiciones citadas, obtenemos

$$K(x, x)\, y(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t)\,dt = f'(x)$$

o bien

$$y(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} + \int_a^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} y(t)\,dt, \tag{32}$$

o sea, $y(x)$ es la solución de la ecuación de Volterra de segundo género (32). Inversamente, efectuando la comprobación directa, nos cercioramos de que la solución de la ecuación (32), a condición de que $f(a) = 0$, satisface la ecuación inicial (véase el problema 1.77).

EJEMPLO 11. Resolver la ecuación

$$\int_0^x (2 + x^2 - t^2)\, y(t)\,dt = x^2,$$

reduciéndola a la ecuación de Volterra de segundo género.

◀ Derivando esta ecuación, obtenemos

$$2y(x)+\int_0^x 2xy(t)\,dt=2x$$

o bien

$$y(x)=x-\int_0^x xy(t)\,dt,$$

o sea, la ecuación de Volterra de segundo género. El núcleo $K(x, t)=$ $=-x$ está degenerado y, suponiendo $u(x)=\int_0^x y(t)\,dt$, obtenemos

$$y(x)=x-xu(x),$$
$$u'(x)=y(x)=x-xu(x)$$

o bien

$$u'+xu=x, \quad u(0)=0.$$

De aquí $u(x)=1-e^{-x^2/2}$ e $y(x)=xe^{-x^2/2}$. ▶

Si en la ecuación inicial de Volterra de primer género (27) $K(x, x)\equiv 0$ en $[a, b]$, entonces, después de derivar esta ecuación, vuelve a obtenerse la ecuación de primer género y, cumplidas las condiciones correspondientes, se puede repetir el procedimiento descrito anteriormente. Sin embargo, en este caso es necesario atentamente tener en cuenta cada vez las limitaciones arriba señaladas para el término independiente que son indispensables para la solubilidad de la ecuación.

EJEMPLO 12. Resolver la ecuación

$$\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt=e^x-1. \tag{33}$$

◀ Las condiciones de existencia y de continuidad de las derivadas para el núcleo y el término independiente aquí están cumplidas. Derivando dos veces, obtenemos

$$\int_0^x \cos(x-t)\,y(t)\,dt=e^x, \tag{34}$$

$$y(x)-\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\,y(t)\,dt=e^x. \tag{35}$$

La ecuación (35) es la de Volterra de segundo género y tiene una sola ecuación continua $y(x)=2e^x-x-1$ la cual puede ser hallada, por

ejemplo, valiéndose del método operacional. No obstante, la función $y(x) = 2e^x - x - 1$ no satisface la ecuación inicial de lo cual podemos convencernos efectuando la sustitución directa. El hecho consiste en que la ecuación (34) no tiene una solución, ya que $e^x|_{x=0} = 1 \neq 0$. Como la solución de la ecuación (33) debe satisfacer la (34), tampoco la ecuación inicial (33) tiene la solución. ▶

1.77. Demostrar que la solución de la ecuación (32) en la cual $f(a) = 0$ es también la solución de la ecuación (27).

Resolver las ecuaciones de Volterra de primer género que damos a continuación, reduciéndolas a las de segundo género:

1.78. $\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt = e^x - x - 1.$

1.79. $\int_0^x e^{x-t} y(t)\, dt = \frac{x^2}{2}.$

1.80. $\int_0^x 3^{x-t} y(t)\, dt = x.$

1.81. $\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\, dt = 1 - \cos x.$

1.82. $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt = \operatorname{sh} x - x.$

1.83. $\int_0^x (x-t)^2\, y(t)\, dt = x^3.$

1.84. $\int_0^x (x-t)^2\, y(t)\, dt = x^3 + x^2.$

1.85. $\int_0^x (1+x-t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2} e^{-x} \operatorname{sen} x.$

1.86. $\int_0^x (1-x^2+t^2)\, y(t)\, dt = \frac{x^2}{2}.$

1.87. $\int_1^x (2t-x)\, y(t)\, dt = x^3 - 1.$

Resolver las ecuaciones de Volterra de primer género, del tipo de convolución, aplicando la transformación de Laplace directamente a la ecuación dada (véase también el p. 3):

1.88. $\int_0^x (x-t)\, y(t)\, dt = \operatorname{ch} x - 1.$

1.89. $\int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2} x^4.$

1.90. $\int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\, dt = x \operatorname{sen} x.$

1.91. $\int_0^x \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}.$

1.92. $\int_0^x (x-t) \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\, dt = \operatorname{sen}^2 x.$

1.93. $\int_0^x (x-t)\, e^{x-t} y(t)\, dt = \frac{1}{2} e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2}.$

1.94. $\int_0^x e^{x-t} \cos(x-t)\, y(t)\, dt = xe^x.$

1.95. $\int_0^x e^{x-t} \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4}.$

1.96. $\int_0^x (x-t) \operatorname{sh}(x-t)\, y(t)\, dt = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$

1.97*. $\int_0^x \sqrt{x-t}\, y(t)\, dt = x^2 \sqrt{x}.$

§ 2. Ecuaciones integrales de Fredholm

1. Conceptos fundamentales. Método de aproximaciones sucesivas y resolvente para las ecuaciones de Fredholm de segundo género. Se llaman *ecuaciones integrales lineales de Fredholm* las ecuaciones que

tienen la forma

$$y(x)-\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x) \tag{1}$$

(*ecuaciones de segundo género*) y

$$\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x) \tag{2}$$

(*ecuaciones de primer género*). En (1) y (2) $y(x)$ es la función buscada; el núcleo $K(x, t)$ y el término independiente $f(x)$ se suponen dados en el cuadrado $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ y en el segmento $[a, b]$, respectivamente. Si, en particular, $K(x, t) = 0$ para $a \leqslant x < t$, las ecuaciones (1) y (2) se convierten en ecuaciones de Volterra de segundo y primer géneros, respectivamente.

Nos limitaremos a examinar las ecuaciones de Fredholm de segundo género que son las más interesantes e importantes para las aplicaciones.

A continuación supondremos que los límites de integración a y b en (1) son los números finitos y las funciones $K(x, t)$ y $f(x)$ son continuos en su dominio de definición o bien, en caso más general, satisfacen las condiciones

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,\ t)|^2\,dx\,dt=B_K^2<+\infty, \tag{3}$$

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx<+\infty. \tag{4}$$

Si $f(x) = 0$ en todas las partes del segmento $[a, b]$, la ecuación de Fredholm de segundo género (1) se denomina *homogénea*; en el caso contrario se llama *heterogénea*. Llamaremos *solución* de la ecuación (1) a toda función $y(x)$ de la clase $L_2(a, b)$, que convierte esta ecuación en identidad respecto a $x \in [a, b]$.

Generalmente no se considera una sola ecuación (1), sino una familia de ecuaciones

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x) \tag{5}$$

que dependen del valor numérico λ el cual puede tomar tanto valores reales como complejos. A distinción de las ecuaciones de Volterra de segundo género, la existencia de la solución de la ecuación (5) y su unicidad dependen considerablemente del valor del parámetro λ (véase el p. 3 en que se habla de esto más detalladamente). Aquí exami-

nemos el caso cuando el número λ satisface la condición

$$|\lambda| < \frac{1}{B_K} = \left(\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 \, dx \, dt \right)^{-1/2} \qquad (6)$$

(más exactamente, $|\lambda| < |\lambda_1|$, donde λ_1 es el número característico, menor en módulo, de la ecuación (5), véase el p. 3).

A condición (6) la ecuación (5) tiene una sola solución (continua si son continuos $K(x, t)$ y $f(x)$) la cual puede ser hallada con ayuda del método de aproximaciones sucesivas, al igual que esto se hace en el caso de ecuaciones de Volterra de segundo género (véase el p. 2 del § 1). De suerte que escribamos la ecuación (5) en la forma

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \, y(t) \, dt$$

y luego, después de escoger arbitrariamente una aproximación nula $y_0(x)$, construyamos la sucesión $y_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, suponiendo que

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \, y_{n-1}(t) \, dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si el número λ satisface la condición (6), entonces, cuando $n \to \infty$, la sucesión $y_n(x)$ converge (en el caso general en la métrica $L_2(a, b)$ y en el caso de un núcleo continuo también uniformemente en $[a, b]$) hacia la solución exacta $y(x)$.

EJEMPLO 1. Valiéndose del método de aproximaciones sucesivas, relsover la ecuación

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 y(t) \, dt = \operatorname{sen} \pi x.$$

◀ En el caso dado, suponiendo $\lambda = 1/2$ y $K(x, t) = 1$, tenemos $\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 \, dx \, dt = B_K^2 = 1$ y, por lo tanto, la condición $|\lambda| < 1/B_K$ está cumplida. Tomando $y_0(x) = \operatorname{sen} \pi x$, encontramos sucesivamente

$$y_1(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_0(t) \, dt = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \operatorname{sen} \pi t \, dt = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi};$$

$$y_2(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_1(t) \, dt =$$

$$= \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\operatorname{sen} \pi t + \frac{1}{\pi} \right) dt = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi};$$

$$y_3(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 y_2(x)\, dt =$$

$$= \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\operatorname{sen} \pi t + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) dt = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2^2 \pi}.$$

En general,

$$y_n(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} =$$

$$= \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k},$$

de donde

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \operatorname{sen} \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Por eso la función

$$y(x) = \operatorname{sen} \pi x + \frac{2}{\pi}$$

es la solución de la ecuación de lo que podemos convencernos al efectuar la comprobación directa. ▶

Valiéndose del método de aproximaciones sucesivas, hallar las soluciones de las ecuaciones dadas de Fredholm de segundo género, después de cerciorarse previamente que la condición (6) está cumplida:

2.1. $y(x) - \int_0^1 xty(t)\, dt = 2x.$

2.2. $y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t\, y(t)\, dt = 1.$

2.3. $y(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \operatorname{sen} 2\pi t\, y(t)\, dt = \frac{1}{2}(1-x).$

2.4. $y(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, y(t)\, t\, dt = 2 \operatorname{sen} x.$

2.5. $y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(x+t) + \cos(x-t))\, y(t)\, dt = \cos x.$

Si en calidad de aproximación nula se escoge el término independiente de la ecuación (5), o sea, $y_0(x) = f(x)$, entonces para la n-ésima aproximación se obtiene la fórmula general (véase el § 1, p. 2)

$$y_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \int_a^b K_j(x, t) f(t)\, dt =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \right) f(t)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

donde los núcleos iterados son definidos por las relaciones

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_j(x, t) = \int_a^b K(x, s) K_{j-1}(s, t)\, ds,$$

$$j = 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Cuando $|\lambda| < 1/B_k$, la serie

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) \tag{9}$$

converge hacia la función $R(x, t, \lambda)$ llamada *resolvente* del núcleo $K(x, t)$. Por lo tanto, (7) en el límite, cuando $n \to \infty$, se convierte en fórmula

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t)\, dt \tag{10}$$

que expresa la solución de la ecuación integral por medio de la resolvente.

OBSERVACIÓN. El concepto de resolvente como función $R(x, t, \lambda)$, con cuya ayuda por la fórmula (10) se determina la solución de la ecuación integral, conserva el sentido cualesquiera que sean los valores de λ para los cuales esta ecuación es unívocamente soluble. El método de aproximaciones sucesivas y la fórmula (9) dan la representación para la resolvente en forma de una serie de potencias de λ (llamada *serie de Neumann*), útil sólo en el dominio $|\lambda| < 1/B_K$.

Sin embargo, existe el método general de determinar la resolvente, o sea, el método de determinantes de Fredholm que, en principio, permite construir la resolvente cualquiera que sea el valor de λ para el cual la ecuación integral tiene la única solución. No examinamos aquí este método.

EJEMPLO 2. Valiéndose de los núcleos iterados, hallar la resolvente y la solución de la ecuación integral

$$y(x) - \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{x}{1+t^2} y(t)\, dt = 1 + x^2.$$

◀ En el caso dado $K(x, t)=\frac{x}{1+t^2}$ y para los núcleos iterados, en virtud de (8), obtenemos

$$K_1(x, t)=K(x, t)=\frac{x}{1+t^2},$$

$$K_2(x, t)=\int_0^1 K(x, s)\,K_1(s, t)\,ds=\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\,\frac{s}{1+t^2}\,ds=\frac{\ln 2}{2}\,\frac{x}{1+t^2},$$

$$K_3(x, t)=\int_0^1 K(x, s)\,K_2(s, t)\,ds=\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+s^2}\,\frac{s}{1+t^2}\,ds=$$

$$=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2\frac{x}{1+t^2},$$

. . . . . .

$$K_j(x, t)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^{j-1}\frac{x}{1+t^2}.$$

Por eso la resolvente del núcleo es igual a

$$R(x, t, \lambda)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j-1}K_j(x, t)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\ln 2}{2}\lambda\right)^{j-1}\frac{x}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{\ln 2}{2}\lambda}\,\frac{x}{1+t^2},$$

con la particularidad de que esta serie converge en el dominio

$$|\lambda|<\frac{2}{\ln 2}. \tag{11}$$

Obsérvese que en el caso en cuestión

$$B_K^2=\int_0^1\int_0^1 |K(x, t)|^2\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{(1+t^2)^2}\,dx\,dt=\frac{\pi+2}{24},$$

o sea, la condición (6) conduce a la desigualdad

$$|\lambda|<2\sqrt{\frac{6}{\pi+2}}. \tag{12}$$

Puesto que $2\sqrt{\frac{6}{\pi+2}}<\frac{2}{\ln 2}$, entonces, comparando (11) y (12), vemos que en el caso en examen el dominio de convergencia de la serie de Neumann para la resolvente es más ancho que esto se garantiza por la condición (6) (en consonancia con la observación hecha en la pág. 553).

Luego, para la ecuación dada $\lambda=\frac{1}{\ln 2}$ y, por lo tanto, $R\left(x, t, \frac{1}{\ln 2}\right)=2\frac{x}{1+t^2}$. La solución de la ecuación, en virtud de (10), es igual a

$$y(x)=1+x^2+\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2\frac{x}{1+t^2}(1+t^2)\,dt=1+\frac{2}{\ln 2}x+x^2. \blacktriangleright$$

Valiéndose del método de núcleos iterados, hallar la resolvente y la solución de las ecuaciones integrales dadas:

2.6. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} y(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

2.7. $y(x)-\frac{\ln 2}{2}\int_0^1 2^{x+t}y(t)\,dt=x.$

2.8. $y(x)+\pi\int_0^1 x\operatorname{sen} 2\pi t\, y(t)\,dt=\cos 2\pi x.$

2.9. $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 xe^t y(t)\,dt=e^{-x}.$

2.10. $y(x)-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\cos t\, y(t)\,dt=1.$

Los núcleos $K(x, t)$ y $L(x, t)$ se llaman *ortogonales* en el cuadrado $a\leqslant x,\ t\leqslant b$ si se cumplen las condiciones

$$\int_a^b K(x, s)\,L(s, t)\,ds=\int_a^b L(x, s)\,K(s, t)\,ds=0$$

para todos los valores de $a\leqslant x,\ t\leqslant b$. Si, en particular, el núcleo $K(x, t)$ es ortogonal a sí mismo, entonces para él el segundo núcleo iterado $K_2(x, t)=0$ en todas las partes del cuadrado $a\leqslant x,\ t\leqslant b$. Por consiguiente, para tal núcleo la serie de Neumann para la resolvente converge para todos valores de λ y la misma resolvente coincide con el núcleo $K(x, t)$.

EJEMPLO 3. Valiéndose del método de núcleos iterados, hallar la resolvente y la solución de la ecuación integral

$$y(x)-\int_{-1}^1 \cos\pi x\cos 3\pi t\, y(t)\,dt=\cos 3\pi x.$$

◀ El núcleo $K(x, t) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ es ortogonal a sí mismo:

$$\int_{-1}^{1} K(x, s) K(s, t)\, ds = \int_{-1}^{1} (\cos \pi x \cos 3\pi s)(\cos \pi s \cos 3\pi t)\, ds = 0.$$

Por eso la resolvente es igual a $R(x, t, \lambda) = \cos \pi x \cos 3\pi t$ y la solución de la ecuación dada tiene la forma

$$y(x) = \cos 3\pi x + \int_{-1}^{1} \cos \pi x \cos^2 3\pi t\, dt = \cos 3\pi x + \cos \pi x. \blacktriangleright$$

2.11. Demostrar que si los núcleos $L(x, t)$ y $M(x, t)$ son ortogonales, la resolvente del núcleo $K(x, t) = L(x, t) + M(x, t)$ será igual a la suma de resolventes de los núcleos $L(x, t)$ y $M(x, t)$, o sea,

$$R_M(x, t, \lambda) = R_L(x, t, \lambda) + R_M(x, t, \lambda).$$

Utilizando la ortogonalidad de los núcleos y el resultado del problema 2.11, resolver las ecuaciones integrales:

2.12. $y(x) - \int_0^1 x \left(1 - \frac{3}{2} t\right) y(t)\, dt = 1.$

2.13. $y(x) - \int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi x y(t)\, t\, dt = x.$

2.14. $y(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x + 2t)\, y(t)\, dt = x.$

2.15. $y(x) - \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (x^2 + 1 + xt)\, y(t)\, dt = 1.$

2.16. $y(x) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2x)\, y(t)\, dt = \operatorname{sen} x.$

2. Resolución de las ecuaciones de Fredholm de segundo género con núcleo degenerado. El núcleo $K(x, t)$ se denomina *degenerado* si tiene la forma

$$K(x, t) = \sum_{j=1}^{n} p_j(x)\, q_j(t).$$

La ecuación integral correspondiente

$$y(x)-\int_a^b\left(\sum_{j=1}^n p_j(x)\,q_j(t)\right)y(t)\,dt=f(x) \tag{13}$$

se resuelve, reduciéndola al sistema de ecuaciones algebraicas lineales del modo siguiente.

Escribamos la ecuación (13) en la forma

$$y(x)-\sum_{j=1}^n p_j(x)\,s_j=f(x), \tag{14}$$

donde los números desconocidos s_j son definidos, mediante la solución buscada $y(x)$, por las igualdades

$$s_j=\int_a^b q_j(t)\,y(t)\,dt, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{15}$$

Al multiplicar la identidad (14) sucesivamente por $q_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, y luego al integrar ambos miembros sobre el segmento $[a, b]$, teniendo en cuenta (15), obtenemos para los números incógnitos s_i el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$s_i-\sum_{j=1}^n\left(\int_a^b q_i(x)\,p_i(x)\,ds\right)s_j=\int_a^b q_i(x)\,f(x)\,dx,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{16}$$

Introduzcamos las designaciones

$$a_{ij}=\int_b^a q_i(x)\,p_j(x)\,dx, \qquad f_i=\int_a^b q_i(x)\,f(x)\,dx. \tag{17}$$

Entonces el sistema (16) se escribirá en la forma

$$s_i-\sum_{j=1}^n a_{ij}s_j=f_i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{18}$$

o en la forma matricial

$$(E-A)\,\mathrm{S}=\mathrm{F}, \tag{19}$$

donde E es la matriz unidad, $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$, $\mathrm{S}=(s_1, \ldots, s_n)^\top$, $\mathrm{F}=(f_1, \ldots, f_n)^\top$.

Si $s_1, \ldots, s_n$ es cualquier solución del sistema (18), de acuerdo con (14) la función

$$y(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n} p_j(x)\, s_j \tag{20}$$

será la solución de la ecuación integral inicial (13). Si el sistema (18) es incompatible, tampoco la ecuación integral tiene una solución.

Este método es naturalmente aplicable también en el caso particular cuando la ecuación (13) es homogénea, o sea, $f(x) = 0$.

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación

$$y(x)-\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t+t\right) y(t)\, dt=\operatorname{sen} 2x.$$

◀ El núcleo $K(x, t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x \operatorname{sen} t+t$ es degenerado. Suponiendo

$$p_1(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x, \quad p_2(x)=1,$$

$$q_1(t)=\operatorname{sen} t, \qquad q_2(t)=t,$$

con ayuda de las fórmulas (17) calculamos

$$a_{11}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}^2 x\, dx=1, \qquad a_{12}=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} x\, dx=0,$$

$$a_{21}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\, x \operatorname{sen} x\, dx=2, \qquad a_{22}=\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx=0,$$

$$f_1=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} 2x\, dx=0, \qquad f_2=\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\operatorname{sen} 2x\, dx=-\pi.$$

El sistema (19) toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix},$$

su solución general: $s_1 = C$, $s_2 = -\pi + 2C$, donde C es la constante arbitraria. Por lo tanto, toda función que tiene la forma

$$y(x)=\operatorname{sen} 2x+\frac{C}{\pi}\operatorname{sen} x-\pi+2c=\operatorname{sen} 2x+C\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} x+2\right)-\pi$$

es la solución de la ecuación integral dada y esta ecuación no tiene otras soluciones. ▶

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación

$$y(x)-2\int_0^1 \sqrt{xt}\,y(t)\,dt=x.$$

◀ Siguiendo el método general anteriormente expuesto, escribamos esta ecuación en forma de

$$y(x)-2\sqrt{x}\,s=x,$$

donde $s=\int_0^1 \sqrt{t}\,y(t)\,dt$. Multiplicando ambos miembros por $\sqrt{x}$ e integrando, obtenemos

$$s-2\int_0^1 x\,dx\cdot s=\int_0^1 x^{3/2}\,dx,$$

o bien $s-s=2/5$. La última ecuación no tiene la solución respecto a s y, por consiguiente, la ecuación integral inicial tampoco tiene una solución. ▶

Hallar todas las soluciones o determinar la insolubilidad de las ecuaciones dadas de Fredholm de segundo género con núcleo degenerado:

2.17. $y(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \operatorname{sen} t\,y(t)\,dt=\operatorname{sen} x.$

2.18. $y(x)-\frac{2e}{e^2-1}\int_0^1 \operatorname{ch} xy(t)\,dt=1.$

2.19. $y(x)-\frac{24}{7}\int_0^1 (1-x^2)\left(1-\frac{3}{2}t\right)y(t)\,dt=x.$

2.20. $y(x)-\int_0^1 (1+x)\cos 2\pi t\,y(t)\,dt=x.$

2.21. $y(x)-\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} t\,y(t)\,dt=\cos^2 x.$

2.22. $y(x)-4\int_0^1 xt^2 y(t)\,dt=0.$

2.23. $y(x)+\int_0^1 e^x t\, y(t)\, dt=0.$

2.24. $y(x)-\int_0^1 (2x-t)\, y(t)\, dt=\cos 2\pi x.$

2.25. $y(x)-\int_0^1 (1+2xt)\, y(t)\, dt=-\frac{1}{6}(x+3).$

2.26. $y(x)-\int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}xt+x^2(t-1)\right) y(t)\, dt=0.$

2.27. $y(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2(x-t)\, y(t)\, dt=\operatorname{sen} 2x.$

2.28. $y(x)+\int_0^1 (x-\sqrt{t})\, y(t)\, dt=\frac{5}{3}x+\sqrt{x}-\frac{1}{6}.$

2.29. $y(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x-t)\, y(t)\, dt=0.$

2.30. $y(x)-3\int_0^1 (x^2t^2+4xt+1)\cdot y(t)\, dt=2\pi^2\cos 2\pi x.$

2.31. $y(x)-\int_{-1}^1 (xt+x^2)\, y(t)\, dt=0.$

3. Números característicos y funciones propias. Teoremas de Fredholm. Los valores del parámetro λ para los cuales la ecuación homogénea

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\, y(t)\, dt=0 \qquad (21)$$

tiene soluciones no nulas (no triviales) $y(x)\not\equiv 0$ se llaman *números característicos* de esta ecuación o del núcleo $K(x,\ t)$ y cada solución no nula se llama *función propia* correspondiente al número característico λ. Obsérvese que el número $\lambda=0$ no es característico, ya que para $\lambda=0$ la ecuación (21) tiene sólo la solución nula. Si λ es el número característico, el número $\mu=1/\lambda$ se denomina *número propio* de la ecuación integral. En este caso $\mu\neq 0$.

De los resultados del p. 2 se deduce que en el caso de una ecuación con núcleo degenerado

$$y(x)-\lambda\int_a^b\left(\sum_{j=1}^n p_j(x)\,q_j(t)\right)y(t)\,dt=0 \tag{22}$$

toda solución tiene la forma

$$y(x)=\lambda\sum_{j=1}^n s_j p_j(x), \tag{23}$$

donde $S=(s_1, \ldots, s_n)^\top$ es la solución del sistema homogéneo

$$(E-\lambda A)\,S=0 \tag{24}$$

con la matriz $A=(a_{ij})$, $a_{ij}=\int_a^b q_i(x)\,p_j'(x)$, $i, j=1, \ldots, n$. Nótese que si λ se sustituye por $1/\mu$, el sistema (23) tomará la forma

$$(A-\mu E)\,S=0, \quad \mu\neq 0. \tag{25}$$

De aquí se deduce que los números propios de la ecuación integral (22) coinciden con los números propios, no nulos, de la matriz A y las funciones propias son definidas por la relación (23), donde $S=(s_1, \ldots, s_n)^\top$ son los vectores propios correspondientes de esta matriz.

EJEMPLO 6. Hallar los números característicos y las funciones propias de la ecuación

$$y(x)-\lambda\int_0^1(xt-2x^2)\,y(t)\,dt=0.$$

◀ El núcleo $K(x, t)=xt-2x^2$ es degenerado. Suponiendo que

$$p_1(x)=x, \qquad p_2(x)=-2x^2,$$

$$q_1(t)=t, \qquad q_2(t)=1,$$

encontramos los elementos de la matriz A en (25):

$$a_{11}=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}, \qquad a_{12}=-2\int_0^1 x^3\,dx=-\frac{1}{2},$$

$$a_{21}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}, \qquad a_{22}=-2\int_0^1 x^2\,dx=-\frac{2}{3}.$$

La ecuación característica para determinar los números propios de la matriz A tiene la forma

$$\det(A-\mu E)=\begin{vmatrix} \frac{1}{3}-\mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3}-\mu \end{vmatrix}=$$

$$=\mu^2+\frac{1}{3}\mu+\frac{1}{36}=\left(\mu+\frac{1}{6}\right)^2=0,$$

de donde $\mu=-1/6$ es el único número propio de la matriz A. Obtenemos los vectores propios respectivos a partir del sistema de ecuaciones

$$\left(A+\frac{1}{6}E\right)S=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuya solución general $s_1=C$, $s_2=C$, donde C es la constante arbitraria. Por lo tanto, finalmente obtenemos que la ecuación integral dada tiene el único número característico $\lambda=\frac{1}{\mu}=-6$ y las funciones propias correspondientes tienen la forma

$$y(x)=-6(s_1x-2s_2x^2)=C(x-2x^2),$$

donde C es la constante arbitraria.

Una ecuación integral puede en absoluto no tener números característicos (por ejemplo, en el caso en que el núcleo $K(x, t)$ es de Volterra o, en el caso de un núcleo degenerado, la matriz A en (24) es nula) o bien no tiene números característicos reales.

EJEMPLO 7. Hallar los números característicos y las funciones propias de la ecuación

$$y(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}x\cos t\,y(t)\,dt=0.$$

◀ Tenemos

$$y(x)-\lambda xs=0,\quad s=\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,y(t)\,dt,$$

de donde

$$s-\lambda s\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx=0.$$

Pero $\int_{-\pi}^{\pi}x\cos x\,dx=0$, por eso, cualquiera que sea λ, la última

ecuación tiene una sola solución: $s = 0$. Por consiguiente, cualquiera que sea λ, la ecuación integral tiene sólo la solución trivial, o sea, no tiene números característicos. ▶

EJEMPLO 8. Hallar los números característicos y las funciones propias de la ecuación

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x-t)\, y(t)\, dt = 0.$$

◀ El núcleo

$$K(x, t) = \operatorname{sen}(x-t) = \operatorname{sen} x \cos t - \cos x \operatorname{sen} t$$

es degenerado y en este caso se puede poner

$$p_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad p_2(x) = -\cos x,$$

$$q_1(t) = \cos t, \quad q_2(t) = \operatorname{sen} t;$$

la matriz $A = \left(a_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} q_i(x)\, p_j(x)\, dx\right)_{i,j=1}^{2}$ tiene la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix};$$

la ecuación característica

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} -\mu & -\pi \\ \pi & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \pi^2 = 0$$

tiene únicamente las raíces complejas $\mu_{1,2} = \pm i\pi$. Determinemos los vectores propios correspondientes. Para $\mu_1 = i\pi$

$$(A - i\pi E) S_{\mu_1} = \begin{pmatrix} -i\pi & -\pi \\ \pi & -i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_1} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Para $\mu_1 = -i\pi$

$$(A + i\pi E) S_{\mu_2} = \begin{pmatrix} i\pi & -\pi \\ \pi & i\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}_{\mu_2} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Finalmente sacamos la conclusión de que la ecuación integral dada no tiene números característicos reales, pero tiene dos números característicos complejos $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{\mu_{1,2}} = \mp i \dfrac{1}{\pi}$. Las funciones propias correspondientes tienen la forma (véanse (26) y (27))

$$y_1(x) = \lambda_1 (C_1 \operatorname{sen} x - iC_1 \cos x) = A_1 e^{ix},$$

$$y_2(x) = \lambda_2 (C_2 \operatorname{sen} x + iC_2 \cos x) = A_2 e^{-ix},$$

donde A_1 y A_2 son las constantes complejas arbitrarias. ▶

Hallar los números característicos y las funciones propias de las ecuaciones integrales dadas con núcleo degenerado (limítese al caso de números característicos reales):

2.32. $y(x)-\lambda\int_0^1 (1+2x)\,ty(t)\,dt=0.$

2.33. $y(x)-\lambda\int_0^1 (1-x^2)\,y(t)\,dt=0.$

2.34. $y(x)-\lambda\int_{-1}^1 |x|\,y(t)\,dt=0.$

2.35. $y(x)-\lambda\int_0^{\pi} x\operatorname{sen} ty(t)\,dt=0.$

2.36. $y(x)-\lambda\int_0^{\pi} \cos x\cos ty(t)\,dt=0.$

2.37. $y(x)-\lambda\int_0^1 (x+t)\,y(t)\,dt=0.$

2.38. $y(x)-\lambda\int_0^1 (xe^t+2t)\,y(t)\,dt=0.$

2.39. $y(x)-\lambda\int_0^1 \left(x\operatorname{sen} 2\pi t-\frac{1}{2\pi}\right) y(t)\,dt=0.$

2.40. $y(x)-\lambda\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+t)\,y(t)\,dt=0.$

2.41. $y(x)-\lambda\int_0^{\pi} \cos(x-t)\,y(t)\,dt=0.$

Para las ecuaciones de Fredholm de segundo género que tienen la forma

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,\ t)\,y(t)\,dt=f(x), \tag{28}$$

donde a y b son los números finitos, mientras que el núcleo $K(x,\ t)$ y el término independiente $f(x)$ son integrables con el cuadrado en el

dominio $a \leqslant x,\ t \leqslant b$ y sobre el segmento $[a, b]$ (en particular, son continuos), son válidos los siguientes TEOREMAS DE FREDHOLM (enunciándolos, nos limitaremos al caso de un núcleo real $K(x, t)$).

1. *La ecuación homogénea*

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt = 0 \tag{29}$$

tiene un conjunto finito o numerable de los números característicos; si estos números son un conjunto numerable, ellos tienden hacia el infinito

2. *Si λ es un número característico, la ecuación* (29) *y la ecuación homogénea, conjugada a ella,*

$$y(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, t)\, y(t)\, dt = 0, \tag{30}$$

donde $K^*(x, t) = K(t, x)$, tienen un mismo número de soluciones linealmente independientes, con la particularidad consistente en que este número es finito.

3. ALTERNATIVA DE FREDHOLM: *sea la ecuación heterogénea* (28) *tiene una, y sólo una, solución para toda función $f(x) \in L_2(a, b)$, sea la ecuación homogénea correspondiente* (29) *tiene al menos una solución no trivial.* (En otros términos, si el número λ no es característico, la ecuación (28) tiene una, y sólo una, solución para toda función $f(x) \in L_2(a, b)$.

4. *Si λ es un número característico, entonces para que la ecuación* (28) *tenga una solución, es necesario y suficiente que el término independiente $f(x)$ sea ortogonal a toda solución $y^*(x)$ de la ecuación homogénea conjugada* (30), *o sea,*

$$\int_a^b f(x)\, y^*(x)\, dx = 0.$$

Vamos a ilustrar los teoremas de Fredholm, citando como ejemplo una ecuación integral con núcleo degenerado.

EJEMPLO 9. Investigar las soluciones de la ecuación integral

$$y(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos t + x \operatorname{sen} t)\, y(t)\, dt = \cos x \tag{31}$$

en función del valor del parámetro λ.

◀ La resolución de la ecuación integral se reduce a la resolución del sistema heterogéneo

$$(E - \lambda A)\, S = F, \tag{32}$$

donde

$$A = (a_{ij}),\quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x)\, p_j(x)\, dx,\quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

y $F=(f_1, \ldots, f_n)^T$ $\left(f_i=\int_a^b q_i(x) f(x)\,dx\right)$. En el caso en cuestión obtenemos

$$p_1(x)=x^2, \qquad p_2(x)=x,$$

$$q_1(t)=\cos t, \qquad q_2(x)=\operatorname{sen} t,$$

$$a_{11}=\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x^2\,dx=4\pi, \qquad a_{12}=\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x\,dx=0,$$

$$a_{21}=\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot x^2\,dx=0, \qquad a_{22}=\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cdot x\,dx=-2\pi,$$

$$f_1=\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx=\pi, \qquad f_2=\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x\,dx=0.$$

El sistema (32) tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1-4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1+2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

La ecuación característica

$$\det(E-\lambda A)=(1+2\pi\lambda)(1-4\pi\lambda)=0$$

tiene las raíces $\lambda_1=\frac{1}{4\pi}$ y $\lambda_2=-\frac{1}{2\pi}$ que son números característicos de la ecuación homogénea correspondiente.

Cualquiera que sea $\lambda \neq \frac{1}{4\pi}, -\frac{1}{2\pi}$, el sistema (33) tiene la única solución

$$s_1=\frac{\pi}{1-4\pi\lambda}, \quad s_2=0;$$

la solución correspondiente de la ecuación integral:

$$y(x)=\cos x+\frac{\lambda\pi}{1-4\pi\lambda}x^2, \quad \lambda \neq \frac{1}{4\pi}, -\frac{1}{2\pi}.$$

Cuando $\lambda=\lambda_1=\frac{1}{4\pi}$, de (33) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema y al mismo tiempo también la ecuación integral inicial no tienen una solución.

Cuando $\lambda = \lambda_2 = -1/2\pi$, el sistema (33) toma la forma

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

y tiene las soluciones $s_1 = \frac{\pi}{3}$, $s_2 = C$. Las soluciones correspondientes de la solución integral son las siguientes:

$$y(x) = \cos x + \lambda_2 (s_1 x^2 + s_2 x) = \cos x - \frac{1}{6} x^2 + Cx,$$

donde C es la constante arbitraria. ▶

Investigar las soluciones de las ecuaciones dadas con núcleo degenerado para diferentes valores del parámetro λ:

2.42. $y(x) - \lambda \int_0^1 x(1+t)\, y(t)\, dt = x^2$.

2.43. $y(x) - \lambda \int_0^1 xy(t)\, dt = \operatorname{sen} 2\pi x$.

2.44. $y(x) - \lambda \int_0^1 (1+2x)\, ty(t)\, dt = 1 - \frac{3}{2} x$.

2.45. $y(x) - \lambda \int_0^1 x \operatorname{sen} 2\pi t y(t)\, dt = x$.

2.46. $y(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} ty(t)\, dt = \operatorname{ctg} x$.

2.47. $y(x) - \lambda \int_0^1 \arccos ty(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.48. $y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos ty(t)\, dt = \cos x$.

2.49. $y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (1+xt)\, y(t)\, dt = \operatorname{sen} \pi x$.

2.50. $y(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x+t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} x$.

2.51. $y(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\,y(t)\,dt=1.$

4. Ecuaciones de Fredholm de segundo género con núcleo simétrico. El núcleo $K(x, t)$ se llama *simétrico* si satisface la condición

$$K(x, t)=K(t, x)$$

para todos los valores de $a\leqslant x,\ t\leqslant b$.

Para los núcleos simétricos, que satisfacen la condición

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, t)|^2\,dx\,dt<+\infty,$$

adicionalmente a los teoremas principales de Fredholm (véase el p. 3) son válidas las afirmaciones siguientes:

1. *Un núcleo simétrico que es distinto del cero idéntico, tiene al menos un número característico.*

2. *Los números característicos de un núcleo simétrico son reales y las funciones propias, correspondientes a diferentes números característicos, son ortogonales.*

En la práctica se encuentra con frecuencia el caso cuando una ecuación integral con núcleo simétrico es solución de cierto problema de contorno homogéneo autoconjugado para una ecuación diferencial ordinaria. En semejantes casos la determinación de los números característicos y de las funciones propias del núcleo se reduce a la solución del problema de contorno indicado.

EJEMPLO 10. Hallar los números característicos y las funciones propias del núcleo

$$K(x, t)=\begin{cases} t(x+1), & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1,\\ (t+1)x, & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}\tag{34}$$

◀ Obsérvese que el núcleo (34) es simétrico. En efecto, de (34) resulta que

$$K(t, x)=\begin{cases} x(t+1), & 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1,\\ (x+1)t, & 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{35}$$

Comparando (34) y (35) vemos que $K(x, t)=K(t, x)$ para todo par de (x, t).

La ecuación integral homogénea

$$y(x)-\lambda\int_0^1 K(x, t)\,y(t)\,dt=0\tag{36}$$

con núcleo (34) podemos escribirla del modo siguiente

$$y(x)=\lambda\left(x\int_0^x (t+1)\,y(t)\,dt+(x+1)\int_x^1 ty(t)\,dt\right).\tag{37}$$

Luego derivamos (37) dos veces: $y'(x) = \lambda \left(\int_0^x (t+1)\, y(t)\, dt + x(x+1) \right.$

$$\left. \cdot \quad y(x) + \int_x^1 ty(t)\, dt - (x+1)\, xy(x) \right). \tag{38}$$

$$y''(x) = \lambda((x+1)\, y(x) - xy(x)) = \lambda y(x). \tag{39}$$

Ahora bien, el número λ y la función $y(x)$ son tales que

$$y'' - \lambda y = 0. \tag{40}$$

Determinemos ahora las condiciones de contorno a las cuales debe satisfacer la función buscada $y(x)$. Para esto, sustituyendo en (37) y (38) $x = 0$ y $x = 1$, obtenemos

$$y(0) = \lambda \int_0^1 ty(t)\, dt, \quad y(1) = \lambda \int_0^1 (t+1)\, y(t)\, dt,$$

$$y'(0) = \lambda \int_0^1 ty(t)\, dt, \quad y'(1) = \lambda \int_0^1 (t+1)\, y(t)\, dt,$$

de donde

$$y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1). \tag{41}$$

Las relaciones (40) y (41) forman, en conjunto, un problema de contorno homogéneo cuya resolución nos permite hallar los números característicos y las funciones propias correspondientes de la ecuación integral inicial.

Examinemos tres casos.

1) $\lambda = 0$. La ecuación (40) toma la forma $y'' = 0$,

la solución general de ésta: $y(x) = C_1 + C_2 x$. (42)

Utilizando las condiciones de contorno (41), obtenemos para la determinación de las constantes C_1 y C_2 el sistema

$$C_1 = C_2,$$
$$C_1 + C_2 = C_2$$

que tiene la única solución $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Por consiguiente, el problema de contorno y al mismo tiempo también la ecuación (36), cuando $\lambda = 0$, tienen sólo la solución trivial $y(x) \equiv 0$, o sea, $\lambda = 0$ no es un número característico. Además, esto se podía notar directamente de la ecuación (36): si en ésta $\lambda = 0$, entonces $y(x) \equiv 0$.

2) $\lambda = \omega^2 > 0$. La ecuación (40) tiene la forma

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

la solución general de ésta:

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Las condiciones de contorno (41) conducen al sistema

$$C_1+C_2=\omega C_1-\omega C_2,$$

$$C_1e^{\omega}+C_2e^{-\omega}=\omega C_1e^{\omega}-\omega C_2e^{-\omega}$$

o bien, en la forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1-\omega & 1+\omega \\ e^{\omega}-\omega e^{\omega} & e^{-\omega}+\omega e^{-\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si, y sólo si se cumple la condición

$$\begin{vmatrix} 1-\omega & 1+\omega \\ e^{\omega}-\omega e^{\omega} & e^{-\omega}+\omega e^{-\omega} \end{vmatrix}=(1-\omega)(1+\omega)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{vmatrix}=$$

$$=-2(1-\omega)(1+\omega)\operatorname{sh}\omega=0,$$

o sea, $\omega=\pm 1$ ($\omega^2>0$!), o bien $\lambda=\omega^2=1$.

Cuando $\omega=1$, de (43) obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde $y(x)=C_1e^x$, C_1 es la constante arbitraria.

Análogamente, para $\omega=-1$ obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{e} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

de donde $y(x)=C_2e^{-x}$, C_2 es la constante arbitraria.

Ahora bien, $\lambda=1$ es el número característico del núcleo (35), el sistema linealmente independiente de funciones propias, que le corresponden, se componen de dos funciones $y_1=e^x$, $y_2=e^{-x}$ y cada función propia tiene la forma $y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$, donde C_1 y C_2 son las constantes arbitrarias.

3) $\lambda=-\omega^2<0$. En este caso la ecuación (40) tiene la forma

$$y''+\omega^2y=0,$$

la sólución general de ésta: $y(x)=C_1\cos\omega X+C_2\operatorname{sen}\omega x$.

Las condiciones de contorno (41) conducen al sistema

$$C_1=\omega C_2,$$

$$C_1\cos\omega+C_2\operatorname{sen}\omega=-\omega C_1\operatorname{sen}\omega+\omega C_2\cos\omega$$

o bien, en la forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \cos\omega+\omega\operatorname{sen}\omega & \operatorname{sen}\omega-\omega\cos\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si, y sólo si, $\omega^2\operatorname{sen}\omega=0$, o sea, $\omega_n=\pi n$, $n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$, o bien $\lambda_n=-\omega_n^2=-\pi^2n^2$, $n\in N$.

Cuando $\omega=\omega_n=\pi n$, $n=\pm1,\ \pm2,\ \ldots$, del sistema (44)

obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi n \\ (-1)^n & -\pi n(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde $C_1 = \pi n C$, $C_2 = C$ e $y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \operatorname{sen} \pi n x)$, donde C es la constante arbitraria y $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Sin embargo, conviene notar que en esta expresión para $y(x)$ el paso de n a $-n$ conduce únicamente al cambio del signo, o sea, a la variación de la constante C. Teniendo esto en cuenta, obtenemos que a cada uno de los números característicos $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$, le corresponde una función propia básica $y_n = \pi n \cos \pi n x + \operatorname{sen} \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$ y toda función propia tiene la forma

$$y(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \operatorname{sen} \pi n x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

C es la constante arbitraria.

Resumiendo, sacamos la conclusión de que para el núcleo dado el problema de números característicos y de funciones propias tiene la resolución siguiente: $\lambda_0 = 1$, $y_{0,1} = e^x$ $y_{0,2} = e^{-x}$,

$$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \quad y_n = \pi n \cos \pi n x + \operatorname{sen} \pi n x, \quad n \in \mathbb{N}. \blacktriangleright$$

Para los núcleos simétricos dados hállense los números característicos y las funciones propias que les corresponden reduciendo la ecuación integral al problema de contorno homogéneo para la ecuación diferencial ordinaria.

2.52. $K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.53. $K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.54. $K(x, t) = \begin{cases} -x-1, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -t-1, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.55. $K(x, t) = \begin{cases} \cos t \operatorname{sen} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{sen} t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

2.56. $K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \operatorname{sen} x, & t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

2.57. $K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t-1) \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(x-1)}{\operatorname{sen} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.58. $K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(t-1) \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1}, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \dfrac{\operatorname{sh} t \operatorname{sh}(t-1)}{\operatorname{sh} 1}, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

2.59. $K(x, t)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}|x-t|,\ 0\leqslant x\leqslant t\leqslant\pi.$

2.60. $K(x, t)=\begin{cases} -e^{-t}\operatorname{ch} x, & 0\leqslant x\leqslant t, \\ -\operatorname{ch} te^{-x}, & t\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$

Si se da la ecuación integral heterogénea

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x, t)\,y(t)\,dt=f(x); \tag{45}$$

con un núcleo simétrico $K(x, t) = K(t, x)$ que satisface la condición

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, t)|^2\,dx\,dt<+\infty,$$

la solución de la misma puede ser obtenida, en el caso general, del modo siguiente.

Sea $$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots. \tag{46}$$

la sucesión de números característicos del núcleo $K(x, t)$ y sea

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots \tag{47}$$

la sucesión ortonormalizada correspondiente de las funciones propias. En este caso en la sucesión (46) cada número característico se escribe tantas veces cuantas le asigna su rango, o sea, el número de funciones linealmente independientes que corresponden a este número característico.

Si el parámetro λ en la ecuación (45) no coincide con ninguno de los números característicos λ_n, $n = 1, 2, \ldots$, la solución de esta ecuación (solución existente y única en virtud del tercer teorema de Fredholm para todo segundo miembro de $f(x)$) se da por la fórmula

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\lambda_n-\lambda}\,y_n(x), \tag{48}$$

donde

$$f_n=\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,dx,\quad n=1, 2, \ldots \tag{49}$$

Si el parámetro λ coincide con uno de los números característicos que tiene el rango r, o sea,

$$\lambda=\lambda_{m+1}=\lambda_{m+2}=\ldots=\lambda_{m+r}$$

para cierto m, entonces la solución existe si, y sólo si, la función $f(x)$ es ortogonal a todas las funciones propias que corresponden al número

característico dado, o sea, están cumplidas r condiciones

$$\int_a^b f(x)\, y_n(x)\, dx = 0, \quad n = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ m+r. \tag{50}$$

En este caso la ecuación tiene un conjunto infinito de soluciones que tienen la forma

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m+1,\ \ldots,\ m+r}}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda}\, y_n(x) + \\ + C_1 y_{m+1}(x) + \ldots + C_r y_{m+r}(x), \tag{51}$$

donde $C_1, \ldots, C_r$ son las constantes arbitrarias.

EJEMPLO 11. Hallar todas las soluciones de la ecuación integral heterogénea

$$y(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, t)\, y(t)\, dt = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{2}, \\ K(x, t) = \begin{cases} \cos t \operatorname{sen} x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \operatorname{sen} t \cos x, & t \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases} \tag{52}$$

para diferentes valores del parámetro λ.

◀ Los números característicos y las funciones propias correspondientes del núcleo (52) tienen la forma (véase el problema 2.55):

$$\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2, \quad y_n = \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Nótese que en el caso dado cada número característico tiene el rango $r = 1$ y la sucesión de funciones propias es ortogonal, pero no normalizada en el segmento $[0, \pi]$; las funciones propias normalizadas tienen la forma

$$y_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Con ayuda de las fórmulas (49) para $f(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ obtenemos

$$f_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x\, dx = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{4} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x\, dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x\, dx\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\pi}{2(2n+1)} - \frac{\pi}{2} \delta_{n,0} \right) = \begin{cases} 0 & \text{para } n=0, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+1} & \text{para } n \neq 0. \end{cases}$$

Cuando $\lambda \neq \lambda_n$, $n=0, 1, 2, \ldots$, la ecuación tiene la única solución

$$y(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{2n+1}.$$

Cuando $\lambda = \lambda_0 = -\frac{3}{4}$, en virtud de la ortogonalidad de $f(x)$ a la función propia $y_0(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$ obtenemos un conjunto infinito de soluciones que tienen la forma

$$y(x) = \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x}{n(n+1)(2n+1)} + C \operatorname{sen} \frac{x}{2},$$

donde C es la constante arbitraria.

Por fin, si $\lambda = \lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$, la ecuación no tiene solución. ▶

Hallar las soluciones de las ecuaciones de Fredholm de segundo género, con núcleo simétrico, para diferentes valores del parámetro λ (véanse los números característicos y las funciones propias de los núcleos correspondientes en los problemas 2.52—2.60).

2.61. $y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t)\, dt = 1,$

$$K(x, t) = \begin{cases} (t-1)x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ t(x-1), & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2.62. $y(x) - \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t)\, dt = \operatorname{sen} \pi x \cos \frac{\pi}{2} x,$

$$K(x, t) = \begin{cases} -x, & 0 \leqslant x \leqslant t, \\ -t, & t \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2.63. $y(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x, t) y(t)\, dt = x - \pi,$

$$K(x, t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t \cos x, 0 \leqslant x \leqslant t, \\ \cos t \operatorname{sen} x, \ t \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

2.64. $y(x) - \lambda \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sen} |x-t| \, y(t)\, dt = 1.$

RESPUESTAS

1.4 $y(x) = e^x - 2x - \int_0^x 2xy(t)\, dt$. **1.5.** $y(x) = 2x - 9 + \int_2^x (2 - x + t)\, y(t)\, dt$. **1.6.** $y(x) = e^x(x-1) - \operatorname{sen} x + x + \int_0^x (\operatorname{sen} x - e^x(x-t)) \times y(t)\, dt$. **1.7.** $y(x) = e^x - x - \frac{1}{2} \int_0^x x(x-t)^2 y(t)\, dt$. **1.8.** $y(x) = \frac{x^3}{6} - x - \int_0^x \left(x - t - \frac{(x-t)^3}{6}\right) y(t)\, dt$. **1.9.** ● Hacer uso de la fórmula $\int_a^x dt_{n-1} \int_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_a^{t_1} y(t)\, dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} y(t)\, dt$.

1.10. $y(x) = x + \pi + \int_{\pi}^x t \operatorname{sen} y(t)\, dt$. **1.11.** $y(x) = x^3 - x + 1 + \int_1^x y^2(t)\, dt$. **1.12.** $y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)\, dt$, $y_2(x) = \frac{x^2}{2} + 2 + \int_0^x y_1^2(t)\, dt$.

1.13. $y_1(x) = -3 + \int_0^x y_2(t)\, dt$, $y_2(x) = 1 + \int_0^x y_3(t)\, dt$, $y_3(x) = -1 + \frac{3}{2} \int_0^x y_2^2(t)\, dt$. **1.14.** $y_1(x) = 1 + \int_0^x y_2(t)\, dt$, $y_2(x) = \int_0^x y_3(t)\, dt$, $y_3(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x t y_1^2(t)\, dt - \int_0^x y_2^2(t)\, dt$. **1.15.** $y(x) = e^x(x+1)$. **1.16.**

$y(x)=e^{x^2/2}$. **1.17.** $y(x)=\frac{1}{1+x^2}+x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1.18.** $y(x)=\cos x e^{-(x+\operatorname{sen}x)}$. **1.19.** $y(x)=2e^x-2\cos x+5\operatorname{sen}x$. **1.20.** $y(x)=$ $=-e^{-x}$. **1.21.** $y(x)=\frac{1}{6}\left(e^x+3\cos x+3\operatorname{sen}x-4e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **1.22.** $y(x)=1$. **1.23.** $y(x)=x\operatorname{ch}x$. **1.24.** $y(x)=\frac{1}{4}e^x+\frac{1}{4}e^{-x/2}\times$ $\times\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{7}}{2}x+3\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$. **1.25.** $y(x)=e^x$. **1.26.** $y(x)=x$. **1.27.** $y(x)=1$. **1.28.** $y(x)=1+x\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!}=1+xe^{x^2/2}\times$ $\times\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$. **1.29.** $y(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$. **1.30.** $y(x)=e^{\frac{x^{p+1}}{p+1}}$. **1.31.** $y(x)=\operatorname{sen}x$. **1.32.** $y(x)=\operatorname{ch}x$. **1.33.** $y(x)=(2e)^x$. **1.34.** $y(x)=(1+x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$. **1.35.** $y_2(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{63}$. **1.36.** $y_2(x)=x+x\cos x-\operatorname{sen}x$. **1.37.** $y_2(x)=$ $=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$. **1.38.** $e^{\lambda(t-x)}$. **1.39.** $te^{\lambda\frac{x^2-t^2}{2}}$. **1.40.** $x^2e^{\lambda\frac{x^3-t^3}{3}}$. **1.41.** $xte^{\lambda\frac{x^3-t^3}{3}}$. **1.42.** $xt^2e^{\lambda\frac{x^4-t^4}{4}}$. **1.43.** $e^{(\lambda+1)(x-t)}$. **1.44.** $2^{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}e^{\lambda(x-t)}$. **1.45.** $\frac{1+x^2}{1+t^2}e^{\lambda(x-t)}$. **1.46.** $\frac{t^2-t+1}{x^2-x+1}e^{\lambda(x-t)}$. **1.47.** $\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}t}e^{\lambda(x-t)}$. **1.50.** $e^{-\frac{x^2}{2}}$. **1.51.** $xe^{\frac{x^3}{3}}$. **1.52.** $\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\operatorname{sen}x$. **1.53.** $e^x\operatorname{ch}x$. **1.54.** $\frac{e^x}{1+x^2}$. **1.55.** $e^x(x-1)+1$. **1.56.** $\operatorname{ch}x-1$. **1.57.** $e^{2x}-e^x$. **1.58.** $\frac{2}{\sqrt{3}}e^{x/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$. **1.59.** $2e^x-x-1$. **1.60.** $2\operatorname{sen}x-x$. **1.61.** $y(x)=\frac{1}{3}e^x-\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$. **1.62.** $\frac{1}{4}e^{2x}(2x+$ $+3)+\frac{1}{4}$. **1.63.** $\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos\sqrt{3}x$. **1.64.** 1. **1.67.** $2-e^{-x}$. **1.68.** $\operatorname{che}x+\cos x$. **1.69.** $e^{-x}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)$. **1.70.** $\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}}\left(1+4\operatorname{ch}\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)$. **1.71.** $2-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$. **1.72.** $y_1(x)=1-2\cos x$, $y_2(x)=$ $=2\operatorname{sen}x$. **1.73.** $y_1(x)=\frac{3}{25}-\frac{6}{5}x-\frac{1}{25}e^x(3\cos 2x-4\operatorname{sen}2x)$,

$y_2(x) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x)$. **1.74.** $y_1(x) = x + e^{-x} - e^{x/2} \times$ $\times \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$, $y_2(x) = -e^{-x} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{x/2} \times$ $\times \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x$. **1.75.** $y_1(x) = (x+2) \operatorname{sen} x + (2x+1) \cos x$, $y_2(x) =$ $= -\left(\frac{1}{2} + x \right) \operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{2} x + 1 \right) \cos x$. **1.76.** $y_1(x) = 2 \operatorname{sen} x$, $y_2(x) =$ $= 2 \cos x - 1$, $y_3(x) = x$. **1.78.** e^x. **1.79.** $x - \frac{x^2}{2}$. **1.80.** $1 - x \ln 3$. **1.81.** 1. **1.82.** x. **1.83.** 3. **1.84.** La solución no existe. **1.85.** $e^{-x} \times$ $\times \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen} x \right)$. **1.86.** xe^{x^2}. **1.87.** $3(2x-1)$. **1.88.** $\operatorname{ch} x$. **1.89.** $x^2 \times$ $\times \left(6 + \frac{1}{2} x^2 \right)$. **1.90.** $2 \operatorname{sen} x$. **1.91.** $2 \cos x - 1$. **1.92.** La solución no existe. **1.93.** $\frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$. **1.94.** $e^x \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \right)$. **1.95.** 1. **1.96.** 1. **1.97.** $\frac{15}{4} x$. ● Hacer uso de la fórmula $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2.1. $3x$. **2.2.** $\frac{2}{3}$. **2.3.** $1 - x$. **2.4.** $4 \operatorname{sen} x$. **2.5.** $\frac{2}{3} \cos x$. **2.6.** $R(x, t, \lambda) = \frac{1}{1 - \pi\lambda}$, $y(x) = \operatorname{sen} x$. **2.7.** $R(x, t, \lambda) = 2^{x+t} \frac{1}{1 - \frac{3\lambda}{2 \ln 2}}$, $y(x) = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} \cdot 2^{x+1} + x$. **2.8.** $R(x, t, \lambda) = x \operatorname{sen} 2\pi t$, $y(x) = \cos 2\pi x$. **2.9.** $R(x, t, \lambda) = \frac{xe^t}{1 - \lambda}$, $y(x) = e^{-x} + x$. **2.10.** $R(x, t, \lambda) = \frac{2}{2 - \lambda} \times$ $\times \operatorname{sen} x \cos t$, $y(x) = 1 + 2 \operatorname{sen} x$. **2.12.** $1 + \frac{1}{4} x$. **2.13.** $x + \frac{1}{3} \cos 2\pi x$. **2.14.** $x - \pi \cos x$. **2.15.** $7 + 6x^2$. **2.16.** $\operatorname{sen} x - \frac{1}{6} x$. **2.17.** $\operatorname{sen} x + \cos x$. **2.18.** La solución no existe. **2.19.** $x + C(1 - x^2)$. **2.20.** x. **2.21.** $\cos^2 x +$ $+ \frac{1}{2(2 - \ln 2)}$. **2.22.** Cx. **2.23.** 0. **2.24.** $\cos 2\pi x$. **2.25.** $x + \frac{1}{2}$. **2.26.** $C \left(\frac{5}{2} x + x^2 \right)$. **2.27.** La solución no existe. **2.28.** $1 + \sqrt{x}$. **2.29.** $C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. **2.30.** $2\pi^2 \cos 2\pi x + \frac{5}{3}(2x^2 - 1)$. **2.31.** 0. **2.32.** $\lambda = \frac{6}{7}$, $y(x) = C(1 + 2x)$. **2.33.** $\lambda = \frac{3}{2}$, $y(x) = C(1 - x^2)$. **2.34.** $\lambda =$ $= 1$, $y(x) = C|x|$. **2.35.** $\lambda = \frac{1}{\pi}$, $y(x) = Cx$. **2.36.** $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) =$

$= C\cos x$. 2.37. $\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{1,2}(x) = C(\sqrt{3}x \pm 1)$.

2.38. $\mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}(e-1)}$, $y_{1,2}(x) = C\left(\sqrt{\frac{3}{2}(e-1)}\,x \pm 1\right)$.

2.39. $\lambda = -2\pi$, $y(x) = C$. 2.40. $\lambda_{1,2} = \pm\frac{2}{\pi}$, $y_{1,2}(x) = C(\operatorname{sen} x \pm \cos x)$.

2.41. $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x$. 2.42. Para $\lambda \neq \frac{6}{5}$, $y(x) = x^2 + \frac{1}{2}\frac{7\lambda}{6-5\lambda}x$; para $\lambda = \frac{6}{5}$, la solución no existe. 2.43. Para $\lambda \neq 2$, $y(x) = \operatorname{sen} 2\pi x$; para $\lambda = 2$, $y(x) = \operatorname{sen} 2\pi x + Cx$. 2.44. Para $\lambda \neq \frac{6}{7}$, $y(x) = 1 - \frac{3}{2}x$; para $\lambda = \frac{6}{7}$, $y(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1+2x)$. 2.45. Para $\lambda \neq -2\pi$, $y(x) = \frac{2\pi}{2\pi+\lambda}x$; para $\lambda = -2\pi$, la solución no existe. 2.46. $y(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 2.47. Para $\lambda \neq 1$, $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\pi^2\lambda}{8(1-\lambda)}$. 2.48. $y(x) = \cos x + \frac{\pi\lambda}{2}\operatorname{sen} x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.49. Para $\lambda \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, $y(x) = \operatorname{sen}\pi x + \frac{\frac{2}{\pi}\lambda}{1-\frac{2}{3}\lambda}x$; para $\lambda = \frac{1}{2}$, $y(x) = \operatorname{sen}\pi x + \frac{3}{2\pi}x + C$; para $\lambda = \frac{3}{2}$, la solución no existe. 2.50. Para $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{\lambda}{1-\frac{4}{3}\lambda^2}\left((1+2\lambda)x + 1 + \frac{2}{3}\lambda\right)$; para $\lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, la solución no existe. 2.51. Para $\lambda \neq \pm\frac{2}{\pi}$, $y(x) = 1 - \frac{2\lambda}{1+\frac{\lambda\pi}{2}}\operatorname{sen} x$; para $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = 1 - \operatorname{sen} x + C\cos x$; para $\lambda = -\frac{2}{\pi}$, la solución no existe. 2.52. $\lambda_n = -\pi^2 n^2$, $y_n = \operatorname{sen}\pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. 2.53. $\lambda_n = -\frac{\pi^2}{4}(2k+1)^2$, $y_n = \operatorname{sen}\pi\frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 2.54. $\lambda_n = -\omega_n^2$, donde ω_n son las raíces de la ecuación $\omega = \operatorname{ctg}\omega$, $y_n = \cos\omega_n(x-1)$, $n \in \mathbb{N}$. 2.55. $\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n = \operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 2.56. $\lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $y_n =$

$= \cos \frac{2n+1}{2} x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **2.57.** $\lambda_n = 1 - \pi^2 n^2$, $y_n = \operatorname{sen} \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. **2.58.** $\lambda_n = -1 - \pi^2 n^2$, $y_n = \operatorname{sen} \pi n x$, $n \in \mathbb{N}$. **2.59.** $\lambda_0 = 1$, $y_0 = 1$; $\lambda_n = 1 - 4n^2$, $y_n = C_1 \cos 2\pi x + C_2 \operatorname{sen} 2\pi x$, $n \in \mathbb{N}$. **2.60.** $\lambda_n = 1 + \omega_n^2$, donde ω_n son las raíces de la ecuación $\omega = \operatorname{ctg} 2\omega$, $y_n = \cos \omega_n x$, $n \in \mathbb{N}$. **2.61.** Para $\lambda \neq \lambda_n = -\pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda} \cdot \frac{4 \operatorname{sen} \pi (2k+1) x}{\pi (2k+1)};$$

para $\lambda = \lambda_{2m}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = 1 + \lambda_{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2m}} \cdot \frac{4 \operatorname{sen} \pi (2k+1) x}{\pi (2k+1)} + C \operatorname{sen} 2\pi m x;$$

para $\lambda = \lambda_{2m+1}$, $m = 0, 1, \ldots$, la solución no existe.

2.62. Para $\lambda \neq \lambda_n = -\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y(x) = \operatorname{sen} \pi x \cos \frac{\pi}{2} x - \lambda \left(\frac{1}{\lambda + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda + \frac{9\pi^2}{4}} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} x \right);$$

para $\lambda = \lambda_0 = -\frac{\pi^2}{4}$ y $\lambda = \lambda_1 = -\frac{9\pi^2}{4}$, la solución no existe; para $\lambda = \lambda_n$, $n = 2, 3, \ldots$,

$$y(x) = \operatorname{sen} \pi x \cos \frac{\pi}{2} x - \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \frac{\pi^2}{4}} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} x \right) + C \operatorname{sen} \frac{\pi (2n+1)}{2} x.$$

2.63. Para $\lambda \neq \lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$y(x) = x - \pi + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{2n+1}\right)^2}{\lambda - \lambda_n} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} x;$$

para $\lambda = \lambda_n$, la solución no existe. **2.64.** Para $\lambda \neq \lambda_n = 1 - 4\pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

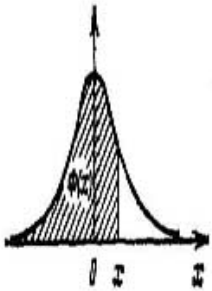
$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda};$$

para $\lambda = \lambda_0 = 1$, la solución no existe; para $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$y(x) = \frac{1}{1 - \lambda_n} + C_1 \cos 2nx + C_2 \operatorname{sen} 2nx.$$

Tabla 51. **Función de distribución $\Phi(x)$**

de la ley normal $N(0,1)$; $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9546

1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Cuantiles u_0 de la distribución normal $N(0, 1)$:

p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
u_p	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Tabla S2. Valores de la función de densidad de distribución normal $N(0,1)\, f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3965	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Continuación de la tabla S2

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4,0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09

Tabla S3. **Distribución de Poisson** $P[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327
2	0,00452	0,01638	0,03334	0,05363	0,07582
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01204
4		0,00006	0,00025	0,00072	0,00158
5			0,00002	0,00006	0,00016
6					0,00001

k \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4	0,00296	0,00497	0,00767	0,01112
5	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7		0,00001	0,00002	0,00004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10419	0,14622
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10445
8	0,00001	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813
11		0,00001	0,00022	0,00193	0,00824
12			0,00006	0,00064	0,00343
13			0,00001	0,00020	0,00132
14				0,00006	0,00047
15				0,00002	0,00016
16					0,00005
17					0,00001

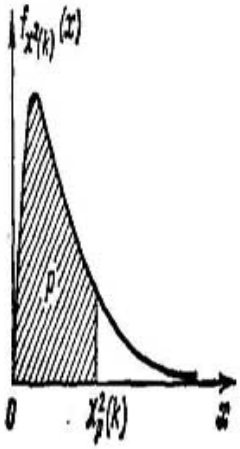
Tabla S4. **Probabilidades sumarias para la distribución de Poisson**

$$P[X \geqslant x] = \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

x \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,09516	0,18127	0,25918	0,32968	0,39347	0,45119	0,50341
2	00468	01752	03694	06155	09020	12190	15580
3	00016	00115	00360	00793	01439	02312	03414
4	0	00006	00027	00078	00175	00336	00575
5		0	00002	00006	00017	00039	00079
6					00001	00004	00009
7							00001

x \ λ	0,8	0,9	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,55067	0,59343	0,63212	0,86466	0,98168	0,99752	0,99966
2	19121	22752	26424	59399	90842	98265	99698
3	04742	06286	08030	32332	76190	93803	98625
4	00908	01346	01899	14288	56653	84880	95762
5	00141	00234	00366	05265	37116	71494	90037
6	00018	00034	00059	01656	21487	55432	80876
7	00002	00004	00008	00453	11067	39370	68663
8		00001	00002	00110	05113	25602	54704
9				00024	02136	15276	40745
10				00005	00823	08392	28338
11				00001	00284	04262	18411
12					00092	02009	11192
13					00027	00883	06380
14					00008	00363	03418
15					00002	00140	01726
16					00001	00051	00823
17						00017	00372
18						00006	00159
19						00002	00065
20						00001	00025
21							00009
22							00003
23							00001
24							

Tabla S5. Cuantiles de distribución ji-cuadrado $\chi^2_p(k)$



k \ p	0,005	0,010	0,025	0,05	0,010	0,20	0,30	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
1	0,04393	0,03157	0,03982	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	1,07	1,64	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,713	2,41	3,22	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	3,67	4,64	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,65	2,19	4,88	5,99	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	6,06	7,29	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	7,23	8,56	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	8,38	9,80	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	9,52	11,0	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	10,7	12,2	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,18	7,27	11,8	13,4	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	12,9	14,6	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	14,0	15,8	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	15,1	17,0	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	16,2	18,2	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	17,3	19,3	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7

Continuación de la tabla S5

k \ p	0,005	0,010	0,025	0,05	0,010	0,20	0,30	0,70	0,80	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	18,4	20,5	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1	12,0	13,5	19,5	21,6	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9	12,9	14,4	20,6	22,8	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3
19	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7	13,7	15,4	21,7	23,9	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8
20	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4	14,6	16,3	22,8	25,0	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3
21	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2	15,4	17,2	23,9	26,9	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8
22	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0	16,3	18,1	24,9	27,3	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3
23	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8	17,2	19,0	26,0	28,4	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7
24	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7	18,1	19,9	27,1	29,6	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2
25	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5	18,9	20,9	28,2	30,7	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6
26	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3	19,8	21,8	29,2	31,8	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1
27	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1	20,7	22,7	30,3	32,9	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5
28	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9	21,6	23,6	31,4	34,0	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9
29	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8	22,5	24,6	32,5	35,1	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3
30	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6	23,4	25,5	33,5	36,3	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7
35	17,2	18,5	20,6	22,5	24,8	27,8	30,2	38,9	41,8	46,1	49,8	53,2	57,3	60,3	66,6
40	20,7	22,2	24,4	26,5	29,1	32,3	34,9	44,2	47,3	51,8	55,8	59,3	63,7	66,8	73,4
45	24,3	25,9	28,4	30,6	33,4	36,9	39,6	49,5	52,7	57,5	61,7	65,4	70,0	73,2	80,1
50	28,0	29,7	32,4	34,8	37,7	41,4	44,3	54,7	58,2	63,2	67,5	71,4	76,2	79,5	86,7
75	47,2	49,5	52,9	56,1	59,8	64,5	68,1	80,9	85,1	91,1	96,2	100,8	106,4	110,3	118,6
100	67,3	70,1	74,2	77,9	82,4	87,9	92,1	106,9	111,7	118,5	124,3	129,6	135,6	140,2	149,4

Tabla S6. **Cuantiles de distribución de Fisher $F_p(k_1, k_2)$**

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8
								$p = 0,9$
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89
30	2,88	2,49	2,24	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72
∞	2,71	2,30	2,03	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67

9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
59,86	60,19	60,71	61,22	61,74	62,00	62,26	62,53	62,79	63,06
9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48
5,24	5,23	5,22	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14
3,94	3,92	3,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78
3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12
2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74
2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49
2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,32
2,44	2,42	2,38	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18
2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08
2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,03	2,00
2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93
2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,90	1,88
2,12	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83
2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79
2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75
2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72
2,00	1,98	1,93	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67
1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64
1,95	1,92	1,87	1,83	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62
1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60
1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57
1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56
1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54
1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53
1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55	1,51
1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50
1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42
1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35
1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26
1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8
					$p = 0,95$			
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,42	3,33	3,22	3,14	3,07
11	4,84	3,93	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,93
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51
19	4,36	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,43
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,26
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94

9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3
19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49
8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55
6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66
4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40
4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70
3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27
3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97
3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75
3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58
2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45
2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34
2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25
2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18
2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11
2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06
2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01
2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97
2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,05	1,98	1,93
2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,06	2,04	1,99	1,95	1,90
2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87
2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84
2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81
2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79
2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77
2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75
2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73
2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71
2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70
2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68
2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58
2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47
1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35
1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8
								$p = 0{,}975$
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84
23	5,75	3,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19

9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,2	1001	1006	1010	1014
39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49
14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95
8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,31
6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,07
5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,90
4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,42	4,36	4,31	4,25	4,20
4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,73
4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,39
3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,14
3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,94
3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,79
3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,66
3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,55
3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,46
3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,38
2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32
2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,26
2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,20
2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,16
2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,11
2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,08
2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,04
2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,01
2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	1,98
2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,95
2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,93
2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,91
2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,89
2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,87
2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,72
2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,58
2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,43
2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,27

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8
								$p = 0,99$
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5982
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51

9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339
99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49
27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22
14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,63	13,56
10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11
7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97
6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74
5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95
5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40
4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00
4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	4,78	3,69
4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45
4,19	3,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25
4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09
3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96
3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84
3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75
3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66
3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58
3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52
3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46
3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40
3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35
3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31
3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27
3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23
3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20
3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,43	2,35	2,26	2,17
3,09	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14
3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11
2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92
2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73
2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53
2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
									$p = 0{,}995$
1	16211	20000	21615	22500	23056	23437	23715	23925	24091
2	198,5	199,0	199,2	199,2	199,3	199,3	199,4	199,4	199,4
3	55,55	49,80	47,47	46,19	45,39	44,84	44,43	44,13	43,88
4	31,33	26,28	24,26	23,15	22,46	21,97	21,62	21,35	21,14
5	22,78	18,31	16,53	15,56	14,94	14,51	14,20	13,96	13,77
6	18,63	14,54	12,92	12,03	11,46	11,07	10,79	10,57	10,39
7	16,24	12,40	10,88	10,05	9,52	9,16	8,89	8,68	8,51
8	14,69	11,04	9,60	8,81	8,30	7,95	7,69	7,50	7,34
9	13,61	10,11	8,72	7,96	7,47	7,13	6,88	6,69	6,54
10	12,83	9,43	8,08	7,34	6,87	6,54	6,30	6,12	5,97
11	12,23	8,91	7,60	6,88	6,42	6,10	5,86	5,68	5,54
12	11,75	8,51	7,23	6,52	6,07	5,76	5,52	5,35	5,20
13	11,37	8,19	6,93	6,23	5,79	5,48	5,25	5,08	4,94
14	11,06	7,92	6,68	6,00	5,56	5,26	5,03	4,86	4,72
15	10,80	7,70	6,48	5,80	5,37	5,07	4,85	4,67	4,54
16	10,58	7,51	6,30	5,64	5,21	4,91	4,69	4,52	4,38
17	10,38	7,35	6,16	5,50	5,07	4,78	4,56	4,39	4,25
18	10,22	7,21	6,03	5,37	4,96	4,66	4,44	4,28	4,14
19	10,07	7,09	5,92	5,27	4,85	4,56	4,34	4,18	4,04
20	9,94	6,99	5,82	5,17	4,76	4,47	4,26	4,09	3,96
21	9,83	6,89	5,73	5,09	4,68	4,39	4,18	4,01	3,88
22	9,73	6,81	5,65	5,02	4,61	4,32	4,11	3,94	3,81
23	9,63	6,73	5,58	4,95	4,54	4,26	4,05	3,88	3,75
24	9,55	6,66	5,52	4,89	4,49	4,20	3,99	3,83	3,69
25	9,48	6,60	5,46	4,84	4,43	4,15	3,94	3,78	3,64
26	9,41	6,54	5,41	4,79	4,38	4,10	3,89	3,73	3,60
27	9,34	6,49	5,36	4,74	4,34	4,06	3,85	3,69	3,56
28	9,28	6,44	5,32	4,70	4,30	4,02	3,81	3,65	3,52
29	9,23	6,40	5,28	4,66	4,26	3,98	3,77	3,61	3,48
30	9,18	6,35	5,24	4,62	4,23	3,95	3,74	3,58	3,45
40	8,83	6,07	4,98	4,37	3,99	3,71	3,51	3,35	3,22
60	8,49	5,79	4,73	4,14	3,76	3,49	3,29	3,14	3,01
120	8,18	5,54	4,50	3,92	3,55	3,28	3,09	2,93	2,81
∞	7,88	5,30	4,28	3,72	3,35	3,09	2,90	2,74	2,62

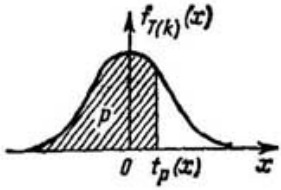
10	12	15	20	24	30	40	60	120
24224	24426	24630	24836	24940	25044	25148	25253	25359
199,4	199,4	199,4	199,4	199,5	199,5	199,5	199,5	199,5
43,69	43,39	43,08	42,78	42,62	42,47	42,31	42,15	41,99
20,97	20,70	20,44	20,17	20,03	19,89	19,75	19,61	19,47
13,62	13,38	13,15	12,90	12,78	12,66	12,53	12,40	12,27
10,25	10,03	9,81	9,59	9,47	9,36	9,24	9,12	9,00
8,38	8,18	7,97	7,75	7,65	7,53	7,42	7,31	7,19
7,21	7,01	6,81	6,61	6,50	6,40	6,29	6,18	6,06
6,42	6,23	6,03	5,83	5,73	5,62	5,52	5,41	5,30
5,85	5,66	5,47	5,27	5,17	5,07	4,97	4,86	4,75
5,42	5,24	5,05	4,86	4,76	4,65	4,55	4,44	4,34
5,09	4,91	4,72	4,53	4,43	4,33	4,23	4,12	4,01
4,82	4,64	4,46	4,27	4,17	4,07	3,97	3,87	3,76
4,60	4,43	4,25	4,06	3,96	3,86	3,76	3,66	3,55
4,42	4,25	4,07	3,88	3,79	3,69	3,58	3,48	3,37
4,27	4,10	3,92	3,73	3,64	3,54	3,44	3,33	3,22
4,14	3,97	3,79	3,61	3,51	3,41	3,31	3,21	3,10
4,03	3,86	3,68	3,50	3,40	3,30	3,20	3,10	2,99
3,93	3,76	3,59	3,40	3,31	3,21	3,11	3,00	2,89
3,85	3,68	3,50	3,32	3,22	3,12	3,02	2,92	2,81
3,77	3,60	3,43	3,24	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73
3,70	3,54	3,36	3,18	3,08	2,98	2,88	2,77	2,66
3,64	3,47	3,30	3,12	3,02	2,92	2,82	2,71	2,60
3,59	3,42	3,25	3,06	2,97	2,87	2,77	2,66	2,55
3,54	3,37	3,20	3,01	2,92	2,82	2,72	2,61	2,50
3,49	3,33	3,15	2,97	2,87	2,77	2,67	2,56	2,45
3,45	3,28	3,11	2,93	2,83	2,73	2,63	2,52	2,41
3,41	3,25	3,07	2,89	2,79	2,69	2,59	2,48	2,37
3,38	3,21	3,04	2,86	2,76	2,66	2,56	2,45	2,33
3,34	3,18	3,01	2,82	2,73	2,63	2,52	2,42	2,30
3,12	2,95	2,78	2,60	2,50	2,40	2,30	2,18	2,06
2,90	2,74	2,57	2,39	2,29	2,19	2,08	1,96	1,83
2,71	2,54	2,37	2,19	2,09	1,98	1,87	1,75	1,61
2,52	2,36	2,19	2,00	1,90	1,79	1,67	1,53	1,36

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8
								$p = 0{,}999$
1	4053+	5000+	5404+	5625+	5764+	5859+	5929+	5981+
2	998,5	999,0	999,2	999,2	999,3	999,3	999,4	999,4
3	167,0	148,5	141,1	137,1	134,6	132,8	131,6	130,6
4	74,14	61,25	56,18	53,44	51,71	50,53	49,66	49,00
5	47,18	37,12	33,20	31,09	29,75	28,84	28,16	27,64
6	35,51	27,00	23,70	21,92	20,81	20,03	19,46	19,03
7	29,25	21,69	18,77	17,19	16,21	15,52	15,02	14,63
8	25,42	18,49	15,83	14,39	13,49	12,86	12,40	12,04
9	22,86	16,39	13,90	12,56	11,71	11,13	10,70	10,37
10	21,04	14,91	12,55	11,28	10,48	9,92	9,52	9,20
11	19,69	13,81	11,56	10,35	9,58	9,05	8,66	8,35
12	18,64	12,97	10,80	9,63	8,89	8,38	8,00	7,71
13	17,81	12,31	10,21	9,07	8,35	7,86	7,49	7,21
14	17,14	11,78	9,73	8,62	7,92	7,43	7,08	6,80
15	16,59	11,34	9,34	8,25	7,57	7,09	6,74	6,47
16	16,12	10,97	9,00	7,94	7,27	6,81	6,46	6,19
17	15,72	10,66	8,73	7,68	7,02	7,56	6,22	5,96
18	15,38	10,39	8,49	7,46	6,81	6,35	6,02	5,76
19	15,08	10,16	8,28	7,26	6,62	6,18	5,85	5,59
20	14,82	9,95	8,10	7,10	6,46	6,02	5,69	5,44
21	14,59	9,77	7,94	6,95	6,32	5,88	5,56	5,31
22	14,38	9,61	7,80	6,81	6,19	5,76	5,44	5,19
23	14,19	9,47	7,67	6,69	6,08	5,65	5,33	5,09
24	14,03	9,34	7,55	6,59	5,98	5,55	5,23	4,99
25	13,88	9,22	7,45	6,49	5,88	5,46	5,15	4,91
26	13,74	9,12	7,36	6,41	5,80	5,38	5,07	4,83
27	13,61	9,02	7,27	6,33	5,73	5,31	5,00	4,76
28	13,50	8,93	7,19	6,25	5,66	5,24	4,93	4,69
29	13,39	8,85	7,12	6,19	5,59	5,18	4,87	4,64
30	13,29	8,77	7,05	6,12	5,53	5,12	4,82	4,58
40	12,61	8,25	6,60	5,70	5,13	4,73	4,44	4,21
60	11,97	7,76	6,17	5,31	4,76	4,37	4,09	3,87
120	11,38	7,32	5,79	4,95	4,42	4,04	3,77	3,55
∞	10,83	6,91	5,42	4,62	4,10	3,74	3,47	3,27

4053+ *significa*

9	10	12	15	20	24	30	40	60	120
6023⁺	6056⁺	6107⁺	6158⁺	6209⁺	6235⁺	6261⁺	6287⁺	6313⁺	6340⁺
999,4	999,4	999,4	999,4	999,4	999,5	999,5	999,5	999,5	999,5
129,9	129,2	128,3	127,4	126,4	125,9	125,4	125,0	124,5	124,0
48,47	48,05	47,41	46,76	46,10	45,77	45,43	45,09	44,75	44,40
27,24	26,92	26,42	25,91	25,39	25,14	24,87	24,60	24,33	24,06
18,69	18,41	17,99	17,56	17,12	16,89	16,67	16,44	16,21	15,99
14,33	14,08	13,71	13,32	12,93	12,73	12,53	12,33	12,12	11,91
11,77	11,54	11,19	10,84	10,48	10,30	10,11	9,92	9,73	9,53
10,11	9,89	9,57	9,24	8,90	8,72	8,55	8,37	8,19	8,00
8,96	8,75	8,45	8,13	7,80	7,64	7,47	7,30	7,12	6,94
8,12	7,92	7,63	7,32	7,01	6,85	6,68	6,52	6,35	6,17
7,48	7,29	7,00	6,71	6,40	6,25	6,09	5,93	5,76	5,59
6,98	6,80	6,52	6,23	5,93	5,78	5,63	5,47	5,30	5,14
6,58	6,40	6,13	5,85	5,56	5,41	5,25	5,10	4,94	4,77
6,26	6,08	5,81	5,54	5,25	5,10	4,95	4,80	4,64	4,47
5,98	5,81	5,55	5,27	4,99	4,85	4,70	4,54	4,39	4,23
5,75	5,58	5,32	5,05	4,78	4,63	4,48	4,33	4,18	4,02
5,56	5,39	5,13	4,87	4,59	4,45	4,30	4,15	4,00	3,84
5,39	5,22	4,97	4,70	4,43	4,29	4,14	3,99	3,84	3,68
5,24	5,08	4,82	4,56	4,29	4,15	4,00	3,86	3,70	3,54
5,11	4,95	4,70	4,44	4,17	4,03	3,88	3,74	3,58	3,42
4,99	4,83	4,58	4,33	4,06	3,92	3,78	3,63	3,48	3,32
4,89	4,73	4,48	4,23	3,96	3,82	3,68	3,53	3,38	3,22
4,80	4,64	4,39	4,14	3,87	3,74	3,59	3,45	3,29	3,14
4,71	4,56	4,31	4,06	3,79	3,66	3,52	3,37	3,22	3,06
4,64	4,48	4,24	3,99	3,72	3,59	3,44	3,30	3,15	2,99
4,57	4,41	4,17	3,92	3,66	3,52	3,38	3,23	3,08	2,92
4,50	4,35	4,11	3,86	3,60	3,46	3,32	3,18	3,02	2,86
4,45	4,29	4,05	3,80	3,54	3,41	3,27	3,12	2,97	2,81
4,39	4,24	4,00	3,75	3,49	3,36	3,22	3,07	2,92	2,76
4,02	3,87	3,64	3,40	3,15	3,01	2,87	2,73	2,57	2,41
3,69	3,54	3,31	3,08	2,83	2,69	2,55	2,41	2,25	2,08
3,38	3,24	3,02	2,78	2,53	2,40	2,26	2,11	1,95	1,76
3,10	2,96	2,74	2,51	2,27	2,13	1,99	1,84	1,66	1,45
$4053 \cdot 10^3$									

Tabla S7. **Cuantiles de distribución de Student $t_p(k)$**



k \ p	0,750	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,999
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,3
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,2
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090

Tabla S8. **Valores de la función $r = \text{th } z$**

z	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08
0,0	0,000	0,020	0,040	0,060	0,080
0,1	0,100	0,119	0,139	0,159	0,178
0,2	0,197	0,217	0,236	0,254	0,273
0,3	0,291	0,310	0,328	0,345	0,363
0,4	0,380	0,397	0,414	0,430	0,446
0,5	0,462	0,478	0,493	0,508	0,523
0,6	0,537	0,551	0,565	0,578	0,592
0,7	0,604	0,617	0,629	0,641	0,653
0,8	0,664	0,675	0,686	0,696	0,706
0,9	0,716	0,726	0,735	0,744	0,753
1,0	0,762	0,770	0,778	0,786	0,793
1,1	0,801	0,808	0,814	0,821	0,828
1,2	0,834	0,840	0,846	0,851	0,851
1,3	0,862	0,867	0,872	0,876	0,881
1,4	0,885	0,890	0,894	0,898	0,902
1,5	0,905	0,909	0,912	0,915	0,919
1,6	0,922	0,925	0,928	0,930	0,933
1,7	0,936	0,938	0,940	0,943	0,945
1,8	0,947	0,949	0,951	0,953	0,955
1,9	0,956	0,958	0,960	0,961	0,963

Tabla S9. **Valores de los polinomios ortogonales $P_k(i)$**

$n=8$

i	P_2	P_2	P_3	P_4	P_5
1	−7	+7	−7	+7	−7
2	−5	+1	+5	−13	+23
3	−3	−3	+7	−3	−17
4	−1	−5	+3	+9	−15
5	+1	−5	−3	+9	+15
6	+3	−3	−7	−3	+17
7	+5	+1	−5	−13	−23
8	+7	+7	+7	+7	+7
$\sum P_k^2$	168	168	264	616	2184
λ_k	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{10}$

$n=10$

i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	−9	+6	−42	+18	−6
2	−7	+2	+14	−22	+14
3	−5	−1	+35	−17	−1
4	−3	−3	+31	+3	−11
5	−1	−4	+12	+18	−6
6	+1	−4	−12	+18	+6
7	+3	−3	−31	+3	+11
8	+5	−1	−35	−17	+1
9	+7	+2	−14	−22	−14
10	+9	+6	+42	+18	+6
$\sum P_k^2$	330	132	8580	2860	780
λ_k	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{10}$

$n=12$

i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	−11	+55	−33	33	−33
2	−9	+25	+3	−27	+57
3	−7	+1	+21	−33	+21
4	−5	−17	+25	−13	−29
5	−3	−29	+19	+12	−44
6	−1	−35	+7	+28	−20
7	+1	−35	−7	+28	+20
8	+3	−29	−19	+12	+44
9	+5	−17	−25	−13	+29
10	+7	+1	−21	−33	−21
11	+9	+25	−3	−27	−57
12	+11	+55	+33	33	+33
$\sum P_k^2$	572	12012	5148	8008	15912
λ_k	2	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{20}$

$n=13$

i	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	−6	+22	−11	+99	−22
2	−5	+11	0	−66	+33
3	−4	+2	+6	−96	+18
4	−3	−5	+8	−54	−11
5	−2	−10	+7	11	−26
6	−1	−13	+4	+64	−20
7	0	−14	0	+84	0
8	+1	−13	−4	+64	+20
9	+2	−10	−7	+11	+26
10	+3	−5	−8	−54	+11
11	+4	+2	−6	−96	−18
12	+5	+11	0	−66	−33
13	+6	+22	+11	+99	+22
$\sum P_k^2$	182	2002	572	68068	6188
λ_k	1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{120}$

Tabla S10. **Criterio de Wilkoxon, de Mann y de Whitney. Probabilidades $p = P\,[W < w_m]$ para las muestras de volumen n_1 y n_2 $(n_1 \geqslant n_2)$**

$n_1 = 3$

w_m \ n_2	1	2	3
0	0,250	0,100	0,050
1	0,500	0,200	0,100
2	0,750	0,400	0,200
3		0,600	0,350
4			0,500
5			0,650

$n_1 = 4$

w_m \ n_2	1	2	3	4
0	0,200	0,067	0,028	0,014
1	0,400	0,133	0,057	0,029
2	0,600	0,267	0,114	0,057
3		0,400	0,200	0,100
4		0,600	0,314	0,171
5			0,429	0,243
6			0,571	0,343
7				0,344
8				0,557

$n_1 = 5$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5
0	0,167	0,047	0,018	0,008	0,004
1	0,333	0,095	0,036	0,016	0,008
2	0,500	0,190	0,071	0,032	0,016
3	0,667	0,286	0,125	0,056	0,028
4		0,429	0,196	0,095	0,048
5		0,571	0,286	0,143	0,075
6			0,393	0,206	0,111
7			0,500	0,278	0,155
8			0,607	0,365	0,210
9				0,452	0,274
10				0,548	0,345
11					0,421
12					0,500
13					0,579

Continuación de la tabla S10

$n_1 = 6$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5	6
0	0,143	0,036	0,012	0,005	0,002	0,001
1	0,286	0,071	0,024	0,010	0,004	0,002
2	0,428	0,143	0,048	0,019	0,009	0,004
3	0,571	0,214	0,083	0,033	0,015	0,008
4		0,321	0,131	0,057	0,026	0,013
5		0,429	0,190	0,086	0,041	0,021
6		0,571	0,274	0,129	0,063	0,032
7			0,357	0,176	0,089	0,047
8			0,452	0,238	0,123	0,066
9			0,548	0,305	0,165	0,090
10				0,381	0,214	0,120
11				0,457	0,268	0,115
12				0,545	0,331	0,197
13					0,396	0,242
14					0,465	0,294
15					0,535	0,350
16						0,409
17						0,469
18						0,531

$n_1 = 7$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5	6	7
0	0,0125	0,028	0,008	0,003	0,001	0,001	0,000
1	0,250	0,056	0,017	0,006	0,003	0,001	0,001
2	0,375	0,111	0,033	0,012	0,005	0,002	0,001
3	0,500	0,167	0,058	0,021	0,009	0,004	0,002
4	0,625	0,250	0,092	0,036	0,015	0,007	0,003
5		0,333	0,133	0,055	0,024	0,011	0,006
6		0,444	0,192	0,082	0,037	0,017	0,009
7		0,556	0,258	0,115	0,053	0,026	0,013
8			0,333	0,158	0,074	0,037	0,019
9			0,417	0,206	0,101	0,051	0,027
10			0,500	0,264	0,134	0,069	0,036
11			0,583	0,324	0,172	0,090	0,049

$n_1 = 7$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5	6	7
12				0,394	0,216	0,117	0,064
13				0,464	0,265	0,147	0,082
14				0,538	0,319	0,183	0,104
15					0,378	0,223	0,130
16					0,438	0,267	0,159
17					0,500	0,314	0,191
18					0,562	0,365	0,228
19						0,418	0,267
20						0,473	0,310
21						0,527	0,355
22							0,402
23							0,451
24							0,500
25							0,549

$n_1 = 8$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,111	0,022	0,006	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,222	0,044	0,012	0,004	0,002	0,001	0,000	0,000
2	0,333	0,089	0,024	0,008	0,003	0,001	0,001	0,000
3	0,444	0,133	0,042	0,014	0,005	0,002	0,001	0,001
4	0,556	0,200	0,067	0,024	0,009	0,004	0,002	0,001
5		0,267	0,097	0,036	0,015	0,006	0,003	0,001
6		0,356	0,139	0,055	0,023	0,010	0,005	0,002
7		0,444	0,188	0,077	0,033	0,015	0,007	0,003
8		0,556	0,248	0,107	0,047	0,021	0,010	0,005
9			0,315	0,141	0,064	0,030	0,014	0,007
10			0,387	0,184	0,085	0,041	0,020	0,010
11			0,461	0,230	0,111	0,054	0,027	0,014
12			0,539	0,285	0,142	0,071	0,036	0,019
13				0,341	0,177	0,091	0,047	0,025
14				0,404	0,217	0,114	0,060	0,032
15				0,467	0,262	0,141	0,076	0,041
16				0,533	0,311	0,172	0,095	0,052

Continuación de la tabla S10

$n_1 = 8$

w_m \ n_2	1	2	3	4	5	6	7	8
17					0,362	0,207	0,116	0,065
18					0,416	0,245	0,140	0,080
19					0,472	0,286	0,168	0,097
20					0,528	0,331	0,198	0,117
21						0,377	0,232	0,139
22						0,426	0,268	0,164
23						0,475	0,306	0,191
24						0,525	0,347	0,221
25							0,389	0,253
26							0,433	0,287
27							0,478	0,323
28							0,522	0,360
29								0,399
30								0,439
31								0,480
32								0,520

Tabla S11

Valores críticos de N_1 y N_2 para el criterio de las series, siendo el nivel de significación igual a $\alpha = 0{,}05$. En el encabezamiento de la columna está el mayor de los números n_1 y n_2 los cuales son iguales a las cantidades de signos idénticos en la sucesión de los signos. El número de orden de la fila corresponde al menor de los números n_1 y n_2.

	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	—	—	—	—	—	—	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
	9	9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
	10	10	11	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

6		3 11	3 12	3 12	4 13	4 13	4 13	4 13	5 —	5 —	5 —	5 —	5 —	5 —	6 —	6 —
7			3 13	4 13	4 14	5 14	5 14	5 14	5 15	5 15	6 15	6 —	6 —	6 —	6 —	6 —
8				4 14	5 14	5 15	5 15	6 16	6 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 17	7 17	7 17
9					5 15	5 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 18	8 18	8 18
10						6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 19	8 19	8 19	8 20	9 20
11							7 17	7 18	7 19	8 19	8 19	8 20	9 20	9 20	9 21	9 21
12								7 19	8 19	8 20	8 20	9 21	9 21	9 21	10 22	10 22
13									8 20	9 20	9 21	9 21	10 22	10 22	10 23	10 23
14										9 21	9 22	10 22	10 23	10 23	11 23	11 24
15											10 22	10 23	11 23	11 24	11 24	12 25
16												11 23	11 24	11 25	12 25	12 25
17													11 25	12 25	12 26	13 26
18														12 26	13 26	13 27
19															13 27	13 27
20																14 28

Tabla S12. **Números aleatorios uniformemente distribuidos**

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53
80	95	90	91	17	39	29	27	49	45	66	06	57	47	17
20	63	61	04	02	00	82	29	16	65	31	06	01	08	05
15	95	33	47	64	35	08	03	36	06	85	26	97	76	02
88	67	67	43	97	04	43	62	76	59	63	57	33	21	35
98	95	11	68	77	12	17	17	68	33	73	79	64	57	53
34	07	27	68	50	36	69	73	61	70	65	81	33	98	85
45	57	18	24	06	35	30	34	26	14	86	79	90	74	39
02	05	16	56	92	68	66	57	48	18	73	05	38	52	47
05	32	54	70	48	90	55	35	75	48	28	46	82	87	09
03	52	96	47	78	35	80	83	42	82	60	93	52	03	44
11	19	92	91	70	98	52	01	77	67	14	90	56	86	07
23	40	30	97	32	11	80	50	54	31	39	80	82	77	32
18	62	38	85	79	83	45	29	96	34	06	28	89	80	83
83	49	12	56	24	88	68	54	02	00	86	50	75	84	01
35	27	38	84	35	99	59	46	73	48	87	51	76	49	69
22	10	94	05	58	60	97	09	34	33	50	50	07	39	98
50	72	56	82	48	29	40	52	42	01	52	77	56	78	51
13	74	67	00	78	18	47	54	06	10	68	71	17	78	17
36	76	66	79	51	90	36	47	64	93	29	60	91	10	62
91	82	60	89	28	93	78	56	13	68	23	47	83	41	13
65	48	11	76	74	17	46	85	09	50	58	04	77	69	74
80	12	43	56	35	17	72	70	80	15	45	31	82	23	74
74	35	09	98	17	77	40	27	72	14	43	23	60	02	10
69	91	62	68	03	66	25	22	91	48	36	93	68	72	03
09	89	32	05	05	14	22	56	85	14	46	42	75	67	88
73	03	95	71	86	40	21	81	65	44	91	49	91	45	23
21	11	57	82	53	14	38	55	37	63	80	33	69	45	98
45	52	16	42	37	96	28	60	26	55	44	10	48	19	49
76	62	11	39	90	94	40	05	64	18	12	55	07	37	42
96	29	77	88	22	54	38	21	45	98	63	60	64	93	29
68	47	92	76	86	46	16	28	35	54	94	75	08	99	23
26	94	03	68	58	70	29	73	41	35	53	14	03	33	40
35	15	74	79	54	32	97	92	65	75	57	60	04	08	81
11	10	00	20	40	12	86	07	46	97	96	64	48	94	39
16	50	53	44	84	40	21	95	25	63	43	65	17	70	82

BIBLIOGRAFIA PRINCIPAL

Sevastiánov B. A., *ChistiakovV. P.*, *Zubkov A. M.* Problemas de teoría de las probabilidades. Moscú, Mir, 1985.

Brownlee K. A. Statistical theory and methodology in science and engineering. N.Y.— London, 1960.

Himmelblau D. Process Analysis by Statistical Methods. N-4, 1970.

Ефимов А. В. Математический анализ /специальные разделы/, ч. I: Общие функциональные ряды и их приложения. — М.: Высшая школа. (*Efímov A. V.* Análisis matemático (partes especiales), p. I: Series funcionales generales y sus aplicaciones, en ruso.)

Ефимов А. В., *Золотарев Ю. Г.*, *Терпигорева В. М.* Математический анализ /специальные разделы/, ч. II: Применение некоторых методов математического и функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1980. (*Efímov A. V.*, *Zolotarev Yu. J.*, *Terpigóreva V. M.* Análisis matemático (partes especiales), p. II: Aplicación de algunos métodos del análisis matemático y funcional, en ruso.)

Budak B. M., *Samarski A. A.*, *Tíjonov A. N.* Problemas de la física matemática. Moscú, Mir. 1984.

Smirnov M. M. Problemas de ecuaciones de la física matemática, Moscú, Mir. 1976.

Krasnov M. L., *Kiselev A. I.*, *Makarenko G. I.* Ecuaciones integrales, Moscú, Mir, 1970.

La colección contiene los problemas y ejercicios referentes a los cursos especiales de matemáticas: teoría de las probabilidades, estadística matemática, elementos de la teoría de los procesos aleatorios, ecuaciones de la física matemática y ecuaciones integrales. El libro está redactado en consonancia con los programas para estos cursos, aprobados por el Ministerio de Enseñanza Superior de la URSS. En todas las partes el lector encontrará las nociones teóricas necesarias. Todos los problemas están dotados de respuestas y los más difíciles, de resoluci s. Para resolver una parte los problemas ha de utilizar un ordenador.

El Manual se desti a los estudiantes del segu curso, y cursos superiores, los centros de enseñanza sup r, especialidades ingeniero- icas.

Está proximo a editarse

Bugrov Ya., Nikolski S.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

La presente colección de problemas corresponde a los manuales de los mismos autores "Cálculo diferencail e integral", "Elementos de álgebra lineal y geometría analítica", "Ecuaciones diferenciales. Integrales múltiples. Series. Funciones de variable compleja" que ya han sido publicados en español por la Editorial Mir en 1984-1985.

En el comienzo de cada parágrafo se mencionan los capítulos y parágrafos de los respectivos manuales donde el estudiante puede encontrar el correspondiente material teórico.

A cada apartado del manual corresponde un número mínimo de problemas por lo tanto para la asimilación exitosa del material teórico y adquisición de hábitos prácticos es necesario obligatoriamente resolver todos los problemas. Recomendamos esta colección a los estudiantes de los centros de enseñanza técnica superior.